

Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα Μέρος 1 Στοχαστικές Διαδικασίες με Κόστη

Αντώνης Οικονόμου

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

12/9/2022-5/10/2022

Εισαγωγή

Δομή μαθήματος

- Σκοπός του μαθήματος: Επισκόπηση μεθόδων και μοντέλων της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας
- Δομή:
 - 1 Στοχαστικές διαδικασίες με κόστη (Ανανεωτικές, Μαρκοβιανές)
 - 2 Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός
 - 3 Θεωρία Ουρών Αναμονής
 - 4 Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Εισαγωγή στην Ανανεωτική Θεωρία

Σημειακές διαδικασίες

- S_k : Χρόνος k -οστού γεγονότος.
- X_k : Ενδιάμεσος χρόνος $(k - 1)$ -οστού και k -οστού γεγονότος.
- $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$: Σημειακή διαδικασία (Point process).
- $N(t)$: Πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$, απαριθμήτρια διαδικασία της $\{S_n\}$.

Ανανεωτικές διαδικασίες

- $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$: Σημειακή διαδικασία (Point process).
- S_k : Χρόνος k -οστού γεγονότος.
- X_k : Ενδιάμεσος χρόνος $(k-1)$ -οστού και k -οστού γεγονότος.
- $N(t)$: Πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$.
- Αν οι X_k , $k = 1, 2, \dots$, ανεξάρτητες και ισόνομες $\sim F_X(t)$ τότε:
 - $\{S_k\}$: Ανανεωτική ακολουθία (Renewal sequence).
 - $N(t)$: Απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία (Renewal process).

Βασικοί υπολογισμοί

- Βασικά ερωτήματα:

$$F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] =;$$

$$E[S_k] =;$$

$$p_k(t) = \Pr[N(t) = k] =;$$

$$m(t) = m_X(t) = E[N(t)] =; \text{ (Ανανεωτική συνάρτηση).}$$

- Σχέση-κλειδί:

$$\{S_k \leq t\} = \{N(t) \geq k\}$$

Ολοκλήρωμα RS

- $F(t)$: αύξουσα, κατά τμήματα συνεχής, δεξιά συνεχής, παραγωγίσιμη (π.χ., συνάρτηση κατανομής μεικτής τ.μ. με διακριτό και απόλυτα συνεχές μέρος).
- $g(t)$: συνεχής συνάρτηση.
- Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της g ως προς F :

$$\int_a^b g(x) dF(x) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sum_x g(x)(F(x) - F(x-)) + \int_a^b g(x) F'(x) dx,$$

με την άθροιση πάνω σε όλα τα σημεία ασυνέχειας της F .

Ολοκλήρωμα RS(συνέχεια)

- Όταν $F(x) = F_X(x)$ (συνάρτηση κατανομής), τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = E[g(X)].$$

Συνέλιξη κατανομών (RS)

- Έστω $X, Y \geq 0$, ανεξάρτητες, με $X \sim F_X(t)$ και $Y \sim F_Y(t)$.
- Η συνέλιξη LS των F_X, F_Y ορίζεται ως

$$(F_X * F_Y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t - u) dF_Y(u).$$

- Η συνέλιξη των F_X, F_Y είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των X, Y .
- Προσοχή! Η συνήθης συνέλιξη συναρτήσεων

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - u)g(u)du$$

δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας αθροίσματος τ.μ.

Μετασχηματισμός LS

- Έστω $X \geq 0$, με σ.κ. $F_X(x)$. Ο μετασχηματισμός LS είναι

$$\tilde{F}_X(s) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \int_0^\infty e^{-st} dF_X(t), \quad \Re(s) \geq 0.$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών LS

Τυχαία μεταβλητή X	Συνάρτηση $\phi(x)$ (ή $F_X(x)$)	Μετασχηματισμός LS $\tilde{\phi}(s)$ (ή $\tilde{F}_X(s)$)
—	$\phi(x) = x$	$\tilde{\phi}(s) = \frac{1}{s}$
—	$\phi(x) = \int_0^\infty \phi_1(x-u)d\phi_2(u)$	$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_1(s)\tilde{\phi}_2(s)$
—	$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$	$\tilde{\phi}(s) = a_1\tilde{\phi}_1(s) + a_2\tilde{\phi}_2(s)$
$X = c \geq 0$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < c \\ 1 & \text{αν } x \geq c \end{cases}$	$\tilde{F}_X(s) = e^{-cs}$
$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$
$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$	$\tilde{F}_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$
$Z = X + Y$, αν	$F_Z(z) = \int_0^\infty F_Y(z-x)dF_X(x)$	$\tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)$
$Z = \begin{cases} X & \text{πιθ. } p \\ Y & \text{πιθ. } q \end{cases}$	$F_Z(z) = pF_X(z) + qF_Y(z)$	$\tilde{F}_Z(s) = p\tilde{F}_X(s) + q\tilde{F}_Y(s)$

Πίνακας: Συναρτήσεις και αντίστοιχοι μετασχηματισμοί
Laplace-Stieltjes.

Βασικοί υπολογισμοί (συνέχεια)

- Κατανομή χρόνων γεγονότων

$$\begin{aligned}F_{S_k}(t) &= \Pr[S_k \leq t] = \Pr[X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq t] \\&= F_X^{*k}(t).\end{aligned}$$

- Μέση τιμή χρόνων γεγονότων

$$E[S_k] = kE[X].$$

Βασικοί υπολογισμοί (συνέχεια)

- Συνάρτηση πιθανότητας αριθμού γεγονότων

$$\begin{aligned}p_k(t) &= \Pr[N(t) = k] = \Pr[S_k \leq t < S_{k+1}] \\&= \Pr[S_k \leq t] - \Pr[S_{k+1} \leq t] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t).\end{aligned}$$

- Μέση τιμή αριθμού γεγονότων (ανανεωτική συνάρτηση)

$$\begin{aligned}m(t) &= E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[S_k \leq t] \\&= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).\end{aligned}$$

Μετασχηματισμοί LS βασικών ποσοτήτων

- Ορισμοί

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{S_k}(t),$$

$$\tilde{p}_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dp_k(t),$$

$$\tilde{m}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t).$$

Βασικοί υπολογισμοί μετασχ. LS

• Υπολογισμοί

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = \widetilde{F_X^{*k}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k,$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) - \widetilde{F_X^{*k+1}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k - (\tilde{F}_X(s))^{k+1} \\ &= (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k,\end{aligned}$$

$$\tilde{m}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{F_X^{*k}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^k = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

Μεθοδολογία υπολογισμού βασικών ποσοτήτων

- Με χρήση μετασχηματισμών LS:

$$\begin{aligned} F_X(t) &\rightarrow \tilde{F}_X(s) \rightarrow \tilde{F}_{S_k}(s), \tilde{p}_k(s), \tilde{m}_X(s) \\ &\rightarrow F_{S_k}(t), p_k(t), m_X(t). \end{aligned}$$

Παράδειγμα

- Ανανεωτική διαδικασία με ενδιαμέσους χρόνους $X_k \sim \text{Exp}(\lambda)$ (στοχαστική διαδικασία Poisson ρυθμού λ).
 $F_{S_k}(t), p_k(t), m_X(t);$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \rightarrow$$

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \rightarrow$$

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k,$$

$$\tilde{p}_k(s) = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^{k+1}$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{s}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντιστροφή:

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k \rightarrow F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!},$$

$$\tilde{p}_k(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^{k+1} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right) - \left(1 - \sum_{j=0}^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\lambda}{s} \rightarrow m(t) = \lambda t.$$

Ανανεωτικός συλλογισμός

Ανανεωτικές εξισώσεις

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Ιδέα

- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία.
- $h(t)$: συνάρτηση που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανανεωτικής διαδικασίας στο $(0, t]$,
π.χ. $m(t)$ ή $E[S_{N(t)+1} - t]$
- Ανανεωτικός συλλογισμός: Δέσμευση στον χρόνο $S_1 = u$ του πρώτου ανανεωτικού γεγονότος για τον υπολογισμό της ποσότητας.
- Η τεχνική οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις συγκεκριμένου τύπου.

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Εξισώσεις

- Ο ανανεωτικός συλλογισμός οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις του τύπου

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

όπου

$h(t)$: η υπό μελέτη (άγνωστη) ποσότητα,

$d(t)$: μια γνωστή συνάρτηση,

$F_X(t)$: η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα: Ανανεωτική εξίσωση για την $m(t)$

- $h(t) = m(t)$: ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$,
- S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$,
- $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(N(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} 1 + N(t - u).$$

- Επομένως,

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t - u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= F_X(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = F_X(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = F_X(t)$.

- Αναφέρεται ως η ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση.

Παράδ: Αναν. εξίσωση για $R(t) = E[S_{N(t)+1} - t]$

- $h(t) = E[R(t)] = E[S_{N(t)+1} - t]$: μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t , δηλαδή ο μέσος χρόνος που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός από τη στιγμή t .
- S_1 : ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$.
- $F_X(t)$: η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(R(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} R(t - u).$$

- Επομένως,

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t - u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t - u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u]dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$h(t) = \int_t^\infty (u - t)dF_X(u) + \int_0^t h(t - u)dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = \int_t^\infty (u - t) dF_X(u) + \int_0^t h(t - u) dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t - u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_t^\infty (u - t) dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u) dy = \int_t^\infty (1 - F_X(y)) dy. \end{aligned}$$