

Οριακά θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία

Πλαίσιο οριακών θεωρημάτων

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία,
- $X_k, k \geq 1$: ενδιάμεσοι χρόνοι,
- $F_X(t)$: κατανομή ενδιάμεσων χρόνων,
- $E[X_k] = \mu, Var[X_k] = \sigma^2$,
- $m_X(t)$: ανανεωτική συνάρτηση.

Νόμος Μεγάλων Αριθμών (NMA)

- Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό (μακροπρόθεσμη συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

- Αν $\mu < \infty$ και $\sigma^2 \in (0, \infty)$, έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr \left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq x \right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (ΣΑΘ)

- Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό (μακροπρόθεσμη μέση συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_X(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

- Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, η οριακή λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$$

δίνεται ως

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u) du}{\mu}.$$

- Μια τεχνική προϋπόθεση αφορά την ‘απεριοδικότητα’ της συνάρτησης κατανομής $F_X(t)$.

Περιοδικότητα/Απεριοδικότητα τ.μ. - Ορισμός

- X μη-αρνητική, γνήσια ($\Pr[X < \infty] = 1$).
- X περιοδική, αν υπάρχει $p > 0$ ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = kp] = 1$.
- Ο μεγαλύτερος τέτοιος p λέγεται περίοδος της X .
- X απεριοδική $\Leftrightarrow X$ όχι περιοδική.

Περιοδικότητα/Απεριοδικότητα τ.μ. - Παραδ.

- X συνεχής ή μεικτή $\Rightarrow X$ απεριοδική.
- $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $\text{Poisson}(\lambda)$, $\text{Geom}(p)$
 $\Rightarrow X$ περιοδική με $p = 1$.
- X τ.μ. με
 $\Pr[X = 0] = \frac{1}{3}$, $\Pr[X = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$, $\Pr[X = \frac{1}{3}] = \frac{1}{6}$
 $\Rightarrow X$ περιοδική με $p = \frac{1}{6}$.
- X τ.μ. με
 $\Pr[X = 0] = \frac{1}{3}$, $\Pr[X = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$, $\Pr[X = \sqrt{2}] = \frac{1}{6}$
 $\Rightarrow X$ απεριοδική.
- X τ.μ. με τιμές $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 $\Rightarrow X$ απεριοδική.

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

- $h(t)$: μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

- $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$ με $d_i(t) \geq 0$, φθίνουσες, φραγμένες.
- $\int_0^\infty |d(u)| du < \infty$.
- Τότε:

- 1 X απεριοδική με μέση τιμή $\mu > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u) du}{\mu}.$$

- 2 X περιοδική με περίοδο p και μέση τιμή $\mu > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(tp + x) = \frac{p \sum_{t=0}^\infty d(tp + x)}{\mu} \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΒΑΘ - Ιδέα απόδειξης για συνεχή X

- Παίρνουμε όριο στη λύση της ανανεωτικής:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u) dm_X(u).$$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$, αφού $\int_0^\infty |d(u)| du < \infty$. Άρα:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d(t-u) dm_X(u).$$

- Σπάμε το ολοκλήρωμα σε δυο κομμάτια
 $\int_0^\epsilon d(t-u) dm_X(u)$ και $\int_\epsilon^t d(t-u) dm_X(u)$.

ΒΑΘ - Ιδέα απόδειξης για συνεχή X (συνέχεια)

- Το κλειδί είναι η κατάλληλη επιλογή του ϵ ώστε
 - 1 το $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ να τείνει στο 0, καθώς $t \rightarrow \infty$.
(Εύλογο αφού για μικρά u (στο $[0, \epsilon]$) το $d(t-u)$ θα είναι κοντά στο 0, αφού $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$).
 - 2 για μεγάλα u (στο (ϵ, t)) η $m_X(u) \simeq \frac{u}{\mu}$ (ΣΑΘ), οπότε

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u) &\simeq \frac{1}{\mu} \int_\epsilon^t d(t-u)du \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{t-\epsilon} d(y)dy \rightarrow \frac{\int_0^\infty d(y)dy}{\mu}, \end{aligned}$$

καθώς $t \rightarrow \infty$.

Εφαρμογή: Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$

- Ανανεωτική εξίσωση για μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $h(t) = E[R(t)]$:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

$$\text{με } d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y)) dy$$

- Μας ενδιαφέρει η οριακή λύση, $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$, για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ .
- Π.χ., αν $\{N(t)\}$ είναι η διαδικασία αφίξεων λεωφορείων σε μια στάση, το $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$ είναι ο μέσος χρόνος μέχρι το επόμενο λεωφορείο.

Εφαρμογή: $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- Προϋποθέσεις ΒΑΘ για $F_X(t)$:
 - Συνεχής $\Rightarrow$ Απεριοδική.
- Προϋποθέσεις ΒΑΘ για $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$:
 - ❶ $d(t) \geq 0$.
 - ❷ $d(t)$ φθίνουσα.
 - ❸ $d(t) \leq \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \mu < \infty$, $d(t)$ φραγμένη.
 - ❹ $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$;

Εφαρμογή: $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |d(u)| du &= \int_0^\infty d(u) du \\
 &= \int_0^\infty \int_u^\infty (1 - F_X(y)) dy du \\
 &= \int_0^\infty \int_u^\infty \int_y^\infty dF_X(x) dy du \\
 &= \int_0^\infty \int_0^x \int_0^y du dy dF_X(x) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^x y dy dF_X(x) \\
 &= \int_0^\infty \frac{x^2}{2} dF_X(x) = \frac{E[X^2]}{2} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2} < \infty.
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή: $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- ΒΑΘ εφαρμόσιμο. Τύπος οριακού μέσου υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)] = \frac{\int_0^{\infty} d(u) du}{\mu} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

- Ερμηνεία:
Σε κατάσταση 'ισορροπίας', ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος για το επόμενο γεγονός είναι $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$.
- Ανανεωτικό παράδοξο:

Για $\sigma > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)] > \frac{\mu}{2}.$$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$

- $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμ. χρόνους X_i .
- $X_i \sim F_X(t)$ συνεχής με σππ $f_X(t)$.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$.
- $m_X(t) = E[N(t)]$.
- ΣΑΘ: $m_X(t) \simeq \frac{t}{\mu}$, για μεγάλα t .
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(m_X(t) - \frac{t}{\mu} \right) =;$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- $h(t) = m_X(t) - \frac{t}{\mu}$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$;
- Ανανεωτική εξίσωση για την $m_X(t)$:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u) dF_X(u).$$

- Αντικατάσταση της $h(t)$:

$$h(t) + \frac{t}{\mu} = F_X(t) + \int_0^t \left(h(t-u) + \frac{t-u}{\mu} \right) dF_X(u).$$

- Λύση ως προς $h(t) \rightarrow$ Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\
 &\quad + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\
 &= d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u),
 \end{aligned}$$

με

$$d(t) = F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu}.$$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Σκοπός: Έλεγχος προϋποθέσεων ΒΑΘ.
- Δυσκολία: Να γράψουμε $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, με $d_i(t) \geq 0$, φθίνουσες, φραγμένες.
- Τεχνική: Δουλεύουμε με την παράγωγο της $d(t)$.

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Παραγωγίζουμε την έκφραση της $d(t)$:

$$\begin{aligned}
 d(t) &= F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\
 &= F_X(t) + \frac{t}{\mu} F_X(t) - \frac{1}{\mu} \int_0^t u dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\
 \Rightarrow d'(t) &= f_X(t) + \frac{1}{\mu} F_X(t) + \frac{t}{\mu} f_X(t) - \frac{1}{\mu} t f_X(t) - \frac{1}{\mu} \\
 &= \underbrace{f_X(t)}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{1}{\mu} (1 - F_X(t))}_{\geq 0} \\
 \Rightarrow d(t) &= \underbrace{F_X(t)}_{\text{αύξουσα}} - \underbrace{\frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F_X(u)) du}_{\text{αύξουσα}}.
 \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Προσθαφαιρούμε κατάλληλο όρο για να έχουμε διαφορά φθινουσών:

$$\begin{aligned}
 d(t) &= F_X(t) - \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F_X(u)) du \\
 &= F_X(t) - 1 + 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F_X(u)) du \\
 &= \frac{1}{\mu} \left(\mu - \int_0^t (1 - F_X(u)) du \right) - (1 - F_X(t)) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F_X(u)) du}_{d_1(t)} - \underbrace{(1 - F_X(t))}_{d_2(t)}.
 \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Έχουμε

$$d_1(t) = \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F_X(u)) du, \quad \geq 0, \text{ φθιν., φραγμ.}$$

$$d_2(t) = 1 - F_X(t), \quad \geq 0, \text{ φθιν., φραγμ.}$$

- Θα δείξουμε ότι $\int_0^\infty |d(t)| dt < \infty$.
- Είναι

$$\int_0^\infty |d(t)| dt \leq \int_0^\infty d_1(t) dt + \int_0^\infty d_2(t) dt.$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d_1(t) dt &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_t^\infty (1 - F_X(u)) du dt \\
 &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_u^\infty dF_X(s) du dt \\
 &\stackrel{0 < t \leq u < s}{=} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^s \int_0^u dt du dF_X(s) \\
 &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^s u du dF_X(s) \\
 &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \frac{s^2}{2} dF_X(s) \\
 &= \frac{E[X^2]}{2\mu} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}.
 \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Επίσης

$$\int_0^\infty d_2(t)dt = \int_0^\infty (1 - F_X(t))dt = \mu.$$

- Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |d(t)|dt &\leq \int_0^\infty d_1(t)dt + \int_0^\infty d_2(t)dt \\ &= \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} + \mu < \infty. \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- ΒΑΘ εφαρμόσιμο $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(m_X(t) - \frac{t}{\mu} \right) &= \frac{\int_0^\infty d(t) dt}{\mu} \\
 &= \frac{\int_0^\infty d_1(t) dt - \int_0^\infty d_2(t) dt}{\mu} \\
 &= \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} - 1 \\
 &= \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}.
 \end{aligned}$$

- Η $m_X(t)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη $\frac{1}{\mu}t + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$.