

Στοχαστικά Μοντέλα  
στην Επιχειρησιακή Έρευνα  
Μέρος 4  
Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Αντώνης Οικονόμου

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών  
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

22/11/2022-

# Εισαγωγή στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

# Η έννοια του αποθέματος

- Απόθεμα  
= Ποσότητα ενός αγαθού που αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση.



Σχήμα: Απόθεμα

# Πλεονεκτήματα αποθεμάτων

- Οικονομίες κλίμακας: Το μέσο κόστος ανά προϊόν είναι συνήθως φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας.
- Εξομάλυνση παραγωγής: Όταν υπάρχουν έντονες εποχιακές διακυμάνσεις, είναι βολικό η παραγωγή να γίνεται σταδιακά σε όλη τη διάρκεια του χρόνου.
- Αντιμετώπιση αβεβαιότητας: Η ύπαρξη αβεβαιότητας στη ζήτηση ή στην προσφορά μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητες ελλείψεις.
- Διακυμάνσεις στα κόστη: Τα κόστη παραγωγής και πρώτων υλών μπορούν να επιφέρουν άμεση αναπροσαρμογή τιμών των προϊόντων.

# Μειονεκτήματα αποθεμάτων

- Κόστη δημιουργίας/ενοικίασης αποθηκευτικών χώρων.
- Λειτουργικά κόστη αποθηκών.
- Απώλειες προϊόντων λόγω φθοράς, απαξίωσης.
- Κόστος δεσμευμένου κεφαλαίου.

# Κατηγορίες προβλημάτων διαχείρισης αποθεμάτων

- Ως προς την παρακολούθηση του αποθέματος:
  - Συνεχούς παρακολούθησης.
  - Περιοδικής παρακολούθησης (επιθεώρησης).
- Ως προς την αβεβαιότητα:
  - Ντετερμινιστικά.
  - Στοχαστικά.
- Ως προς τη δομή του συστήματος παραγωγής/αποθήκευσης:
  - Απλά συστήματα.
  - Σειριακά συστήματα.
  - Γενικά συστήματα.
- Ως προς τις ελλείψεις:
  - Όταν υπάρχουν ελλείψεις, αυτές καταγράφονται σε εκκρεμότητα (backlog) και ικανοποιούνται όταν αναπληρωθεί το απόθεμα.
  - Όταν υπάρχουν ελλείψεις, αυτές χάνονται.

# Το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας

- Γνωστό ως EOQ model (Economic Order Quantity model).
- Ντετερμινιστικό μοντέλο.
- Απλό μοντέλο με εφαρμογές για προϊόντα μαζικής κατανάλωσης και μεγάλου όγκου πωλήσεων.
- Η ζήτηση δεν παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις.
- Εστιάζει στην αλληλεπίδραση δυο παραγόντων: οικονομιών κλίμακας και κόστους αποθήκευσης.

# Το ΕΟQ μοντέλο: Περιγραφή

- Μοντέλο συνεχούς παρακολούθησης (επιθεώρησης).
- Ζήτηση γνωστή και σταθερή.
- Το προϊόν αγοράζεται και πωλείται σε συνεχείς ποσότητες.
- Οι παραγγελίες μπορούν να γίνουν οποτεδήποτε και σε οποιαδήποτε ποσότητα, μη μηδενικό χρόνο παράδοσης.
- Στο βασικό μοντέλο, οι ελλείψεις δεν επιτρέπονται, καθώς η ζήτηση είναι γνωστή και μπορούν να αποφευχθούν εκτός κι αν είναι επιθυμητές.

# Το ΕΟQ μοντέλο: Παράμετροι - Αποφάσεις - Αντικειμενική συνάρτηση

- Παράμετροι:
  - $a$ : Ρυθμός ζήτησης (ζήτηση ανά μονάδα χρόνου).
  - $K$ : Πάγιο κόστος ανά παραγγελία.
  - $c$ : Κόστος ανά κομμάτι παραγγελίας.
  - $h$ : Κόστος αποθήκευσης ανά κομμάτι και χρονική μονάδα.
- Αποφάσεις:
  - $Q$ : Ποσότητα παραγγελίας.
  - Αφού η παράδοση των παραγγελιών είναι άμεση, οι παραγγελίες τίθενται όταν τελειώσει το απόθεμα.
- Στόχος:
  - Ελαχιστοποίηση μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

# Το ΕΟQ μοντέλο: Ανάλυση

- Κάθε φορά που γίνεται παραγγελία το σύστημα βρίσκεται στην ίδια ακριβώς στην ίδια κατάσταση (μηδενικό απόθεμα, άπειρος ορίζοντας, σταθερός ρυθμός ζήτησης και σταθερά κόστη)  $\rightarrow$  Στάσιμη πολιτική.
- Ποσότητα παραγγελίας  $Q$ , κάθε φορά που μηδενίζεται το απόθεμα.
- Διάστημα μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών  $T = Q/a$ .
- Ύψος αποθέματος  $t$  χρονικές μονάδες μετά την παραλαβή της τελευταίας παραγγελίας:  $Q - at$ ,  $t \in [0, \frac{Q}{a})$ .
- Συνολικό κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$K + cQ + h \int_0^{Q/a} (Q - at) dt = K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}.$$

# Το ΕΟQ μοντέλο: Ανάλυση (συνέχεια)

- Μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα:

$$C(Q) = \frac{K + cQ + hQ^2/(2a)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}.$$

- Η  $C(Q)$  είναι κυρτή ως προς  $Q$  και ελαχιστοποιείται όταν  $C'(Q) = 0 \rightarrow$  Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

(ποσότητα οικονομικής ποσότητας παραγγελίας).

- Διάστημα μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών, ελάχιστη τιμή κόστους:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}, \quad C^* = C(Q^*) = \sqrt{2aKh}.$$

# Το ΕΟQ μοντέλο με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης

- Εδώ ο χρόνος παράδοσης είναι μη-μηδενικός, ντετερμινιστικός, ίσος με  $L$ .
- Οι άλλες υποθέσεις του ΕΟQ μοντέλου ισχύουν.
- Βασική διαφορά με κλασικό ΕΟQ: Οι στιγμές παραγγελίας και άφιξης νέων ποσοτήτων δεν συμπίπτουν.
- Οι παραγγελίες πρέπει να γίνονται ώστε οι αφίξεις ποσοτήτων να γίνονται μόνο σε στιγμές μηδενισμού αποθέματος.
- Ζήτηση με ρυθμό  $a \rightarrow$  Ποσότητα που θα πωληθεί κατά τη διάρκεια του  $L$  είναι  $R = aL$ .
- Επομένως, η παραγγελία πρέπει να γίνει όταν το επίπεδο αποθέματος είναι  $R$  (σημείο αναπαραγγελίας - reorder point).

# Το ΕΟQ μοντέλο με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης - βέλτιστη πολιτική

- Η βέλτιστη πολιτική υπαγορεύει:  
Όταν η στάθμη του αποθέματος πέσει στο επίπεδο

$$R = aL$$

τότε γίνεται παραγγελία

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}.$$

- (πολιτική τύπου  $(R, Q)$ ).
- Οι πολιτικές τύπου  $(R, Q)$  χρησιμοποιούνται σε γενικότερα προβλήματα ελέγχου αποθεμάτων υπό αβεβαιότητα.
  - Εδώ οι παράμετροι  $R$  και  $Q$  υπολογίζονται ανεξάρτητα, αλλά αυτό δεν συμβαίνει σε γενικότερα προβλήματα.

# Το ΕΟQ μοντέλο με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης - βέλτιστη πολιτική

- Η πολιτική που περιγράψαμε εφαρμόζεται όταν  $R \leq Q^*$ .
- Γενικά, έχοντας υπολογίσει το  $Q^*$  και το αντίστοιχο μήκος κύκλου  $T^* = Q^*/a$ , το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας είναι

$$R = a \left( L - T^* \left\lfloor \frac{L}{T^*} \right\rfloor \right) = aL - Q^* \left\lfloor \frac{aL}{Q^*} \right\rfloor.$$

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις

- Θεωρούμε το βασικό ΕΟQ μοντέλο με  $L = 0$ .
- Μια από τις υποθέσεις του μοντέλου είναι ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις.
- Αυτό είναι εφικτό λόγω της ντετερμινιστικής ζήτησης και των άμεσων παραλαβών.
- Είναι όμως πιθανό σε κάποιες εφαρμογές να είναι επιθυμητό ένα μέρος της ζήτησης να ικανοποιείται όχι άμεσα αλλά από επόμενες παραγγελίες (εκκρεμότητες backlog).

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις

- Παράμετροι:
  - $a, K, c, h$ : Παράμετροι όπως στο βασικό ΕΟQ μοντέλο.
  - $p$ : Κόστος έλλειψης ανά κομμάτι και χρονική μονάδα για τις παραγγελίες σε εκκρεμότητα.
- Αποφάσεις:
  - $Q$ : Ποσότητα παραγγελίας.
  - $x$ : Ποσοστό ζήτησης που ικανοποιείται άμεσα χωρίς να μπαίνει σε εκκρεμότητα.
- Στόχος:
  - Ελαχιστοποίηση μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Στη διάρκεια ενός διαστήματος στο οποίο η συνολική ζήτηση είναι  $Q$ , οι ποσότητες που ικανοποιούνται άμεσα και μέσω εκκρεμοτήτων είναι αντίστοιχα

$$S = Qx, \quad B = Q(1 - x).$$

- Η πολιτική υλοποιείται ως εξής:
  - Όταν μηδενιστεί το απόθεμα η εισερχόμενη ζήτηση μπαίνει σε εκκρεμότητα.
  - Όταν οι εκκρεμότητες (backlog) φθάσουν σε επίπεδο  $B$  γίνεται παραγγελία ύψους  $Q$  που παραδίδεται αμέσως.
  - $B$  μονάδες ικανοποιούν αμέσως στους πελάτες σε εκκρεμότητα.
  - $S$  μονάδες αποθηκεύονται.

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Διάστημα μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών  $T = Q/a$
- Διάστημα ικανοποίησης ζήτησης από το απόθεμα  $S/a$ .
- Διάστημα που η ζήτηση τίθεται σε εκκρεμότητα  $B/a$
- Το απόθεμα μειώνεται γραμμικά στο πρώτο διάστημα και το backlog αυξάνεται γραμμικά στο δεύτερο.

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$h \int_0^{S/a} (S-at) dt = h \left( S \frac{S}{a} - a \frac{(S/a)^2}{2} \right) = \frac{hS^2}{2a} = \frac{hQ^2x^2}{2a}.$$

- Κόστος έλλειψης σε έναν κύκλο:

$$p \int_0^{B/a} at dt = pa \frac{B^2}{2a^2} = \frac{pB^2}{2a} = \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}.$$

- Συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}.$$

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Ανάλυση

- Μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου:

$$C(Q, x) = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g(x)Q}{2},$$

όπου

$$g(x) = hx^2 + p(1-x)^2.$$

- Για  $x = 1$  έχουμε  $g(1) = h$  και επομένως η  $C(Q, 1)$  είναι η συνάρτηση κόστους στο μοντέλο χωρίς ελλείψεις.
- Για κάθε  $Q$ , η  $C(Q, x)$  ελαχιστοποιείται ως προς  $x$  όταν ελαχιστοποιείται η  $g(x)$ .

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις

- Έχουμε  $g(x) = hx^2 + p(1-x)^2$ , οπότε  $g'(x) = 0$  δίνει:
  - Βέλτιστη τιμή του  $x$ :

$$x^* = \frac{p}{h+p}.$$

- Ελάχιστη τιμή της  $g(x)$ :

$$g^* = g(x^*) = \frac{hp}{h+p}.$$

- Αντικαθιστώντας την  $g(x)$  με τη βέλτιστη τιμή  $g^*$  στη συνάρτηση κόστους, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$\tilde{C}(Q) = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g^*Q}{2}.$$

- Αυτή είναι η συνάρτηση μέσου κόστους στο κλασικό ΕΟQ μοντέλο με μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης  $g^*$ .

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Βέλτιστη πολιτική

- Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{g^*}} = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

- Διάρκεια κύκλου υπό τη βέλτιστη πολιτική:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{2K}{ah} \sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

- Μέγιστη τιμή αποθέματος, backlog:

$$S^* = Q^* x^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}}, \quad B^* = Q^* (1-x^*) = \sqrt{\frac{2aK}{p}} \sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

# Το ΕΟQ μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις: Παρατηρήσεις - συμπεράσματα

- Ελάχιστη τιμή κόστους ανά μονάδα χρόνου

$$C^* = C(Q^*, x^*) = \tilde{C}(Q^*) = \sqrt{2Kag^*} = \sqrt{\frac{2aKhp}{p+h}}.$$

- Η βέλτιστη πολιτική είναι να γίνονται παραγγελίες ύψους  $Q^*$  όταν η στάθμη του backlog φτάσει την τιμή  $B^*$ .
- Ισχύει:

$$S^* < \sqrt{\frac{2aK}{h}} < Q^*, \quad C^* < \sqrt{2aKh}$$

δηλαδή το κόστος ανά χρονική μονάδα είναι λιγότερο από το κλασικό ΕΟQ μοντέλο που απαγορεύονται οι ελλείψεις.

# Βασικά μοντέλα με στοχαστική ζήτηση

# Βασικά μοντέλα με στοχαστική ζήτηση

- Το μοντέλο  $(Q, R)$  συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος.
- Το μοντέλο περιοδικής παρακολούθησης μιας περιόδου (μοντέλο εφημεριδοπώλη).
- Το μοντέλο περιοδικής παρακολούθησης πολλών περιόδων.

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Σκοπός

- Αναφέρεται στην επιλογή βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας ενός προϊόντος για μια περίοδο, που απαξιώνεται στο τέλος της περιόδου.
- Κατάλληλο για προϊόντα με μικρή διάρκεια ζωής, όπως εφημερίδες, λουλούδια, φρέσκα προϊόντα διατροφής.
- Τα προϊόντα που μένουν απούλητα απαξιώνονται γρήγορα και δεν μπορούν να πωληθούν στην επόμενη περίοδο. Μπορούν, ίσως, να επιστραφούν ή να εκποιηθούν σε κάποια τιμή ευκαιρίας.

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Περιγραφή

- 1 προϊόν.
- Προγραμματισμός για 1 περίοδο.
- Απόθεμα στην αποθήκη:  $x$ .
- Απόφαση - ποσότητα παραγγελίας:  $a$ .
- Απόθεμα μετά την παραλαβή:  $x + a$ .
- Ζήτηση επόμενης περιόδου:  $D \sim F_D(x)$  (συνεχής τ.μ.).
- Πάγιο κόστος παραγγελίας:  $K$ .
- Κόστος αγοράς ανά μονάδα:  $c$ .
- Κόστος πλεονάσματος ανά μονάδα:  $h$ .
- Κόστος έλλειψης ανά μονάδα:  $p$ .
- Βασική υπόθεση:  $p > c$  (αλλιώς η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίησή του, οπότε δεν παραγγέλνουμε τίποτα).

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Βέλτιστη πολιτική

- Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη είναι τύπου  $(s, S)$ , δηλαδή θα πρέπει να παραγγέλνει ώστε να φθάσει σε επίπεδο αποθέματος  $S$ , αν το αρχικό απόθεμα του είναι κάτω από  $s$ , δηλαδή,

$$a^*(x) = \begin{cases} S - x, & \text{αν } x < s, \\ 0, & \text{αν } x \geq s. \end{cases}$$

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Βέλτιστη πολιτική

- Οι παράμετροι της βέλτιστης πολιτικής υπολογίζονται ως εξής:

$$S = F_D^{-1} \left( \frac{p - c}{p + h} \right)$$

και το  $s$  είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$cs + l(s) = K + cS + l(S),$$

με

$$\begin{aligned} l(y) &= hE[(y - D)^+] + pE[(y - D)^-] \\ &= h \int_0^y (y - \xi) f_D(\xi) d\xi + p \int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση

- Αν ληφθεί η απόφαση να παραγγελθούν  $a$  προϊόντα και το επίπεδο του αποθέματος να είναι  $y = x + a$ , τότε το αναμενόμενο κόστος είναι

$$\begin{aligned} c(x, a) &= \begin{cases} K + ca + l(x + a) & \text{αν } a > 0, \\ l(x) & \text{αν } a = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} K + cy + l(y) - cx & \text{αν } y > x, \\ l(x) & \text{αν } y = x, \end{cases} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} l(y) &= hE[(y - D)^+] + pE[(y - D)^-] \\ &= h \int_0^y (y - \xi) f_D(\xi) d\xi + p \int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση

- Η  $l(y)$  είναι κυρτή ως προς  $y$ .
- Πράγματι:
  - Για κάθε σταθερό  $d$ , έχουμε ότι οι συναρτήσεις  $(y - d)^+$  και  $(y - d)^-$  είναι κυρτές ως προς  $y$ , επομένως και οι  $E[(y - D)^+]$ ,  $E[(y - D)^-]$  είναι κυρτές ως προς  $y$  (γενικότερα, αν  $Z$  τυχαία μεταβλητή και  $f(y, z)$  κυρτή ως προς  $y$  για κάθε σταθερό  $z$ , τότε και  $E[f(y, Z)]$  είναι κυρτή ως προς  $y$ ).
  - Επομένως η  $l(y)$  είναι επίσης κυρτή (γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων με μη-αρνητικούς συντελεστές είναι κυρτή συνάρτηση).

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση Περ.1

- Ζητάμε το

$$\min_a c(x, a) = \min\{\min_{y>x} (K - cx + cy + l(y)), l(x)\}$$

- $S$ : η τιμή της  $y$  που ελαχιστοποιεί την  $cy + l(y)$  στο  $[0, \infty)$  (υπάρχει σίγουρα αφού  $\lim_{y \rightarrow \infty} (cy + l(y)) = \infty$ ).
- $s$ : το μικρότερο  $y$  ώστε  $cs + l(s) = K + cS + l(S)$ .
- Περ.1:  $x \geq S$ :

$$\begin{aligned} \min_a c(x, a) &= \min\{\min_{y>x} (K - cx + cy + l(y)), l(x)\} \\ &= \min\{K - cx + cx + l(x), l(x)\} = l(x). \end{aligned}$$

- Άρα  $a^* = 0$ .

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση Περ.2

- Ζητάμε το

$$\min_a c(x, a) = \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x))\}$$

- $S$ : η τιμή της  $y$  που ελαχιστοποιεί την  $cy + l(y)$  στο  $[0, \infty)$  (υπάρχει σίγουρα αφού  $\lim_{y \rightarrow \infty}(cy + l(y)) = \infty$ ).
- $s$ : το μικρότερο  $y$  ώστε  $cs + l(s) = K + cS + l(S)$ .
- Περ.2:  $s \leq x \leq S$ :

$$\begin{aligned} \min_a c(x, a) &= \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y), l(x))\} \\ &= \min\{K - cx + cS + l(S), l(x)\} \\ &= -cx + \min\{K + cS + l(S), cx + l(x)\} \\ &= -cx + \min\{cs + l(s), cx + l(x)\} = l(x). \end{aligned}$$

- Άρα  $a^* = 0$ .

# Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη: Ανάλυση Περ.3

- Ζητάμε το

$$\min_a c(x, a) = \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y)), l(x)\}$$

- $S$ : η τιμή της  $y$  που ελαχιστοποιεί την  $cy + l(y)$  στο  $[0, \infty)$  (υπάρχει σίγουρα αφού  $\lim_{y \rightarrow \infty}(cy + l(y)) = \infty$ ).
- $s$ : το μικρότερο  $y$  ώστε  $cs + l(s) = K + cS + l(S)$ .
- Περ.3:  $x < s$ :

$$\begin{aligned} \min_a c(x, a) &= \min\{\min_{y>x}(K - cx + cy + l(y)), l(x)\} \\ &= \min\{K - cx + cS + l(S), l(x)\} \\ &= -cx + \min\{K + cS + l(S), cx + l(x)\} \\ &= -cx + \min\{cs + l(s), cx + l(x)\} \\ &= -cx + cs + l(s). \end{aligned}$$

- Άρα  $a^* = S - x$ .