

Παρελθών, υπολειπόμενος και t -εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης - Ορισμοί

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $X_1, X_2, \dots$: ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων $\sim F_X(x)$.
- $E[X_i] = \mu, Var[X_i] = \sigma^2$.
- $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$: χρόνοι γεγονότων.
- Ορίζουμε:

$$A(t) = t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0,$$

$$R(t) = S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0,$$

$$T(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0.$$

Παρελθών, υπολειπόμενος και t -εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης - Ερμηνείες

- Μαθηματικοί ορισμοί:

$$A(t) = t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0,$$

$$R(t) = S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0,$$

$$T(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0.$$

- Ερμηνείες:

- $A(t)$: ηλικία (παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης - age), χρόνος από το προηγούμενο γεγονός.
- $R(t)$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης (προδρομικός χρόνος ανανέωσης - remaining renewal time ή residual renewal time), χρόνος ως το επόμενο γεγονός.
- $T(t)$: t -εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος (ολικός - total renewal time), χρόνος από το προηγούμενο ως το επόμενο γεγονός.

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Έχουμε δείξει ότι για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων:

Ανανεωτική εξίσωση για $E[R(t)] + \text{BA}\Theta$

$\Downarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)] = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}.$$

- Επειδή $\{R(t)\}$ αναγεννητική, το όριο αυτό είναι ίσο με το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t R(u) du \right]}{t},$$

που υπολογίζεται ευκολότερα με ΣΑΘΚ.

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Από αναγεννητικότητα της $\{R(t)\}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t R(u) du \right]}{t}.$$

- Ορίζουμε διαδικασία κόστους $C(t) = \int_0^t R(u) du$.
- Έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t R(u) du \right]}{t} \stackrel{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E \left[\int_0^X R(u) du \right]}{E[X]}.$$

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t R(u) du \right]}{t} \\&= \frac{E \left[\int_0^X R(u) du \right]}{E[X]} \\&= \frac{E \left[\int_0^X (X - u) du \right]}{E[X]} \\&= \frac{E \left[\frac{X^2}{2} \right]}{E[X]} \\&= \frac{E[X^2]}{2E[X]} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}.\end{aligned}$$

Οριακή κατανομή του $R(t)$

- Για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων:

Ανανεωτική εξίσωση για $\Pr[R(t) \leq x] + \text{BA}\Theta$

$\Downarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[R(t) \leq x] = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u)) du}{\mu}.$$

- Επειδή $\{R(t)\}$ αναγεννητική, το όριο αυτό είναι ίσο με το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t 1_{\{R(u) \leq x\}} du \right]}{t},$$

που υπολογίζεται ευκολότερα με ΣΑΘΚ.

Οριακή κατανομή του $R(t)$

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[R(t) \leq x] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t 1_{\{R(u) \leq x\}} du \right]}{t} \\
 &= \frac{E \left[\int_0^X 1_{\{R(u) \leq x\}} du \right]}{E[X]} \\
 &= \frac{E[\min(X, x)]}{E[X]} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \Pr[\min(X, x) > u] du}{E[X]} \\
 &= \frac{\int_0^x \Pr[X > u] du}{E[X]} = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u)) du}{\mu}.
 \end{aligned}$$