

Επιχειρησιακή Έρευνα-Στοχαστικά Μοντέλα, Ιανουάριος 2013

(Πρόβλημα 1 - 35 Μονάδες) Σε μια επιχείρηση χρησιμοποιείται ένα μηχάνημα η κατάσταση του οποίου κατατάσσεται σε μία από τις καταστάσεις του συνόλου $\{0, 1, \dots, M\}$, οι οποίες περιγράφουν σε αύξουσα σειρά τη χειροτέρευση της λειτουργίας του μηχανήματος (0 σημαίνει καινούργιο και M σημαίνει χαλασμένο). Την αρχή της βδομάδας t , $t = 0, \dots, n, \dots$, παρατηρούμε την κατάσταση του μηχανήματος $X_t \in \{0, 1, \dots, M\}$. Αν $X_t = M$ αντικαθιστούμε το μηχάνημα με καινούργιο. Το κόστος αντικατάστασης είναι c και για να αντικατασταθεί περνά μία βδομάδα. Αν $X_t \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$ αποφασίζουμε αν θα γίνει ή όχι συντήρηση του μηχανήματος (η συντήρηση γίνεται ακαριαία). Το κόστος συντήρησης, κάθε φορά που το συντηρούμε, είναι σταθερό και ίσο με c' . Ένα μη συντηρημένο μηχάνημα παραμένει στην παρούσα κατάσταση με πιθανότητα P ενώ με πιθανότητα $1 - P$ την αρχή της επόμενης βδομάδας θα βρεθεί στην επόμενη χειρότερη κατάσταση. Ένα συντηρημένο μηχάνημα παραμένει στην παρούσα κατάσταση με πιθανότητα q ενώ με πιθανότητα $1 - q$ την αρχή της επόμενης βδομάδας θα βρεθεί στην επόμενη χειρότερη κατάσταση. Δίνεται ότι $P < q$. Εάν την αρχή της βδομάδας το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση i , $i = 0, \dots, M - 1$ τότε η χρήση του κατά τη διάρκεια της βδομάδας έχει κόστος λi , όπου λ γνωστή παράμετρος, ανεξάρτητη από το αν το μηχάνημα έχει συντηρηθεί ή όχι. Κάποιος αποφασίζει να ακολουθήσει πολιτική συντήρησης η οποία συντηρεί όποτε η κατάσταση γίνει ίση ή μεγαλύτερη από k , για κάποιο $k \in \{1, \dots, M - 1\}$ (φυσικά αν η κατάσταση γίνει M , τότε δε συντηρούμε αλλά αντικαθιστούμε). Ζητείται:

(α) Να δοθεί το διάγραμμα και ο πίνακας μεταπηδήσεων της αλυσίδας Markov που μοντελοποιεί τις μεταβάσεις του μηχανήματος από κατάσταση σε κατάσταση.

(β) Για μια οποιαδήποτε αλυσίδα Markov να οριστούν οι έννοιες «επαναληπτική κατάσταση», «απεριοδική κατάσταση», «εργοδική κατάσταση», «αδιαχώριστη αλυσίδα», «εργοδική αλυσίδα» και ναδειχθεί ότι η παρούσα αλυσίδα είναι αδιαχώριστη εργοδική. Οι απαντήσεις να είναι σαφείς και σύντομες.

(γ) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

(γ) Να δοθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος για την ακολουθούμενη πολιτική συντήρησης συναρτήσει του k (απαλείψτε τύπους αθροισμάτων χρησιμοποιώντας

τον τύπο $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$, αλλά μην εμπλακείτε σε πράξεις με τους τύπους της

στάσιμης κατανομής).

(δ) Αν $k < M - 1$, μακροπρόθεσμα το σύστημα περνά περισσότερο ποσοστό χρόνου στην κατάσταση $k - 1$ ή στην κατάσταση $k + 1$; Αποδείξτε την απάντησή σας.

(Πρόβλημα 2 - 25 Μονάδες) Θεωρήστε ένα τυχερό παιχνίδι όπου 2 παίκτες διαθέτουν συνολικά 4 ευρώ και ρίχνουν εναλλάξ δύο ζάρια. Σε κάθε γύρο κάθε παίκτης ποντάρει ακριβώς 1 ευρώ και χάνει αν φέρει άσσους, δυάρια, ασσόδυο ή ντόρτια (τεσσάρια), κερδίζει αν φέρει τριάρια, πεντάρια, εξάρια ή πέντε-έξη, και τέλος ούτε κερδίζει ούτε χάνει σε κάθε άλλη περίπτωση. Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποιος παίκτης πάρει τα λεφτά του άλλου παίκτη. Αν παίζετε το παιχνίδι αυτό ξεκινώντας με 1 ευρώ, ποια η πιθανότητα να κερδίσετε;

(Πρόβλημα 3 - 25 Μονάδες) Ένα σύστημα αποτελείται από τρεις συνιστώσες συνδεδεμένες εν σειρά (δηλαδή για να λειτουργεί το σύστημα πρέπει να λειτουργούν

και οι τρεις συνιστώσες), που λειτουργούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει την πιθανότητα λειτουργίας κάθε συνιστώσας ανάλογα με τα χρήματα που θα ξοδέψουμε (σε κάποια χρηματική μονάδα) για την κατασκευή της. Η κατανάλωση χρημάτων γίνεται σε ακέραιες μονάδες.

Χρήματα	Συνιστώσα		
	1	2	3
0	0	0	0
1	0.4	0.1	0.2
2	0.5	0.4	0.5
3	0.6	0.8	0.6

Αν διαθέτουμε 5 συνολικά χρηματικές μονάδες, ποια είναι η τιμή της μέγιστης πιθανότητας λειτουργίας του συστήματος που μπορούμε να πετύχουμε και ποια κατανομή των χρημάτων στις συνιστώσες το επιτυγχάνει;

(Πρόβλημα 4 - 25 Μονάδες) Μια επιχείρηση διαθέτει S ευρώ για την ανάπτυξη νέων προϊόντων φέτος. Το τμήμα σχεδιασμού και ανάπτυξης της επιχείρησης αποτελείται από U επιστήμονες. Υπάρχουν σχέδια για νέα προϊόντα και το σχέδιο n , $n = 1, \dots, N$, απαιτεί επένδυση c_n ευρώ και χρέωση σε αυτό d_n επιστημόνων προκειμένου να υλοποιηθεί. Σχέδιο που αποφασίζεται να υλοποιηθεί αποφέρει κέρδη αξίας k_n ευρώ. Να αναγνωριστούν στο πρόβλημα αυτό τα διάφορα χαρακτηριστικά που το καθιστούν πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού (χώροι καταστάσεων, αποφάσεις, τρέχουσες και τερματικές πληρωμές, νόμος κίνησης) και να γραφεί κατάλληλη αναδρομική σχέση (εξίσωση βελτιστοποίησης) που επιλύει το πρόβλημα επιλογής των νέων προϊόντων που θα αναπτύξει η εταιρεία (προσοχή να μη ξεχαστούν οι συνοριακές συνθήκες και να γραφεί ποια είναι η ποσότητα που θα υπολογισθεί τελικά).

Άριστα είναι το 100. Καλή Επιτυχία.

Διάρκεια 3 ώρες.