

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου

Ορισμός Μ.α.δ.χ.

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (Μ.α.δ.χ.) με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ αν
 - ① $X_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,
 - ② $\Pr[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$, $n \geq 0$, $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in \mathcal{S}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).
- Αν οι $\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$ δεν εξαρτώνται από το n , η Μ.α.δ.χ. λέγεται ομογενής.
Τότε συμβολίζουμε:

$$p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετήσουμε μόνο ομογενείς Μ.α.δ.χ.

Βασικά στοιχεία Μ.α.δ.χ.

- Για να προσδιοριστεί μια Μ.α.δ.χ. $\{X_n\}$ χρειαζόμαστε:

- 1 Αρχική κατανομή:

$$\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)}) \text{ με } \pi_i^{(0)} = \Pr[X_0 = i].$$

- 2 Πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης (1ης τάξης):

$$\mathbf{P} = (p_{ij}), \text{ με } p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

- Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε:

- 1 Μεταβατική κατανομή:

$$\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)}) \text{ με } \pi_i^{(n)} = \Pr[X_n = i].$$

- 2 Πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης m -ης τάξης):

$$\mathbf{P} = (p_{ij}^{(m)}), \text{ με } p_{ij}^{(m)} = \Pr[X_{n+m} = j | X_n = i].$$

Πιθανότητα μονοπατιού Μ.α.δ.χ.

- Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συγκεκριμένου μονοπατιού $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_n$ είναι

$$\Pr[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = \pi_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

(από πολλαπλασιαστικό νόμο).

Πιθανότητες n -οστής τάξης Μ.α.δ.χ. Ι

- Οι πιθανότητες μετάβασης n -οστής τάξης υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j, \end{cases}$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in \mathcal{S}} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

(από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας).

Πιθανότητες n -οστής τάξης Μ.α.δ.χ. II

- Οι πιθανότητες μετάβασης n -οστής τάξης σε πινακική μορφή υπολογίζονται ως

$$\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{P}^{(n-k)}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n, \quad n \geq 0.$$

Μεταβατική κατανομή Μ.α.δ.χ.

- Οι μεταβατικές πιθανότητες υπολογίζονται από τη σχέση

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)},$$

(από Θεώρημα Ολικής πιθανότητας), που γράφεται σε πίνακική μορφή ως

$$(\pi^{(n)})^T = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^{(n)} = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^n.$$

Μέσοι αριθμοί επισκέψεων Μ.α.δ.χ.

- Μέσος αριθμός επισκέψεων στην j στα πρώτα n βήματα ξεκινώντας από την i :

$$m_{ij}^{(n)} = E \left[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} | X_0 = i \right].$$

- Οι μέσοι αριθμοί επισκέψεων υπολογίζονται ως:

$$m_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}.$$

- Σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{M}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^k.$$

Επικοινωνία καταστάσεων - Κλάσεις

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα $\mathbf{P}$.
- $i \rightarrow j$ (j προσπελάσιμη από την i) $\Leftrightarrow \exists n \geq 0: p_{ij}^{(n)} > 0$
 $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_{n-1}: p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} > 0$.
- $i \leftrightarrow j$ (i, j επικοινωνούν) $\Leftrightarrow i \rightarrow j$ και $j \rightarrow i$.
- Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας $\Rightarrow$ ο $\mathcal{X}$ διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις).
- Μια Μ.α.δ.χ. με μοναδική κλάση επικοινωνίας λέγεται αδιαχώριστη (όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν).
- Μια κλάση $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathcal{C}$ και $j \notin \mathcal{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή.

Χρόνοι απορρόφησης

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$.
- Ορίζουμε:

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathcal{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$,

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

την πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i , και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

τον μέσο χρόνο πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i .

Πιθανότητες πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$, με $h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i]$.
- Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned}x_i &= 1, \quad i \in \mathcal{C}, \\x_i &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} x_j, \quad i \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$, με $m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X_0 = i]$.
- Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$y_i = 0, i \in \mathcal{C},$$

$$y_i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} y_j, i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}.$$

Χρόνοι επανόδου σε κατάσταση

- Έστω $X_0 = j$.
- Ορίζουμε:

$$R_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\},$$

τον χρόνο επανόδου της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην j ,

$$h_j = \Pr[R_j < \infty | X_0 = j],$$

την πιθανότητα επανόδου στην j , και

$$m_j = E[R_j | X_0 = j],$$

τον μέσο χρόνο επανόδου στην j .

Σύνδεση χρόνων 1ης εισόδου και επανόδου

- Για συγκεκριμένο j , θεωρούμε τη Μ.α.δ.χ. που προκύπτει αν τροποποιήσουμε την αρχική, κάνοντας την j απορροφητική.
- Για τη νέα Μ.α.δ.χ. υπολογίζουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$.
- Τότε:

$$h_j = \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji} h_i(\{j\}),$$

$$m_j = 1 + \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji} m_i(\{j\}).$$

Επαναληπτικότητα - παροδικότητα

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ.
- j κατάσταση της $\{X_n\}$, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j .
 - 1 j θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow h_j = 1$ και $m_j < \infty$.
 - 2 j μηδενικά επαναληπτική $\Leftrightarrow h_j = 1$ και $m_j = \infty$.
 - 3 j παροδική $\Leftrightarrow h_j < 1$.

Ιδιότητες επαναληπτικότητας - παροδικότητας

- Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας:
 $i \leftrightarrow j \Rightarrow i$ και j ίδιου τύπου.
- $\mathcal{C}$ ανοικτή κλάση $\Rightarrow \mathcal{C}$ παροδική.
- $\mathcal{C}$ πεπερασμένη κλειστή κλάση $\Rightarrow \mathcal{C}$ θετικά επαναληπτική.
- $\mathcal{C}$ άπειρη κλειστή κλάση $\Rightarrow$ ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα.

Περιοδικότητα - Απεριοδικότητα

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ.
- j κατάσταση της $\{X_n\}$.

$$d_j = \text{MK}\Delta\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

- ① j απεριοδική $\Leftrightarrow d_j = 1$.
- ② j περιοδική με περίοδο $d_j \Leftrightarrow d_j > 1$.
- $p_{jj} > 0 \Rightarrow j$ απεριοδική ($\nexists$).
- Οι ιδιότητες απεριοδικότητας, περιοδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας: $i \leftrightarrow j \Rightarrow d_i = d_j$.