

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Περιγραφή

- Παίκτης στοιχηματίζει για N γύρους.
- Σε κάθε γύρο μπορεί να στοιχηματίσει οποιοδήποτε κλάσμα της περιουσίας του.
- p : πιθανότητα να κερδίσει. $q = 1 - p$.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης τιμής κάποιας συνάρτησης της τελικής περιουσίας.
- Συνήθως, τέτοιου είδους συναρτήσεις υποτίθενται αύξουσες και κοίλες.
- Εδώ: Μεγιστοποίηση του λογαρίθμου.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: ο αριθμός N των συνολικών γύρων στοιχηματισμού.
- Στάδιο: Ο αριθμός n των υπόλοιπων γύρων στοιχημάτων.
- Κατάσταση: Η παρούσα περιουσία του παίκτη, x .
- Απόφαση: Το κλάσμα της περιουσίας, a , που θα στοιχηματίσει ο παίκτης.
- Δυναμική:

$$x \xrightarrow{a} \begin{cases} x - ax & \text{με πιθαν. } q, \\ x + ax & \text{με πιθαν. } p. \end{cases}$$

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$, ο μέγιστος αναμενόμενος λογάριθμος της τελικής περιουσίας του παίκτη, όταν αγωνίζεται με περιουσία x και μένουν n γύροι.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής υπολογίζεται αναδρομικά από τις

$$v_0(x) = \log x, \quad x > 0,$$

$$v_n(x) = \max_{a \in [0,1]} [pv_{n-1}(x(1+a)) + qv_{n-1}(x(1-a))],$$
$$x > 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 0$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = \log x, \quad x > 0,$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 1$

- Για $n = 1$, από την αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned}v_1(x) &= \max_{a \in [0,1]} [p \log(x(1+a)) + q \log(x(1-a))] \\&= \max_{a \in [0,1]} [p \log x + p \log(1+a) + q \log x + q \log(1-a)] \\&= \log x + \max_{a \in [0,1]} [p \log(1+a) + q \log(1-a)] \\&= \log x + \max_{a \in [0,1]} f(a), \quad x > 0,\end{aligned}$$

με

$$f(a) = p \log(1+a) + q \log(1-a).$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 1$ (συνέχεια)

- Πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την

$$f(a) = p \log(1 + a) + q \log(1 - a)$$

για $a \in [0, 1)$.

- Έχουμε

$$\frac{df(a)}{da} = \frac{p}{1+a} - \frac{q}{1-a} = \frac{p - q - a}{1 - a^2}.$$

- Είναι

$$\frac{df(a)}{da} = \begin{cases} + & a < p - q, \\ 0 & a = p - q, \\ - & a > p - q. \end{cases}$$

- Άρα το $\max$ της $f(a)$ πιάνεται στο $p - q$, αν $p \geq q$, και στο 0 διαφορετικά.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Περίπτωση 1: $p < q \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$.
- Για $n = 1$:

$$a_1^*(x) = 0, \quad v_1(x) = \log x + f(0) = \log x, x > 0.$$

- Για $n = 2$, επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής:

$$a_2^*(x) = 0, \quad v_2(x) = \log x, x > 0.$$

- Επαγωγικά: Για $n = 1, 2, \dots$:

$$a_n^*(x) = 0, \quad v_n(x) = \log x, x > 0.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής (συνέχεια)

- Περίπτωση 2: $p \geq q \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$.
- Για $n = 1$:

$$a_1^*(x) = p - q, \quad v_1(x) = \log x + \underbrace{f(p - q)}_c = \log x + c, \quad x > 0.$$

- Για $n = 2$, επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής:

$$a_2^*(x) = p - q, \quad v_2(x) = \log x + 2c, \quad x > 0.$$

- Επαγωγικά: Για $n = 1, 2, \dots$:

$$a_n^*(x) = p - q, \quad v_n(x) = \log x + nc, \quad x > 0.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Βέλτιστη πολιτική

- Έχουμε:

$$\begin{aligned}c &= f(p - q) = p \log(1 + p - q) + q \log(1 - p + q) \\&= p \log(2p) + q \log(2q) \\&= \log 2 + p \log p + q \log q.\end{aligned}$$

- $p \leq q$ (στοίχημα εις βάρος του παίκτη ή δίκαιο) $\rightarrow$ βέλτιστη πολιτική: να μην στοιχηματίζει σε κανέναν γύρο. $v_n(x) = \log x$.
- $p > q$ (ευνοϊκό στοίχημα) $\rightarrow$ βέλτιστη πολιτική: να στοιχηματίζει κλάσμα $p - q$ της περιουσίας του σε κάθε γύρο. $v_n(x) = \log x + nc$.
- Η βέλτιστη πολιτική είναι στάσιμη προσδιοριστική και μάλιστα η βέλτιστη απόφαση είναι η ίδια ανεξάρτητα κατάστασης.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Περιγραφή

- Μηχανή επιθεωρείται στην αρχή κάθε περιόδου.
- Χρονικός ορίζοντας: Πλήθος περιόδων N .
- Στάδιο: Χρόνος n που απομένει μέχρι τη λήξη της αναγκαιότητας χρήσης.
- Κατάσταση: Ηλικία x .
- Απόφαση: Συντήρηση (Σ) ή Αντικατάσταση (A).
- Αντικατάσταση $\rightarrow$ την επόμενη μέρα καινούργιο (ηλικία 0) και θα αποφέρει κέρδος (αφαιρώντας το κόστος αντικατάστασης) λ .
- Συντήρηση $\rightarrow$ την επόμενη μέρα ηλικίας $x + 1$ ή καινούργιο (ηλικία 0) και θα αποφέρει κέρδος $h(x)$ ή γ , με πιθανότητες $1 - q_x$ και q_x .

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Περιγραφή

- Δυναμική:

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{A} 0 \\ x &\xrightarrow{\Sigma} \begin{cases} 0 & \text{με πιθαν. } q_x, \\ x+1 & \text{με πιθαν. } 1-q_x. \end{cases} \end{aligned}$$

- Άμεση αμοιβή:
 $r(x, A) = \lambda,$
 $r(x, \Sigma) = q_x \gamma + (1 - q_x) h(x).$
- Τερματικό κέρδος:
 $r(x).$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Παράμετροι και υποθέσεις

- k :
Μέγιστη επιτρεπόμενη ηλικία μηχανήματος.
- $\gamma < \lambda < h(x)$:
Κόστος επείγουσας αντικατάστασης μεγαλύτερο από το κόστος προληπτικής αντικατάστασης, που είναι μεγαλύτερο από το κόστος συντήρησης της μηχανής.
- $q_x \uparrow x$:
Η πιθανότητα βλάβης αυξάνει με την ηλικία.
- $h(x) \downarrow x$: Το κόστος συντήρησης αυξάνει με την ηλικία.
- $r(x) \downarrow x$:
Η αξία πώλησης στο τέλος του χρονικού ορίζοντα μειώνεται με την ηλικία.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη μέση συνολική αμοιβή για n περιόδους, $v_n(x)$, ξεκινώντας με μηχανήμα ηλικίας x .
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$v_0(x) = r(x),$$

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \max[(1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x + 1)) + q_x v_{n-1}(0), \\ &\quad \lambda + v_{n-1}(0)] \\ &= \lambda + v_{n-1}(0) \\ &\quad + \max[\underbrace{(1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x + 1) - v_{n-1}(0))}_{u_n(x)} - \lambda, 0] \\ &= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0]. \end{aligned}$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Εξισώσεις βελτιστοποίησης και εικασία

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned}v_0(x) &= r(x), \\v_n(x) &= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0],\end{aligned}$$

με

$$u_n(x) = (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda.$$

- Εικασία:

Για μεγάλα x , η A προτιμότερη: $v_n(x) = \lambda + v_{n-1}(0)$.

Για μικρά x , η Σ προτιμότερη: $v_n(x) > \lambda + v_{n-1}(0)$.

- Ικανή συνθήκη για απόδειξη εικασίας:

$$v_n(x) \downarrow x.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$

- Πρόταση: $v_n(x) \downarrow x$, για κάθε $n \geq 0$.
- Απόδειξη με επαγωγή στο n .
- Για $n = 0$, $v_0(x) = r(x) \downarrow x$.
- Έστω ότι η $v_{n-1}(x) \downarrow x$. Θα δείξουμε ότι και $v_n(x) \downarrow x$.
- Είναι

$$v_n(x) = \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0],$$

οπότε

$$v_n(x-1) - v_n(x) = \max[u_n(x-1), 0] - \max[u_n(x), 0].$$

- Θα διακρίνουμε 4 περιπτώσεις, ανάλογα με τα πρόσημα των $u_n(x-1)$ και $u_n(x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 1

- $u_n(x) \geq 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Έχουμε $(h(x) \downarrow x, v_{n-1}(x) \downarrow x)$:

$$\begin{aligned}
 & v_n(x-1) - v_n(x) \\
 = & u_n(x-1) - u_n(x) \\
 = & (1 - q_{x-1})(h(x-1) + v_{n-1}(x) - v_{n-1}(0)) \\
 & - (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
 \geq & (1 - q_{x-1})(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
 & - (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
 = & (q_x - q_{x-1})(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
 = & \underbrace{(q_x - q_{x-1})}_{\geq 0} \frac{\lambda + u_n(x)}{1 - q_x} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $u_n(x)$ - Περίπτωση 2

- $u_n(x) \geq 0$ και $u_n(x-1) < 0$.
- Η περίπτωση αυτή δεν μπορεί να ισχύει αφού η $u_n(x)$ είναι φθίνουσα:

$$u_n(x) = (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda$$

$(1 - q_x, h(x)$ και $v_{n-1}(x)$ είναι $\downarrow x$).

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 3

- $u_n(x) < 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$v_n(x-1) - v_n(x) = u_n(x-1) \geq 0.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 4

- $u_n(x) < 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$v_n(x-1) - v_n(x) = 0.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Βέλτιστη πολιτική

- Για κάθε στάδιο n , υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός (κατώφλι) c_n , τέτοιος ώστε η βέλτιστη πολιτική να υπαγορεύει να συντηρείται η μηχανή όταν $x \in \{0, 1, 2, \dots, c_n\}$ και να αντικαθίσταται αν $x \in \{c_n + 1, c_n + 2, \dots, k\}$.
- Ο αριθμός αυτός δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}c_n &= \max\{x : u_n(x) \geq 0\}. \\ &= \max\{x : (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \geq \lambda\}.\end{aligned}$$