

Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων
Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου

Κατανομή ισορροπίας

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\pi = (\pi_j)$ κατανομή ισορροπίας της $\{X_n\}$



$\pi = (\pi_j)$ μη-αρνητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}, \quad j \in \mathcal{X},$$

που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. Ι

- $\{X_n\}$ αδιαχώριστη Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\{X_n\}$ θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow \{X_n\}$ έχει μια στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_j)$.
- Αν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι μοναδική.
- Κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\pi$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. II

- π_j : μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}}{n} = \pi_j, \quad \text{με πιθανότητα 1, } j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της $\{X_n\}$).

- π_j : μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}]}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$

- π_j : αντίστροφος του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j :

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. III

- π_j : C -οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η C -οριακή κατανομή της $\{X_n\}$).

- Αν η Μ.α.δ.χ. απεριοδική, τότε π_j : οριακή πιθανότητα της κατάστασης j :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η οριακή κατανομή της $\{X_n\}$).

- Αν η Μ.α.δ.χ. έχει αρχική κατανομή την π , τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την π :

$$\pi^{(0)} = \pi \Rightarrow \pi^{(n)} = \pi, \quad n \geq 0.$$

(π είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$).

Υπολογισμοί με την κατανομή ισορροπίας

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ., αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\pi = (\pi_j : j \in \mathcal{X})$ η κατανομή ισορροπίας της.
- Τότε:
 - 1 π_j : μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου (βημάτων) που η $\{X_n\}$ περνάει στην j .
 - 2 $\pi_j p_{ji}$: μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων τύπου $j \rightarrow i$.
 - 3 $\frac{\pi_j}{\pi_i}$: μέσος αριθμός επισκέψεων στην j μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i .

ΣΑΘΚ $\Rightarrow$ Τύπος $\frac{\pi_j}{\pi_i}$

- $\{X_n\}$: Αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις επισκέψεις σε κάποια $i \in \mathcal{X}$.
- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία επισκέψεων στην i .
- $\{C(t)\}$: Διαδικασία κόστους με

$C(t) =$ πλήθος επισκέψεων στην j στο $[(0, t]$.

- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t}}_{\pi_j} = \frac{E[C]}{E[X]},$$

με

$E[C]$: μέσο αριθμό επισκέψεων στην j μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i ,

$$E[X] = m_i = \frac{1}{\pi_i}.$$

- Άρα $E[C] = \frac{\pi_j}{\pi_i}$.

Ερμηνεία εξισώσεων ισορροπίας

- Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση j :

$$\pi_j \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}.$$

- $\pi_j \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από την j προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς την j από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση ισορροπίας: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς την j είναι ίσα.

Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

- Ίδια ιδέα με εξισώσεις ισορροπίας, αλλά αντί για κατάσταση j έχουμε σύνολο A .
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς το A είναι ίσα.
- $\sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \pi_j p_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από το A προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \pi_i p_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς το A από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για το σύνολο A :

$$\sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{A}^c} \pi_i p_{ij}.$$

Κατανομή ισορροπίας Μ.α.δ.χ. γέννησης-θανάτου

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. τύπου γέννησης θανάτου

$$\Updownarrow$$

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = i + 1, \\ r_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = i, \\ q_i & \text{αν } i = 1, 2, 3, \dots, \quad j = i - 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Εξισώσεις γενικ. ισορ. για $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, i - 1\}$, $i \geq 1$
 $\Rightarrow \pi_{i-1}p_{i-1} = \pi_i q_i, \quad i = 1, 2, \dots$
- Άρα

$$\pi_i = \pi_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad i \geq 1.$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με κόστη

Δομές κόστους

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
 - ① $c : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους παραμονής $c(j)$: κόστος μιας επίσκεψης (δηλαδή, χρονικής μονάδας παραμονής) στην j της $\{X_n\}$.
 - ② $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους μετάβασης $d(i, j)$: κόστος μιας μετάβασης $i \rightarrow j$ της $\{X_n\}$.

Ρυθμοί κόστους

- Κόστος μέχρι την n -οστή μετάβαση:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (c(X_k) + d(X_k, X_{k+1})), \quad n \geq 0,$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(n)}{n}.$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[C(n)]}{n}.$$

Υπολογισμός ρυθμού κόστους

- $\{X_n\}$ αδιαχώριστη με στάσιμη κατανομή (π_j) και

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j \left(|c_j| + \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{jk} |d(j, k)| \right) < \infty$$

$\Rightarrow$

- 1 Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(n)}{n} = \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j, k), \quad \text{με πιθαν. 1.}$$

- 2 Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[C(n)]}{n} = \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j, k).$$

Αιτιολόγηση

- Αναγεννητικός κύκλος: Το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i .

- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους = $\frac{E[C]}{E[X]}$,

$E[C]$: Μέσο κόστος σε έναν κύκλο,

$E[X]$: Μέση διάρκεια κύκλου.



$$E[X] = \frac{1}{\pi_i}.$$



$$E[C] = \sum_j \frac{\pi_j}{\pi_i} c(i) + \sum_j \sum_k \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{jk} d(j, k).$$

διότι $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων στην j σε έναν κύκλο.

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Περιγραφή

- Μηχανή επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας.
- Καταστάσεις μηχανής: 0 (άριστη), 1, 2, ... (μεγάλη τιμή $\rightarrow$ κακή κατάσταση).
- Μετά από κάθε επιθεώρηση, ο διαχειριστής αποφασίζει αν θα αντικαταστήσει τη μηχανή με καινούργια ή όχι.
- $b(i)$: κόστος λειτουργ. μηχανής κατάστασης i . ($b(i) \uparrow$).
- r : επιπλέον κόστος αντικατάστασης.
- Αντικατάσταση $\Rightarrow$ Κατάσταση 0 την επόμενη μέρα.
- Όχι αντικατάσταση $\Rightarrow$ Πιθανότητα εξέλιξης κατάστασης μηχανής $i \rightarrow j$: $g_i(j)$, για $j \geq i$.
- T_i τ.μ. κατάστασης επόμενης μέρας, αν η τρέχουσα κατάστασή της είναι i .
- Συνήθης υπόθεση: T_i στοχαστικά αύξουσα ως προς i .

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Πολιτικές & Μοντελοποίηση

- Ο διαχειριστής ακολουθεί μια πολιτική κατωφλίου για την αντικατάσταση:
Αντικατάσταση $\Leftrightarrow$ Κατάσταση μηχανής $\geq n$.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους υπό αυτή την πολιτική=;
- Κατάσταση μηχανής υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι $n \rightarrow$ Μ.α.δ.χ. με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} g_i(j) & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j \geq i, \\ 1 & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Κατανομή ισορροπίας & Εξισώσεις

- Εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή $\pi(n) = (\pi_j(n))$:

$$\pi_0(n) = g_0(0)\pi_0(n) + \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i(n),$$

$$\pi_j(n) = \sum_{i=0}^j g_i(j)\pi_i(n), \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\pi_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(j)\pi_i(n), \quad j \geq n.$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Δομή και ρυθμός κόστους

- Δομή κόστους παραμονής: $c(i) = b(i)$, $i \geq 0$.
- Δομή κόστους μετάβασης: $d(i, j)$ με $d(i, 0) = r$ για $i \geq n$ και $d(i, j) = 0$, διαφορετικά.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) c(j) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_j(n) p_{jk} d(j, k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) b(j) + \sum_{j=n}^{\infty} r \pi_j(n). \end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Ειδική περίπτωση

- $b(i) = 1 - b^i$, όπου $b \in (0, 1)$.
- $g_i(i) = 1 - \alpha$,
 $g_i(i + 1) = \alpha$, και
 $g_i(j) = 0$, για $j \neq i, i + 1$.
- Τότε (υπό την πολιτική κατωφλίου) $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ και πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n - 1, \quad j = i, \\ \alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n - 1, \quad j = i + 1, \\ 1 & \text{αν } i = n, \quad j = 0. \end{cases}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Λύση ειδικής περίπτωσης I

- Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\pi_0(n) = \pi_n(n) + (1 - \alpha)\pi_0(n),$$

$$\pi_j(n) = \alpha\pi_{j-1}(n) + (1 - \alpha)\pi_j(n), \quad 1 \leq j \leq n - 1,$$

$$\pi_n(n) = \alpha\pi_{n-1}(n).$$

- Λύση:

$$\pi_j(n) = \frac{1}{n + \alpha}, \quad 0 \leq j \leq n - 1,$$

$$\pi_n(n) = \frac{\alpha}{n + \alpha}.$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Λύση ειδικής περίπτωσης II

- Δομή κόστους:
Κόστος παραμονής: $c(i) = 1 - b^i$, $0 \leq i \leq n$.
Κόστος μετάβασης: $d(i, j)$ με $d(n, 0) = r$ και $d(i, j) = 0$, διαφορετικά.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n :

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n + \alpha} (1 - b^j) + \frac{\alpha}{n + \alpha} (1 - b^n) + \frac{\alpha}{n + \alpha} r \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + n} (r - 1) + 1 + \frac{1 - b^n}{n + a} \left(\alpha - \frac{1}{1 - b} \right). \end{aligned}$$