

Επιχείρημα ανταλλαγής

- Επιχείρημα της ανταλλαγής $\rightarrow$ Απλοποίηση λύσεων δυναμικού προγραμματισμού όπου υπάρχει ένα συγκεκριμένο σύνολο αποφάσεων που πρέπει να ληφθούν και το ερώτημα είναι η βέλτιστη διάταξή τους.
- Χρονικός ορίζοντας: Αριθμός αποφάσεων N που θα ληφθούν συνολικά.
- Στάδιο: Αριθμός αποφάσεων n που μένει να ληφθούν.
- Κατάσταση: Σύνολο διαθέσιμων αποφάσεων $\mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ με $|\mathcal{S}| = n$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Περιγραφή

- N εργασίες προς διεκπεραίωση.
- $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots x_N$, οι χρόνοι επεξεργασίας των εργασιών.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μοντελοποίηση ως π.μ-γ.π.

- Σειρά διεκπεραίωσης $i_1, i_2, \dots, i_N \rightarrow$ Συνολικός χρόνος αναμονής

$$Nx_{i_1} + (N-1)x_{i_2} + \dots + 2x_{i_{N-1}} + x_{i_N}.$$

- Πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \sum_{k=1}^N (N-k+1)x_{i_k},$$

όπου η εφικτή περιοχή περιέχει όλες τις δυνατές μεταθέσεις του συνόλου $\{1, 2, \dots, N\}$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μοντελοποίηση ως π.δ.π.

- Χρονικός ορίζοντας: Ο αριθμός όλων των εργασιών, προς διεκπεραίωση, N .
- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n , που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathcal{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Απόφαση: Η εργασία, i , που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το ελάχιστο άθροισμα των χρόνων παραμονής των εργασιών, $v_n(\mathcal{S})$, του $\mathcal{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- $v_n(\mathcal{S})$: η ελάχιστη συνολική αναμονή για τις n εργασίες του $\mathcal{S}$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned}v_0(\emptyset) &= 0, \\v_n(\mathcal{S}) &= \min_{i \in \mathcal{S}} [nx_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\})], \\ \mathcal{S} &\subseteq \{1, 2, \dots, N\}, \quad |\mathcal{S}| = n, \quad n = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Υπολογισμός $v_n(\mathcal{S})$, $n = 0, 1, 2$

- Για $n = 0, 1, 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}v_0(\emptyset) &= 0, \\v_1(\{i\}) &= x_i + v_0(\emptyset) = x_i, \quad \{i\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, \\v_2(\{i, j\}) &= \min[2x_i + v_1(\{j\}), 2x_j + v_1(\{i\})] \\&= \min[2x_i + x_j, 2x_j + x_i] \\&= x_i + x_j + \min[x_i, x_j] = 2x_i + x_j, \\&\quad \text{αν } x_i \leq x_j, \quad \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}.\end{aligned}$$

- Χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη των x_i και x_j για να προσδιορίσουμε την $v_2(\{i, j\})$.
- Είναι φανερό ότι αυτό θα χρειάζεται και παρακάτω.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Υπολογισμός $v_n(\mathcal{S})$, $n = 3$

- Για $n = 3$, για τον υπολογισμό της $v_3(\{i, j, k\})$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τη διάταξη των x_i , x_j και x_k
- Υποθέτουμε μια τέτοια διάταξη, έστω $x_i \leq x_j \leq x_k$.
- Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} & v_3(\{i, j, k\}) \\ &= \min[3x_i + v_2(\{j, k\}), 3x_j + v_2(\{i, k\}), 3x_k + v_2(\{i, j\})] \\ &= \min[3x_i + 2x_j + x_k, 3x_j + 2x_i + x_k, 3x_k + 2x_i + x_j] \\ &= 3x_i + 2x_j + x_k, \\ & \text{αν } x_i \leq x_j \leq x_k, \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

- Βέλτιστη σειρά εκτέλεσης των εργασιών $\rightarrow$ Διάταξη τους κατά αύξουσα σειρά των χρόνων εκτέλεσής τους.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$\begin{aligned}
 v_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) \\
 &= nx_{i_1} + (n-1)x_{i_2} + (n-2)x_{i_3} + \dots + x_{i_n}, \\
 &\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \\
 &\text{με } x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \dots x_{i_n}.
 \end{aligned}$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$\begin{aligned}
 a_n^*(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) &= i_1, \\
 \{i_1, i_2, \dots, i_n\} &\subseteq \{1, 2, \dots, N\} \\
 \text{με } x_{i_1} &\leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \dots x_{i_n}.
 \end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n .
- Για $n = 0, 1$ έχει ήδη αποδειχθεί.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε:

$$\begin{aligned}
 & v_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) \\
 = & \min[nx_{i_1} + v_{n-1}(\{i_2, i_3, \dots, i_n\}), \\
 & \quad nx_{i_2} + v_{n-1}(\{i_1, i_3, \dots, i_n\}), \dots \\
 & \quad nx_{i_n} + v_{n-1}(\{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}\})] \\
 = & \min[nx_{i_1} + (n-1)x_{i_2} + (n-2)x_{i_3} + \dots + x_{i_n}, \\
 & \quad nx_{i_2} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_3} + \dots + x_{i_n}, \dots \\
 & \quad nx_{i_n} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \dots + x_{i_{n-1}}].
 \end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συν)

- Ποσότητα που αντιστοιχεί στην επιλογή της εργασίας i_k για επόμενη διεκπεραίωση:

$$\begin{aligned}
 & nx_{i_k} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \cdots + (n-k+1)x_{i_{k-1}} \\
 & \quad + (n-k)x_{i_{k+1}} + \cdots + x_{i_n} \\
 = & \quad nx_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-1} (n-j)x_{i_j} + \sum_{j=k+1}^n (n-j+1)x_{i_j} \\
 = & \quad \sum_{j=1}^n (n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^n x_{i_j}.
 \end{aligned}$$

- Αρκεί να δείξουμε ότι το ελάχιστο της παράστασης αυτής επιτυγχάνεται για $k=1$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συν)

- Αν πάρουμε τη διαφορά της παράστασης για ένα τυχόν k και για $k = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\sum_{j=1}^n (n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^n x_{i_j}}_{\text{για τυχόν } k} \\
 & - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n (n-j)x_{i_j} + x_{i_1} + \sum_{j=2}^n x_{i_j} \right)}_{\text{για } k=1} \\
 & = \sum_{j=1}^k (x_{i_k} - x_{i_j}) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής

- Επιχείρημα ανταλλαγής:
Εφαρμόσιμο όταν το ζητούμενο δεν είναι το ποιες αποφάσεις να πάρουμε, αλλά υπάρχει ένα σύνολο αποφάσεων που πρέπει να διατάξουμε βέλτιστα.
- Ιδέα:
Όντας σε μια κατάσταση, συγκρίνουμε για οποιεσδήποτε δυο διαθέσιμες αποφάσεις a και a' τα συνολικά κόστη αν χρησιμοποιήσουμε για τα επόμενα δύο στάδια πρώτα την a και μετά την a' ή πρώτα την a' και μετά την a , και μετά συνεχίσουμε βέλτιστα.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Εφαρμόζω την εξίσωση βελτιστοποίησης για δυο στάδια:

$$\begin{aligned}v_n(\mathcal{S}) &= \min_{i \in \mathcal{S}} [nx_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\})] \\&= \min_{i \in \mathcal{S}} \min_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} [nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\})].\end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Για δοθέντα $i, j \in \mathcal{S}$, το συνολικό κόστος αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι

$$nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$

ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι

$$nx_j + (n-1)x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$

με διαφορά $x_i - x_j$.

- Επομένως, είναι προτιμώτερο να πάρουμε πρώτα την απόφαση i αν $x_i - x_j \leq 0$, δηλαδή αν $x_i \leq x_j$.
- Άρα, σε μια κατάσταση $\mathcal{S}$, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathcal{S}$ είναι καλύτερο να διαλέξουμε την εργασία με τον μικρότερο χρόνο διεκπεραίωσης.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Περιγραφή

- Μηχανή πρόκειται να επεξεργαστεί ακολουθιακά N εργασίες, $1, 2, \dots, N$.
- Πιθανότητα επιτυχούς περαίωσης εργασίας i : p_i .
- Αμοιβή επιτυχούς διεκπεραίωσης εργασίας i : x_i .
- Βλάβη κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας μιας εργασίας $\rightarrow$ όχι αμοιβή, όχι διεκπεραίωση υπόλοιπων.
- Στόχος: Προγραμματισμός σειράς εκτέλεσης των εργασιών που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική αμοιβή μέχρι την εμφάνιση βλάβης.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Μοντελοποίηση

- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n , που απομένουν προς επεξεργασία.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathcal{S}$, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Απόφαση: Η εργασία, i , που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο άθροισμα αμοιβών, $v_n(\mathcal{S})$, από τις εργασίες του $\mathcal{S}$, μέχρι την εμφάνιση βλάβης, δεδομένου ότι αυτή δεν έχει συμβεί ακόμη.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$v_0(\emptyset) = 0,$$

$$v_n(\mathcal{S}) = \max_{i \in \mathcal{S}} [p_i(x_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\}))], \quad |\mathcal{S}| = n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής

- Χρησιμοποιώντας δυο φορές την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$v_n(\mathcal{S}) = \max_{i \in \mathcal{S}} \max_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} [p_i(x_i + p_j(x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\})))].$$

- Για δοθέντα $i, j \in \mathcal{S}$, η αναμενόμενη συνολική αμοιβή αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι

$$p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$

ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι

$$p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}).$$

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Πρώτα την i και μετά την j είναι προτιμώτερο $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}) \\ \geq p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}) \\ \Leftrightarrow \frac{p_i x_i}{1 - p_i} \geq \frac{p_j x_j}{1 - p_j}. \end{aligned}$$

- Επομένως, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathcal{S}$ είναι καλύτερο να διεκπεραιώσουμε την εργασία i που έχει το μεγαλύτερο λόγο $\frac{p_i x_i}{1 - p_i}$.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Βέλτιστη πολιτική

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$\begin{aligned}
 & v_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) \\
 &= p_{i_1}x_{i_1} + p_{i_1}p_{i_2}x_{i_2} + p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}x_{i_3} + \dots + p_{i_1}p_{i_2} \dots p_{i_n}x_{i_n}, \\
 & \quad \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \\
 & \quad \mu\epsilon \frac{p_{i_1}x_{i_1}}{1 - p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2}x_{i_2}}{1 - p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3}x_{i_3}}{1 - p_{i_3}} \geq \dots \geq \frac{p_{i_n}x_{i_n}}{1 - p_{i_n}}.
 \end{aligned}$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$\begin{aligned}
 & a_n^*(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = i_1, \\
 & \quad \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \\
 & \quad \mu\epsilon \frac{p_{i_1}x_{i_1}}{1 - p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2}x_{i_2}}{1 - p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3}x_{i_3}}{1 - p_{i_3}} \geq \dots \geq \frac{p_{i_n}x_{i_n}}{1 - p_{i_n}}.
 \end{aligned}$$

Προβλήματα βέλτιστης διακοπής

- Στα προβλήματα αυτά υπάρχει μια διαδικασία σε εξέλιξη και σε κάθε στάδιο υπάρχουν δύο αποφάσεις:
 - ① Συνέχιση της διαδικασίας.
 - ② Διακοπή της διαδικασίας.
- Το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής αμοιβής από την εξέλιξη της διαδικασίας.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Περιγραφή

- Είναι γνωστό και ως μοντέλο Cayley-Moser.
- Ένα περιουσιακό στοιχείο προς πώληση.
- N περίοδοι-ευκαιρίες πώλησης.
- Σε κάθε περίοδο έρχεται μία προσφορά.
- Τιμές προσφοράς στις διάφορες περιόδους ανεξ. ισον. με σ.κ. $F(y)$, με αναμενόμενη τιμή μ .
- Σε κάθε περίοδο γίνεται γνωστή η τρέχουσα προσφορά και κατόπιν αποφασίζεται αν θα γίνει πώληση ή όχι.
- Προηγούμενες προσφορές είναι μη-ανακλησίμες.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης τιμής πώλησης.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: Ο αριθμός των περιόδων/ευκαιριών, N .
- Στάδιο: Ο αριθμός των προσφορών, n , που απομένουν μέχρι το τέλος του χρονικού ορίζοντα.
- Κατάσταση: Η τρέχουσα προσφορά, x .
- Απόφαση : Η αποδοχή ή η απόρριψη της προσφοράς.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση, $v_n(x)$, αν η τρέχουσα προσφορά είναι x και απομένουν n προσφορές (συμπεριλαμβανομένης της τρέχουσας).

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned}v_0(x) &= 0, \quad x \geq 0, \\v_n(x) &= \max \left[x, \int_0^\infty v_{n-1}(y) dF(y) \right], \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, αρχική συνθήκη $\Rightarrow$

$$v_0(x) = 0, \quad x \geq 0,$$

- Για $n = 1$, εξίσωση βελτιστοποίησης $\Rightarrow$

$$v_1(x) = \max [x, 0] = x, \quad x \geq 0.$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 2$

- Για $n = 2$ έχουμε

$$v_2(x) = \max \left[x, \underbrace{\int_0^\infty y dF(y)}_{E[v_1(Y)] = a_2} \right], \quad x \geq 0.$$

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_0^\infty y dF(y) = \mu, \\ v_2(x) &= \begin{cases} a_2, & \text{αν } x \leq a_2, \\ x, & \text{αν } x \geq a_2, \end{cases} \\ a_2^*(x) &= \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς,} & \text{αν } x \leq a_2, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς,} & \text{αν } x \geq a_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 3$

- Για $n = 3$ έχουμε

$$v_3(x) = \max \left[x, \underbrace{\int_0^{\infty} v_2(y) dF(y)}_{a_3} \right], \quad x \geq 0.$$

- Έχουμε:

$$a_3 = E[v_2(Y)] = \int_0^{a_2} a_2 dF(y) + \int_{a_2}^{\infty} y dF(y),$$

$$v_3(x) = \begin{cases} a_3, & \text{αν } x \leq a_3, \\ x, & \text{αν } x \geq a_3, \end{cases}$$

$$a_3^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς,} & \text{αν } x \leq a_3, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς,} & \text{αν } x \geq a_3. \end{cases}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Έστω η ακολουθία

$$a_1 = 0,$$

$$a_n = \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} y dF(y), \quad n = 2, 3, \dots$$

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$v_n(x) = \max[x, a_n], \quad x \geq 0.$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$a_n^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς,} & \text{αν } x \leq a_n, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς,} & \text{αν } x \geq a_n. \end{cases}$$

- Η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Επαγωγή στο n . Για $n = 0, 1$ έχει δειχθεί.
- Αν ισχύει για $n - 1$, τότε

$$v_n(x) = \max \left[x, \underbrace{\int_0^\infty v_{n-1}(y) dF(y)}_{a_n} \right], \quad x \geq 0.$$

$$a_n = E[v_{n-1}(Y)] = \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^\infty y dF(y),$$

$$v_n(x) = \begin{cases} a_n, & \text{αν } x \leq a_n, \\ x, & \text{αν } x \geq a_n, \end{cases}$$

$$a_n^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς,} & \text{αν } x \leq a_n, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς,} & \text{αν } x \geq a_n. \end{cases}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συνέχεια)

- Για τη μονοτονία της a_n έχουμε:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} y dF(y) \\ &\geq \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} a_{n-1} dF(y) = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Προβλήματα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Γενικεύσεις

- Πολλά περιουσιακά στοιχεία.
- Παραπάνω από μια ευκαιρία (μερική ανάκληση προσφορών).
- Διαφορετικές κατανομές των προσφορών για διαφορετικές περιόδους.
- Μαρκοβιανή εξάρτηση των προσφορών.