

Στοχαστική διαδικασία Poisson

Ανανεωτικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ



$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία
με $\text{Exp}(\lambda)$ ενδιάμεσους χρόνους.

Ολικός/Μακροσκοπικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ



$\{N(t)\}$ σημειακή διαδικασία με

- 1 ανεξάρτητες προσauξήσεις, δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,
- 2 ομογενείς προσauξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t+s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s ,
- 3 την κατανομή της $N(t)$ να είναι $\text{Poisson}(\lambda t)$, δηλαδή

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Τοπικός/Μικροσκοπικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ



$\{N(t)\}$ σημειακή διαδικασία με

- 1 ανεξάρτητες προσauξήσεις,
- 2 ομογενείς προσauξήσεις,
- 3 να ισχύει

$$\Pr[N(h) = n] = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & \text{αν } n = 0, \\ \lambda h + o(h) & \text{αν } n = 1, \\ o(h) & \text{αν } n \geq 2, \end{cases}$$

για $h \rightarrow 0^+$ (όπου $o(h)$ είναι μια συνάρτηση του h με $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$).

Υπέρθεση διαδικασιών Poisson

- $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}, \dots, \{N_r(t)\}$ ανεξ. διαδ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.
- $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους με $N(t) = \sum_{j=1}^r N_j(t)$.
- Τότε:
 - ① $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i$.
 - ② Αν Z_k ο τύπος του k -οστού γεγονότος της υπέρθεσης, ($\{Z_k = i\}$ αν το k -οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από γεγονός της $\{N_i(t)\}$), τότε οι $Z_k, k \geq 1$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και

$$\Pr[Z_k = i] = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Διάσπαση διαδικασιών Poisson

- $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ .
- $Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ. ισόν. με τιμές στο $\{1, 2, \dots, r\}$ και

$$\Pr[Z_k = i] = p_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

- Έστω $N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{Z_k=i\}}, t \geq 0, 1 \leq i \leq r$.
- Οι $\{N_i(t)\}, 1 \leq i \leq r$ συνιστούν μια τυχαία διάσπαση της $\{N(t)\}$.
- Τότε:
Ο $\{N_i(t)\}, 1 \leq i \leq r$ ανεξ. διαδικασίες Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς $\lambda p_i, 1 \leq i \leq r$.

Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων - Διατύπωση

- $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson.
- $S_1, S_2, \dots$ χρόνοι γεγονότων.
- Τότε:

$$(S_1, S_2, \dots, S_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}),$$

όπου $U_{i:n}$ η i -οστή διατεταγμένη από n ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $(0, t]$.

Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων - Χρησιμότητα

- Επιτρέπει υπολογισμούς δεσμευμένων πιθανοτήτων της μορφής $\Pr[(S_1, S_2, \dots, S_n) \in A | N(t) = n]$, καθώς και δεσμευμένων μέσων τιμών της μορφής $E[g(S_1, S_2, \dots, S_n) | N(t) = n]$:

$$\begin{aligned} & \Pr[(S_1, S_2, \dots, S_n) \in A | N(t) = n] \\ = & \Pr[(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}) \in A], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E[g(S_1, S_2, \dots, S_n) | N(t) = n] \\ = & E[g((U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}))]. \end{aligned}$$

Χρήσιμες υπενθυμίσεις διατεταγμένων τ.μ.

- Αν $(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξ. ομοιόμορφες στο $(0, t]$, τότε:

$$F_{U_{i:n}}(u) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}, \quad 0 < u \leq t,$$

$$f_{U_{i:n}}(u) = \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} \left(\frac{u}{t}\right)^{i-1} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-i},$$
$$0 < s_i \leq t,$$

$$E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$f_{(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$
$$= \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n \leq t, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Βασικά εργαλεία για στοχ. διαδ. Poisson

- Ορισμοί (3).
- Θεωρήματα υπέρθεσης και διάσπασης.
- Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων.

Άσκηση: Δεσμευμένη κατανομή του S_1

- $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ .
- $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων.
- $E[S_1 | N(t) \geq 1] = ?$

Άσκηση: Ντετερμινιστικές ή τυχαίες επιθεωρήσεις;

- Μηχάνημα με $\text{Exp}(\lambda)$ χρόνο ζωής.
- Μπορεί να επιθεωρείται κατά μέσο όρο κάθε $\tau = \frac{1}{\mu}$ χρονικές μονάδες,
 - ① είτε στις στιγμές $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ (α),
 - ② είτε στις στιγμές μιας Poisson με ρυθμό μ (β).
- Y_α, Y_β : χρόνοι διάγνωσης βλάβης με τις διαδικασίες (α) και (β).
- $E[Y_\alpha], E[Y_\beta]=;$
- Ποια διαδικασία επιθεωρήσεων είναι προτιμότερη.

Άσκηση: Μέσος χρόνος διάβασης

- Δρόμος με διάβαση πεζών.
- Τα αυτοκίνητα περνάνε τη διάβαση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αυτοκίνητα το λεπτό.
- Ο δρόμος έχει πλάτος x μέτρα.
- Ένας πεζός που περπατάει με ταχύτητα u μέτρα το λεπτό, θέλει να διασχίσει τον δρόμο.
- Τον διασχίζει μόνο όταν βλέπει ότι δεν θα περάσουν αυτοκίνητα από τη διάβαση ενόσω θα την περνάει ο ίδιος.
- Μέσο χρόνος από την άφιξη πελάτη ως το πέρας της διάσχισης=;.