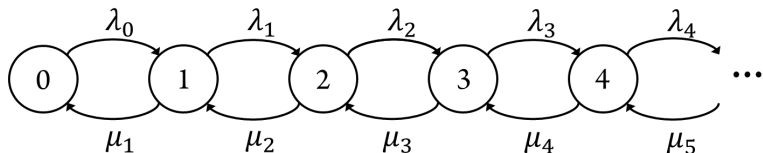


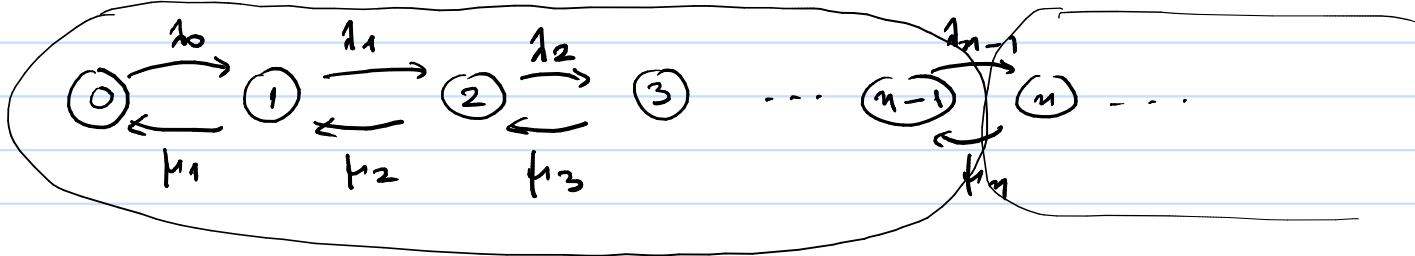
Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Ορισμός

- Σύστημα εξυπηρέτησης όπου $\{Q(t)\}$ Μ.α.σ.χ = Μαρκοβιανή ουρά.
- Σύστημα εξυπηρέτησης όπου $\{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης - θανάτου = Απλή Μαρκοβιανή ουρά.



- λ_i : Ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν i πελάτες.
- μ_i : Ρυθμός αναχωρήσεων όταν υπάρχουν i πελάτες.



$$\lambda_{n-1} P_{n-1} = \mu_n P_n, \quad n \geq 1 \quad \leadsto \quad P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\leadsto \quad P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} P_0, \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Leftrightarrow P_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right) = 1$$

└──────────────────┘

→	$< \infty$	→	$P_0 > 0$	Ευζαίσθεια
→	$= \infty$	→	$P_0 = 0$	Αεζαίσθεια

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών

- Το σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

- Όταν είναι ευσταθές, κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών (σε συνεχή χρόνο):

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0, \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

Βασικοί υπολογισμοί

$\{X(t)\}$ M.a.s.x.

με πιθανούς q_{ij}

και καταν. ίδιων p_i

$c(i)$: κόστος παραφ. / πριν τον ομαρ i

$d(i, j)$: κόστος μεταβ. $i \rightarrow j$

$$\begin{array}{l} \text{Μέσο Κόστος} \\ \text{σε χρον. μονάδα} \end{array} = \sum_i p_i c(i) + \sum_i \sum_{j \neq i} p_i q_{ij} d(i, j)$$

$$c(i) = 0$$

$$d(i, j) = \begin{cases} 1, & j = i+1, i \geq 0 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{Μέσος πιθανός} \\ \text{αφίξεων} \\ \text{1*} \end{array} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \overset{1_i}{\underbrace{q_{i,i+1}}_{1}} \cdot 1 = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot p_i$$

$$a_n = \frac{\text{πιδ. η μεταβ. σε συγχ. αφίξεων}}{\text{μετρογρ. ποσότη αφίξεων που βλέπουν η πελατες}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ πελ. σε } (0, t] \text{ που βλέπουν η πελ.}}{\# \text{ πελ. σε } (0, t]}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\# \text{ πελ. σε } (0, t] \text{ που βλέπουν η πελ.})/t}{(\# \text{ πελ. σε } (0, t])/t}$$

$$= \frac{\text{Ρωθ. μεσοβ. } n \rightarrow n+1}{\text{Ρωθ. αφίξεων}} = \frac{P_n q_{n, n+1}^{1,1}}{1^*} = \frac{1_n P_n}{1^*}$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Ρυθμοί αφίξεων/αναχωρήσεων, Εμφυτευμένες κατανομές

- Ρυθμοί αφίξεων, αναχωρήσεων:

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n, \quad \mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n.$$

- Κατανομή ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων:

$$a_n = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}.$$

- Κατανομή ισορροπίας σε στιγμές αναχωρήσεων:

$$d_n = \frac{\mu_{n+1} p_{n+1}}{\lambda^*}.$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Χρόνος παραμονής πελάτη

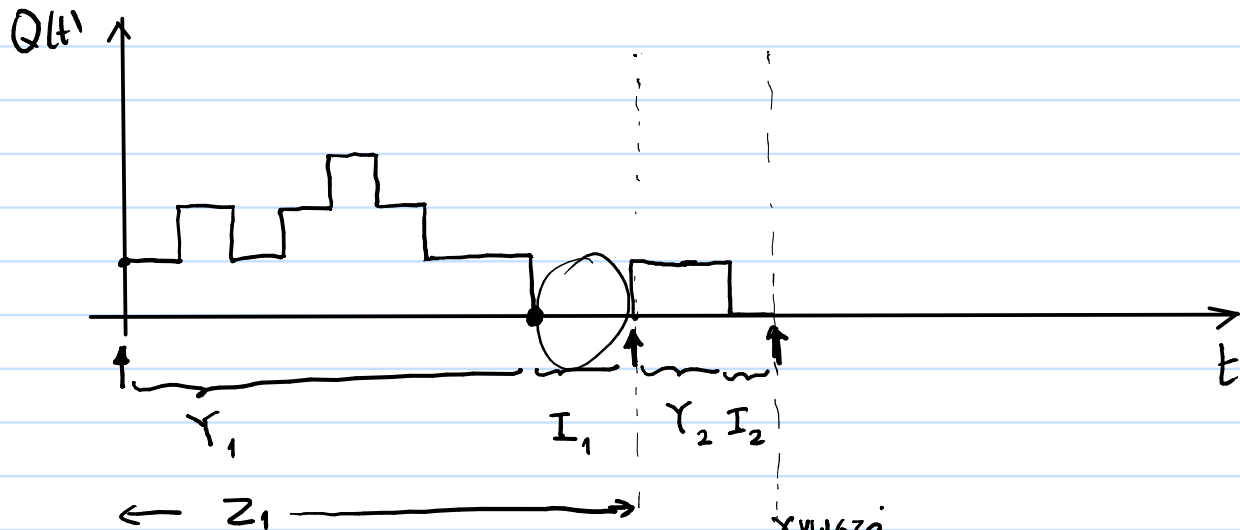
- S : Χρόνος παραμονής πελάτη υπό την πειθαρχία FCFS.
- Q^- : Πλήθος πελατών που βρίσκει ο πελάτης κατά την άφιξή του.
- Τότε:

$$F_S(x) = \Pr[S \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pr[S \leq x | Q^- = n]$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Pr[Q^- = n]}_{a_n} \Pr[S \leq x | Q^- = n]$

- Για τη μέση τιμή, από N. Little:

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$



$$I \sim \text{Exp}(\lambda_0)$$

$$\Rightarrow E[I] = \frac{1}{\lambda_0}$$

Σ.A.O.K:

$$P_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda_0 P_0}$$

$$\Rightarrow E[Y] = \frac{1}{\lambda_0 P_0} - \frac{1}{\lambda_0}$$

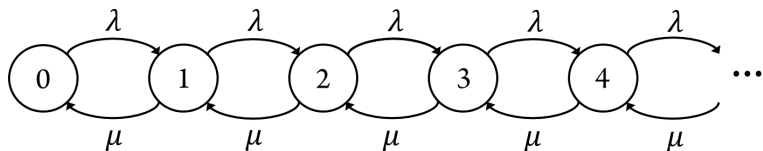
Απλές Μαρκοβιανές Ουρές: Κύκλος απασχόλησης (λειτουργίας)

- I : Περίοδος αργίας.
- Y : Περίοδος συνεχούς λειτουργίας.
- $Z = Y + I$: Κύκλος απασχόλησης (λειτουργίας).
- $E[I] = \frac{1}{\lambda_0}$.
- $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda_0 p_0}$.
- $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1-p_0}{\lambda_0 p_0}$.

Η M/M/1 ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ .
- $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- 1 υπηρέτης.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών:

Κατ	Εποφ. κατ.	Χρόνος
0	1	$\text{Exp}(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$ $n-1$	$\text{Exp}(\lambda)$ $\text{Exp}(\mu)$



Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- Ευστάθεια:
Ευσταθής $\Leftrightarrow \rho < 1$ (από ευστάθεια G/G/1 ουράς).
- Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας:

$$\begin{aligned}
 B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} & \text{αν } \rho < 1 \text{ (ευστάθεια)} \\ \infty & \text{αν } \rho \geq 1 \text{ (αστάθεια).} \end{cases} \\
 p_n &= \begin{cases} B & \text{αν } n = 0 \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1 \end{cases} \\
 &= (1 - \rho) \rho^n, \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

- Άρα $(p_n) \sim \text{Geom}(\rho)$ στο $\mathbb{N}_0$.

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- PASTA+Ιδιότητα μεμονωμένων αφίξεων/αναχωρήσεων:

$$(d_n) = (a_n) = (p_n).$$

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Μέσο πλήθος πελατών:

$$E[Q^+] = E[Q^-] = E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

(από N. Little ή $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$).

- Μέσος χρόνος παραμονής/αναμονής πελάτη:

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \quad E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

$$\text{N. Little: } E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E[W] = j \quad E[W] = \frac{E[Q_q]}{1}$$

$$\begin{aligned} E[Q_q] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Pr[Q_q = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \Pr[Q = \underbrace{n+1}_j] \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) p_j = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) p_j = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j - \sum_{j=1}^{\infty} p_j = E[Q] - (1-p_0) \\ &= \frac{p}{1-p} - p = \frac{p - p(1-p)}{1-p} = \frac{p - p + p^2}{1-p} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά

$$\begin{aligned} E[Q_q] &= E[(Q-1)_+] = E[(Q-1)_+ 1_{\{Q \geq 3\}}] + E[(Q-1)_+ 1_{\{Q \geq 1\}}] \\ &= 0 + E[(Q-1) 1_{\{Q \geq 1\}}] = E[\underbrace{Q 1_{\{Q \geq 1\}}}_{\overset{Q}{=}}] - E[1_{\{Q \geq 1\}}] \\ &= E[Q] - \Pr[Q \geq 1] = \frac{p}{1-p} - (1-p_0) = \frac{p}{1-p} - p = \frac{p^2}{1-p} \end{aligned}$$

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- Κατανομή χρόνου παραμονής πελάτη:

$$\begin{aligned}
 F_S(x) &= \Pr[S \leq x] \stackrel{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Pr[Q^- = n]}_{a_n = \rho^n} \underbrace{\Pr[S \leq x | Q^- = n]}_{\substack{\text{Γ.Κ. του } (S|Q^-=n) \\ \text{Erlang}(n+1, \mu)}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_0^x \underbrace{\left(\frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} \right)}_{\substack{\text{Γ.Π.Π. της} \\ \text{Erlang}(n+1, \mu)}} du \\
 &= \int_0^x \mu(1-\rho)e^{-\mu u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \rho u)^n}{n!} du \\
 &= \int_0^x \mu(1-\rho)e^{-\mu u} e^{\mu \rho u} du = \int_0^x \underbrace{\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)u}}_{\substack{\text{Γ.Π.Π. της } S}} du
 \end{aligned}$$

- Άρα $S \sim \text{Exp}(\mu(1-\rho)) = \text{Exp}(\mu - \lambda)$.

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

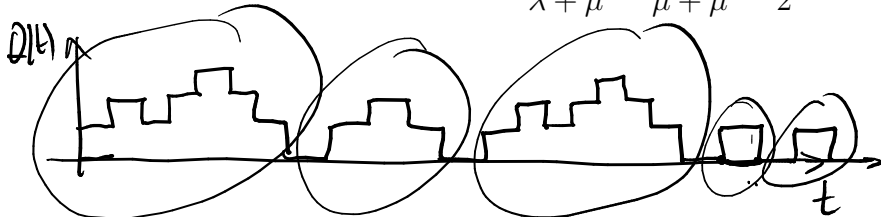
- I : Περίοδος αργίας.
- Y : Περίοδος συνεχούς λειτουργίας.
- $Z = Y + I$: Κύκλος απασχόλησης (λειτουργίας).
- $E[I] = \frac{1}{\lambda}$.
- $\overset{1-\rho}{\circlearrowleft} p_0 = \frac{\overset{1}{\circlearrowleft} E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$.
- $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$.
- Παράδοξο: $E[Y] = E[S] = \frac{1}{\mu-\lambda}$.

Μια πρώτη σκέψη θα έλεγε ότι το $E[Y]$ θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερο από το $E[S]$, αφού κάθε περίοδος συνεχούς λειτουργίας είναι μεγαλύτερη από τον χρόνο παραμονής κάθε πελάτη μέσα σε αυτή.

Η M/M/1 ουρά (συνέχεια)

- Σε μια ευσταθή M/M/1 ουρά ποιο είναι το ποσοστό των κύκλων απασχόλησης στους οποίους εξυπηρετείται μόνο ένας πελάτης;
- Είναι

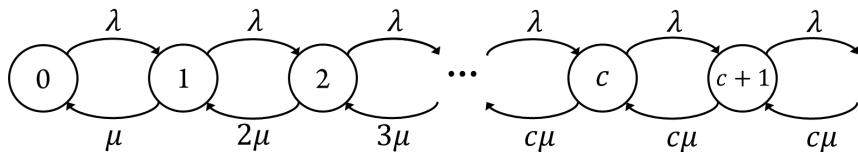
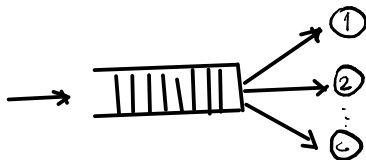
$$\Pr[\text{Exp}(\mu) < \text{Exp}(\lambda)] = \frac{\mu}{\lambda + \mu} > \frac{\mu}{\mu + \mu} = \frac{1}{2}.$$



Η M/M/c ουρά

Μοντέλο καθυστερήσεων του Erlang (Erlang Delay Model)

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ .
- $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών:



Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Ευστάθεια: =

Ευσταθής $\Leftrightarrow \rho < c$ (από ευστάθεια G/G/c ουράς).

- Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας:

$$\begin{aligned}
 B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \\
 &= \begin{cases} \sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c-\rho} & \text{αν } \rho < c \text{ (ευστάθεια),} \\ \infty & \text{αν } \rho \geq c \text{ (αστάθεια).} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Handwritten notes above the equation: $\frac{\frac{\rho}{c}}{1 - \frac{\rho}{c}} = \frac{\rho}{c - \rho}$ and $\frac{\rho^c}{c!} \cdot \sum_{n=c+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}$

$$p_n = \begin{cases} B \frac{\rho^n}{n!} & \text{αν } 0 \leq n \leq c, \\ B \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} & \text{αν } n \geq c+1. \end{cases}$$

Handwritten notes below the equation:

$$\begin{aligned}
 n \leq c &: 1\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdots n\mu = n! \mu^n \\
 n > c &: 1\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdots c\mu \cdot c\mu \cdot c\mu \cdots = c! c^{n-c} \mu^n
 \end{aligned}$$

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

Ποσοστό των πελατών που μπαίνουν
σε αίσθηση

- Πιθανότητα καθυστέρησης πελάτη:

Erlang formulas

A-formula

B- -"-

→ C- -"-

$$C(c, \rho) = \sum_{n=c}^{\infty} a_n = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \Pr[Q \geq c] = B \frac{\rho^c}{c!} \frac{c}{c-\rho}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\#$ ρ^c
 στη ένδειξη
 ωστή.

$$= \frac{\frac{\rho^c}{c!} \frac{c}{c-\rho}}{\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{c}{c-\rho}}$$

τύπος καθυστερήσεων του Erlang ή τύπος Erlang C (Erlang C formula).

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Κατανομή ισορροπίας πελατών στον χώρο αναμονής, δεδομένου ότι όλοι οι ~~πελάτες~~^{υπαρξέτες} είναι απασχολημένοι:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\Pr[Q_q = n | Q \geq c]} &= \Pr[Q = n + c | Q \geq c] \\
 &= \frac{B \frac{\rho^{c+n}}{c!c^n}}{\sum_{m=c}^{\infty} B \frac{\rho^m}{c!c^{m-c}}} = P_{n+c} \\
 &= \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{\rho}{c}\right)^n, \quad n \geq 0,
 \end{aligned}$$

- Άρα $(Q_q | Q \geq c) \sim \text{Geom}(\frac{\rho}{c})$ στο $\mathbb{N}_0$.
- Επομένως:

$$E[Q_q | Q \geq c] = \frac{\rho/c}{1 - \rho/c}.$$

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά:

$$\begin{aligned}E[Q_q] &= \Pr[Q < c]E[Q_q|Q < c] + \Pr[Q \geq c]E[Q_q|Q \geq c] \\&= \Pr[Q < c] \cdot 0 + \Pr[Q \geq c] \cdot \frac{\rho/c}{1 - \rho/c} \\&= B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}.\end{aligned}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα:

$$E[Q] = B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} + \rho.$$

Η M/M/c ουρά (συνέχεια)

- Μέσο χρόνο αναμονής πελάτη:

$$E[W] = \frac{E[Q_q]}{\lambda} = B \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} \frac{1}{\mu}.$$

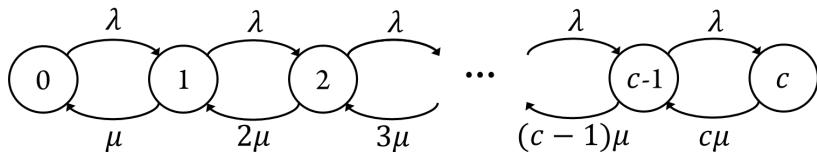
- Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη:

$$E[S] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \left(B \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1 \right) \frac{1}{\mu}.$$

Η M/M/c/c ουρά

Μοντέλο αγωγιών Erlang (Erlang loss model)

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ .
- $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- c χωρητικότητα (καθόλου χώρος αναμονής).
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- Η $\{Q(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών:



Η M/M/c/c ουρά (συνέχεια)

- Ευστάθεια: Πάντα ευσταθής λόγω πεπερασμένου χώρου καταστάσεων.
- Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας:

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^c \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!},$$
$$p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{m=0}^c \frac{\rho^m}{m!}}, \quad 0 \leq n \leq c.$$

Η M/M/c/c ουρά (συνέχεια)

- Πιθανότητα απώλειας πελάτη:

$$B(c, \rho) = a_c = p_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{m=0}^c \frac{\rho^m}{m!}}$$

τύπος απωλειών του Erlang ή Erlang B (Erlang B formula).

- Ο τύπος αυτός ισχύει και για το M/G/c/c σύστημα (ιδιότητα μη-ευαισθησίας).

$\rho = 1.6$
 αριθ. $\downarrow$
 μέγ. χρ. εξυπηρ.

Η M/M/c ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες

balking

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ .
- $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- c υπηρέτες.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- ➔ • Κάθε αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα αναχωρεί άμεσα με πιθανότητα q_n .
- Συνήθως: $q_n \uparrow n$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$.
- $\{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda(1 - q_n), \quad n \geq 0, \\ \mu_n &= \min(n, c)\mu, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Η M/M/c ουρά με ανυπόμονους πελάτες

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ .
 - $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
 - c υπηρέτες.
 - ∞ χωρητικότητα.
 - FCFS πειθαρχία ουράς.
- } M/M/c

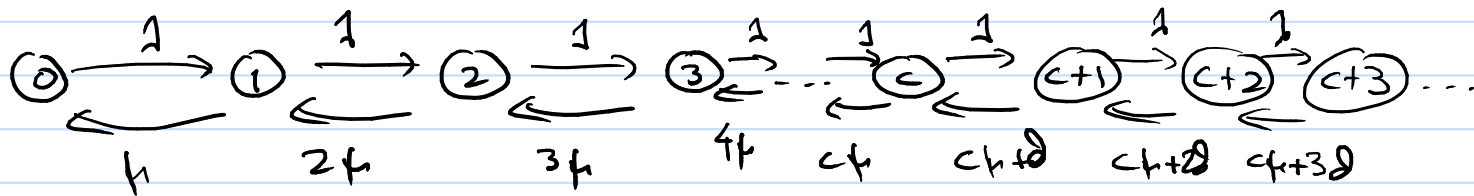
- • Κάθε αφικνούμενος πελάτης εισέρχεται σε αυτό αλλά έχει έναν χρόνο υπομονής $\text{Exp}(\theta)$ και αποχωρεί από το σύστημα αν ο χρόνος εκπνεύσει πριν να αρχίσει την εξυπηρέτησή του.
- $\{Q(t)\}$ αλυσίδα γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0,$$

$$\mu_n = \min(n, c)\mu + \max(n - c, 0)\theta, \quad n \geq 1.$$

M/M/c με ανυπόφορους πελάτες (Reneging)

↓
Χρόνος αναρ. $\sim \text{Exp}(\theta)$



Erlang - A (Paln)

$P(\text{εγκοπή}) =$

