

Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Ορισμός Μ.α.σ.χ.

- $\{X(t)\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου (Μ.α.σ.χ.) με χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$ αν
 - 1 $X(t) \in \mathcal{X}, t \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,
 - 2 $\Pr[X(t+s) = j | X(u), 0 \leq u < s, X(s) = i] = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i], t, s \geq 0, i, j \in \mathcal{X}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).
 - 3 Αν οι $\Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$ δεν εξαρτώνται από το t , η Μ.α.σ.χ. λέγεται ομογενής.
Τότε συμβολίζουμε:

$$p_{ij}(t) = \Pr[X(s+t) = j | X(s) = i].$$

- 4 Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετήσουμε μόνο ομογενείς Μ.α.σ.χ.

Βασικά στοιχεία Μ.α.σ.χ.

- Για να προσδιοριστεί μια Μ.α.σ.χ. $\{X(t)\}$ χρειαζόμαστε:

- 1 Αρχική κατανομή:

$$\mathbf{p}(0) = (p_i(0)), \text{ με } p_i(0) = \Pr[X(0) = i].$$

- 2 Πίνακα ρυθμών μετάβασης:

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}), \text{ με}$$

$$q_{ij} = p'_{ij}(0) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, \quad i, j \in \mathcal{X} \text{ με } i \neq j,$$

$$q_{ii} = -q_i = p'_{ii}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}, \quad i \in \mathcal{X}.$$

(q_{ij} : ρυθμός $i \rightarrow j$, q_i : ρυθμός εξόδου από την i)

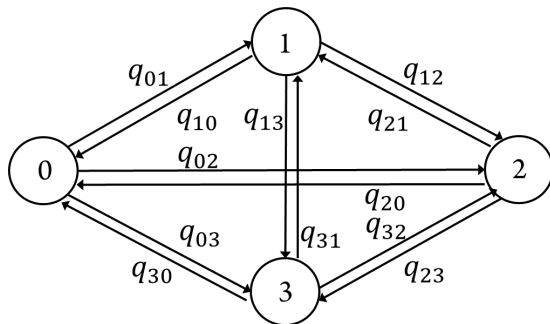
Πίνακας ρυθμών μετάβασης

- Γενική μορφή:

$$\mathbf{Q} = (p'_{ij}(0)) = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Μη-αρνητικά στοιχεία εκτός διαγωνίου.
- Μη-θετικά διαγώνια στοιχεία.

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης - Παράδειγμα



Σχήμα: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3\}$.

Χρόνοι παραμονής στις καταστάσεις Μ.α.σ.χ. I

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με πίνακα ρυθμών μετάβασης $Q = (q_{ij})$.
- Χρόνος παραμονής T_i σε μια κατάσταση i πριν από κάποια μετάβαση σε κατάσταση $j \neq i$ είναι εκθετικός με παράμετρο q_i .
- Αιτιολόγηση:

$$\begin{aligned}\Pr[T_i > t + h | T_i > t] &= \Pr[X(t + h) = i | X(t) = i] + o(h) \\ &= p_{ii}(h) + o(h) = 1 - q_i h + o(h), \\ &\quad h \rightarrow 0^+\end{aligned}$$

δεν εξαρτάται από το t , οπότε η T_i έχει την αμνήμονη ιδιότητα και άρα έχει εκθετική κατανομή.

Χρόνοι παραμονής στις καταστάσεις Μ.α.σ.χ. II

- $F_{T_i}(t)$: σ.χ., $f_{T_i}(t) = F'_{T_i}(t)$ σ.π.π. της T_i . Τότε:

$$\Pr[t < T_i \leq t + h | T_i > t] = q_i h + o(h), \quad h \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \frac{\Pr[t < T_i \leq t + h]}{\Pr[T_i > t]} = q_i h + o(h), \quad h \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[t < T_i \leq t + h]}{h \Pr[T_i > t]} = q_i$$

$$\Rightarrow \frac{f_{T_i}(t)}{1 - F_{T_i}(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}(1 - F_{T_i}(t))}{1 - F_{T_i}(t)} = q_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\log(1 - F_{T_i}(t))) = -q_i$$

- Άρα $F_{T_i}(t) = 1 - e^{-q_i t}$, $t \geq 0$, δηλαδή η T_i είναι $\text{Exp}(q_i)$.

Πιθανότητες μετάβασης Μ.α.σ.χ.

- Όταν η $\{X(t)\}$ φύγει από κάποια κατάσταση i , η επόμενη κατάσταση θα είναι η $j \neq i$ με πιθανότητα $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$.
- Αιτιολόγηση:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \Pr[X(t+h) = j | X(t) = i, X(t+h) \neq i] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[X(t) = i, X(t+h) = j]}{\Pr[X(t) = i, X(t+h) \neq i]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[X(t+h) = j | X(t) = i]}{\Pr[X(t+h) \neq i | X(t) = i]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{q_{ij}h + o(h)}{q_i h + o(h)} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Άλλοι ορισμοί Μ.α.σ.χ.

- Εναλλακτικός ορισμός I:

$$\{X(t)\} \text{ Μ.α.σ.χ.} \Leftrightarrow$$

Όντας σε μια κατάσταση i

① παραμένει εκεί για χρόνο $\text{Exp}(q_i)$,

② η επόμενη κατάσταση είναι η j με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

- Εναλλακτικός ορισμός II:

$$\{X(t)\} \text{ Μ.α.σ.χ.} \Leftrightarrow$$

Όντας σε μια κατάσταση i

① υπάρχουν χρόνοι T_{ik} για $k \in \mathcal{X} \setminus \{i\}$, όπου ο χρόνος T_{ik} έχει την κατανομή $\text{Exp}(q_{ik})$, $k \in \mathcal{X} \setminus \{i\}$,

② ο χρόνος της επόμενης μετάβασης είναι $\min_k T_{ik}$ και η κατάσταση j στην οποία πηγαίνει η $\{X(t)\}$ είναι αυτή για την οποία $T_{ij} = \min_k T_{ik}$.

Σχέση πίνακα ρυθμών και πιθανοτήτων μετάβασης

- Οι πιθανότητες μετάβασης είναι η λύση του συστήματος (προδρομικών) εξισώσεων Chapman - Kolmogorov:

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij},$$

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj}, \quad t \geq 0.$$

- Σε πίνακική μορφή:

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \quad t \geq 0.$$

- Άρα:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Επικοινωνία, περιοδικότητα, επαναληπτικότητα

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα ρυθμών $\mathbf{Q}$.
- $i \rightarrow j$ (j προσπελάσιμη από την i) $\Leftrightarrow \exists t \geq 0: p_{ij}(t) > 0$
 $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_{n-1}: q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} j} > 0$.
- Η περιοδικότητα δεν υπάρχει σαν έννοια λόγω του συνεχούς χρόνου.
- Η επικοινωνία, η επαναληπτικότητα (θετική και μηδενική) και η παροδικότητα ανάλογα με τον διακριτό χρόνο (ορισμοί και αποτελέσματα).

Χρόνοι απορρόφησης

- $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$.
- Ορίζουμε:

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathcal{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$,

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

την πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i , και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

τον μέσο χρόνο πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i .

Πιθανότητες πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$, με $h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i]$.
- Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned}x_i &= 1, \quad i \in \mathcal{C}, \\x_i &= \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j, \quad i \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$, με $m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X(0) = i]$.
- Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned}y_i &= 0, \quad i \in \mathcal{C}, \\y_i &= \frac{1}{q_i} + \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j, \quad i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}.\end{aligned}$$