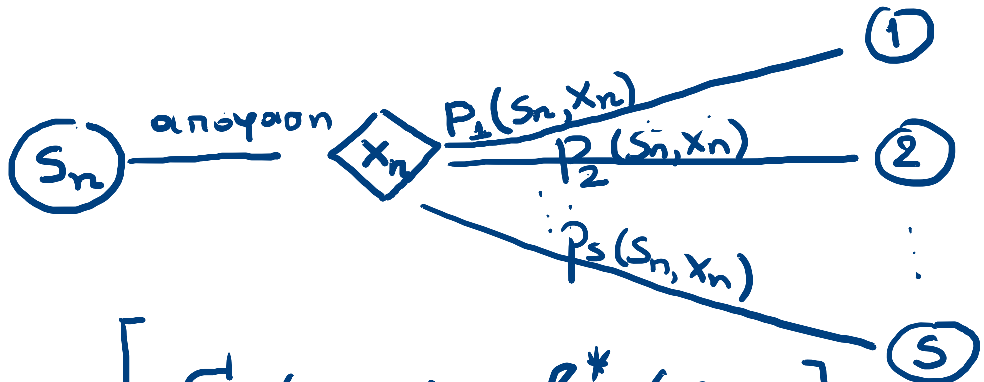
Διάλεξη 3

Δομή ενός προβλήματος Σ.Δ.Π.

στάδιο n

κατάσταση :



$$f_n(s_n,x_n) = E_{s_n,x_n}\left[C_{s_{n+1}}(s_n,x_n) + f^*_{n+1}(s_{n+1})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{s} p_i(s_n,x_n)\left[C_i(s_n,x_n) + f^*_{n+1}(i)\right]$$

και $$f^*_n(i) = \min_{x_n} f_n(i, x_n).$$

$x_n \to$ εφικτές τιμές

διαδοχ. εφαρμογή αυτού του σχήματος μας οδηγεί σε δέντρο αποφάσεων + γραφική επίλυση.

Παράδειγμα (Κερδίζοντας στο Las Vegas).

- Ένας παίκτης πιστεύει ότι έχει βρει στρατηγική να κερδ. με πιθ. $\frac{2}{3}$ ένα συγκ. παιχνίδι στο Las Vegas. Οι φίλοι του δεν τον πιστεύουν και στοιχηματίζουν μαζί του ότι ξεκινώντας με 3 μάρκες σε 3 παρτίδες παιχνιδιού δεν θα έχει παραπάνω από 4 μάρκες (αν ο παίκτης έχει ≥ 5, τότε κερδίζει αυτός, διαφορ. χάνει).
- ο παίκτης αναζητά βέλτιστη στρατηγική πονταρίσματος σε κάθε παρτίδα ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητά του να κερδίσει το στοίχημα με δεδομένο ότι με πιθαν. $\frac{2}{3}$ κερδίζει κάθε παρτίδα.

Μοντελοποίηση

S_n : # μαρκών που έχει στα χέρια του στην αρχή της n-παρτίδας

x_n : # μαρκών που στοιχηματίζει στη n-παρτίδα

Αν κερδίσει πάει σε S_n+x_n, αν χάσει S_n-x_n με πιθ. $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα.

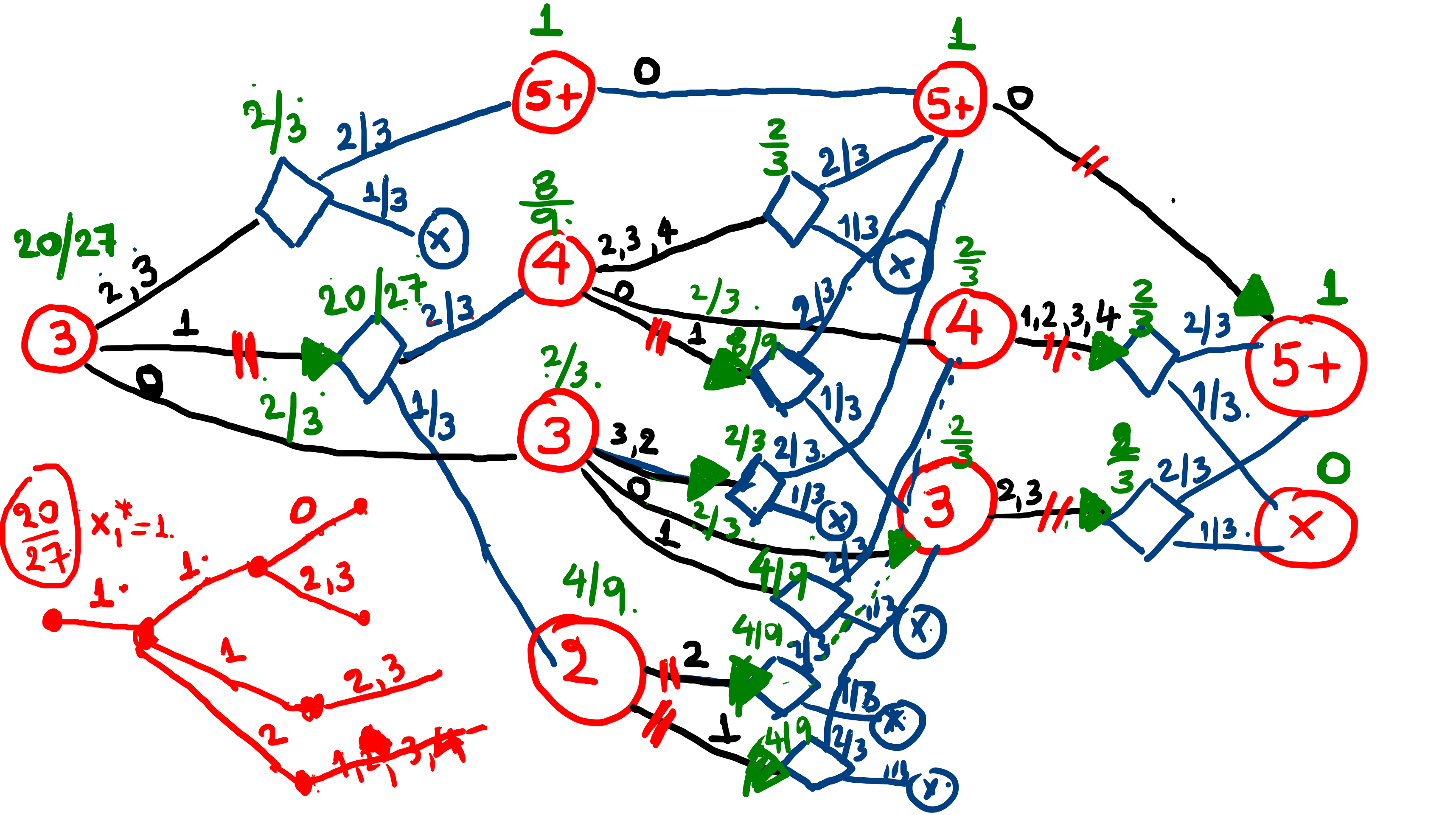
Εξίσωση βελτιστότητας

$$f_n^*(S_n) = \max_{0\le x_n \le S_n} \left\{ \frac{1}{3} f_{n+1}^*(S_n - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}^*(S_n+x_n) \right\}$$

$$f_n^*(0) = f_{n+1}^*(0) = 0 \quad , \quad f_4^*(S_4) = \begin{cases} 1 & , S_4 \geq 5 \\ 0 & , S_4 < 5. \end{cases}$$

Επίλυση

Αρκεί να γίνει σωστά το γράφημα.



Ενότητα : Μαρκοβιανές Αλυσίδες

1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορσ : Μια οικογένεια τ.μ. $\{X_t\}_{t\in T}$ ή $(X_t)_{t\in T}$ λέγεται **στοχαστική διαδικασία**, ορισμένων σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

- Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που το δεικτοσύνολο $T = \mathbb{N}$, και αυτές λέγονται στοχ. διαδικασίες διακριτού χρόνου.

Παρατήρηση Η κατανομή μιας σ.δ. καθορίζεται πλήρως από τις κατανομές των τ.δ.

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$, $\forall n \geq 1$, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$.

Σε περίπτωση για το $T = \mathbb{N}$, τότε

αρκεί να γνωρίζουμε την κατανομή κάθε

τ.δ. $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $\forall n \geq 0$.

ερμηνεία: μία σ.δ. περιγράφει την εξέλιξη

της κατάστασης ενός συστήματος (εδώ σε χρόνο).

Θέτουμε $X_t \in \{0, 1, \ldots, M\}$, δηλ.

σ.δ. με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων.

Παράδειγμα 1 (Πρόβλημα αποθεμάτων).

Στο πλοίο μπορεί να γίνει παραγγελία μιας συγκεκριμένης μάρκας υπολογιστών 1 φορά την εβδομάδα. Έστω

D_t : η ζήτηση αυτής της μάρκας την t-εβδομάδα, $t \geq 1$.

X_t : # διαθέσιμων υπολογιστών στο τέλος της t-εβδομ. $t \geq 1$.

X_0 : αρχικός αριθμός των υπολογιστών
εδώ $X_0 = 3$

Υποθέσεις.

$\{D_t\}_{t \geq 1}$ είναι ανεξ. + ισον. τ.μ., $D_t \sim \text{Poisson}(1)$.

Πολιτική παραγγελιών

Στο τέλος της t-εβδομάδας θα γίνεται παραγγελία $\Pi_t = \begin{cases} 3, & X_t = 0 \\ 0, & X_t \geq 1. \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι αν $D_t > X_{t-1}$, τότε χάνονται λεφτά.

Πως μοντελοποιείται η εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος.

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{3 - D_{t+1}, 0\}, & \text{αν } X_t = 0 \\ \max\{X_t - D_{t+1}, 0\}, & \text{αν } X_t \geq 1 \end{cases}$$

2

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

<u>Ορσ</u> : Μια σ.δ. διακριτού χρόνου (X_t) λέγεται μαρκοβιανή αλυσίδα (μ.α.), αν

$\forall t \geq 0$, $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{t-1}, i, j \in S \rightarrow$ χώρο καταστάσεων.

$$P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i, \cancel{X_{t-1}=i_{t-1}, \ldots, X_0=i_0}\right)$$

$$= P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i\right)$$

Παρατηρήσεις

10

1) Η παραπάνω ιδιότητα λέγεται και μαρκοβιανή ιδιότητα.

2) Λέμε χαρακτηριστικά ότι

$$P(\text{ΜΕΛΛΟΝ} \mid \text{ΠΑΡΟΝ}, \text{ΠΑ}\cancel{\text{ΡΕΛ}}\text{ΘΟΝ})$$

$$= P(\text{ΜΕΛΛΟΝ} \mid \text{ΠΑΡΟΝ}).$$

Αυτό λέγεται και αμνήμονη ιδιότητα των μ.α.

3) Οι πιθανότητες $P(X_{t+1}=j \mid X_t=i)$ λέγονται μονοβηματικές πιθανότητες μετάβασης

4) Αν $P(X_{t+1}=j \mid X_t=i) = P(X_1=j \mid X_0=i)$ δηλ. ανεξ. του t, τότε λέγονται στάσιμες πιθ. μετάβασης

και η αλυσίδα λέγεται <u>χρονικά ομογενής.</u> (11)

5) Για χρονικά ομογενείς μ.α.

$$P(X_{t+n}=j \mid X_t=i) = P(X_n=j \mid X_0=i)$$

$\forall t \geq 0, \forall n \geq 1$ και λέγονται

<u>n-βηματικές πιθανότητες μετάβασης.</u>

6) Θέτουμε $P_{ij} = P(X_1=j \mid X_0=i)$ και

$P_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i)$. και φτιάχνουμε.

12

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \cdots & P_{MM} \end{pmatrix}.$$

πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.

$P_{ij} \geq 0$

$\sum_{j=0}^{M} P_{ij} = 1, \ \forall i$

κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε <u>στοχαστικό διάνυσμα</u>.

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \cdots & P_{0M}^{(n)} \\ \vdots & & & \\ P_{M0}^{(n)} & P_{M1}^{(n)} & \cdots & P_{MM}^{(n)} \end{pmatrix}$$

n-βηματικός πίνακας μετάβασης

$P_{ij}^{(n)} \geq 0, \ \sum_{j=0}^{M} P_{ij}^{(n)} = 1. \ \forall i$

Προφανώς $P^{(1)} = P$, επίσης $P^{(0)} = I$ → ταυτοτικός

→ οι πίνακες είναι <u>στοχαστικοί</u>.

7 Αν είναι γνωστό και το αρχικό 13

διάνυσμα πιθανοτήτων $a_i = P(X_0 = i)$, $\forall i \in S$.

τότε η κατανομή μιας μ.α. καθορίζεται

πλήρως από τη γνώση του P.

Τότε

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) =$$

$$a_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$$

Παράδειγμα (συνέχεια).
↳ αποθεμάτων.

(1) Η (X_t) είναι μ.α. με χκ. $S=\{0,1,2,3\}$.

Πράγματι

$$X_{t+1}=\begin{cases}\max\{3-D_{t+1},0\}, & X_t=0.\\ \max\{X_t-D_{t+1},0\}, & 1\le X_t\le 3.\end{cases}$$

Άρα αν γνωρίζουμε τη X_t, η X_{t+1} είναι ανεξάρτητη από την ιστορία $X_0,X_1,\dots,X_{t-1}$ και εξαρτ. μόνο από τη D_{t+1} (ανεξ της (X_t)).
Επομένως πράγματι η (X_t) είναι μ.α.

15

② αρχική κατανομή.

$$a_i = P(X_0 = i) = \begin{cases} 1 & , \; i = 3 \\ 0 & , \; i \in \{0,1,2\}. \end{cases}$$

③ πίνακας μετάβασης.

$$D_{t+1} \sim \text{Poisson}(1) \Rightarrow P(D_{t+1} = x) = \frac{e^{-1}}{x!}, \; x = 0,1,2\ldots \quad \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}\right).$$

Άρα.

$$P(D_{t+1} = 0) = e^{-1}$$

$$P(D_{t+1} = 1) = e^{-1}$$

$$P(D_{t+1} = 2) = e^{-1}/2.$$

$$P(D_{t+1} \geq 3) = 1 - P(D_{t+1} \leq 2) = 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{5}{2}e^{-1}.$$

• αν $X_t = 0$.

$$P_{00} = P(X_{t+1}=0 \mid X_t=0) = P\left(\max\{3-D_{t+1},0\}=0 \mid X_t=0\right)$$

$$= P\left(\max\{3-D_{t+1},0\}=0\right) = P(D_{t+1}\geq 3) \checkmark$$

$$P_{01} = P(X_{t+1}=1 \mid X_t=0) = P\left(\max\{3-D_{t+1},0\}=1 \mid \cancel{X_t=0}\right)$$

$$= P(D_{t+1}=2) \checkmark$$

$$P_{02} = P(D_{t+1}=1) \checkmark$$

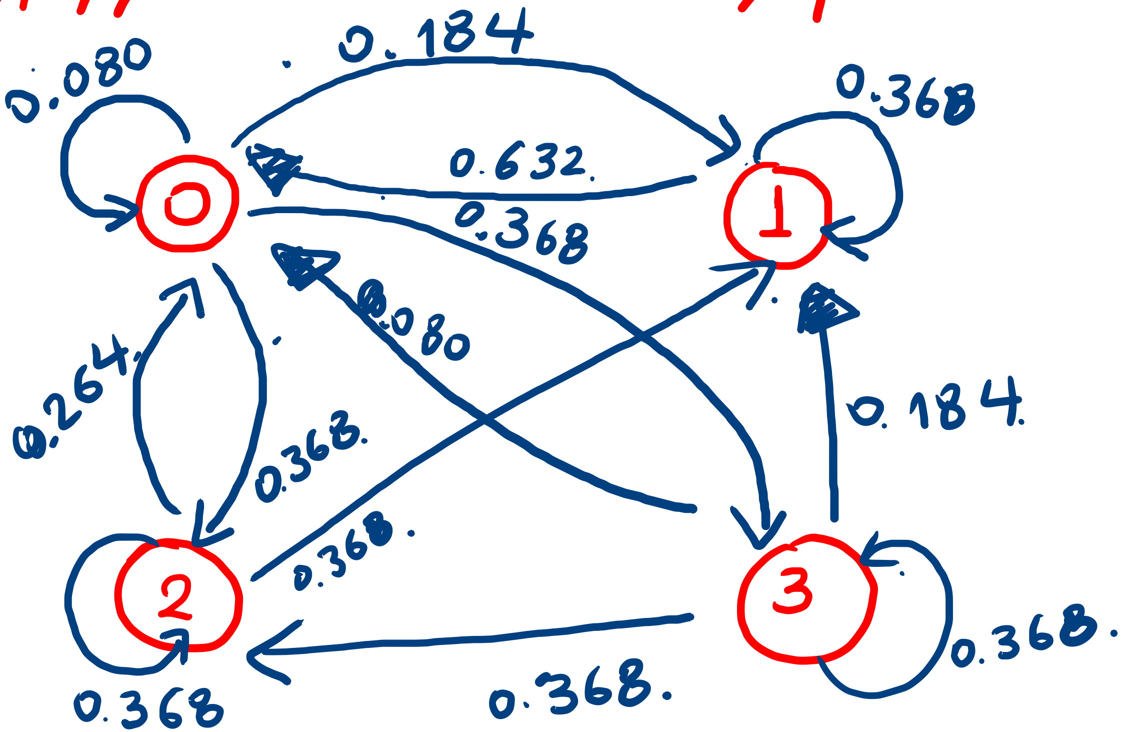
$$P_{03} = P(D_{t+1}=0) \checkmark$$

Τελικά.

$$P = e^{-1}\begin{pmatrix} e-\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ e-1 & 1 & 0 & 0 \\ e-2 & 1 & 1 & 0 \\ e-\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.

Διάγραμμα καταστάσεων / μεταβάσεων.



Παράδειγμα 2

- μοντέλο για άνοδο/πτώση μιας μετοχής στο τέλος της ημέρας.

Συμβολίζεται με $X_t = \begin{cases} 0, & \text{αν } t\text{-μέρα πτώση} \\ 1, & \text{αν } t\text{-μέρα άνοδο.} \end{cases}$

Υποθέτουμε ότι

$$P(X_{t+1}=1 \mid X_t=1, X_{t-1}, \dots, X_0) = P(X_{t+1}=1 \mid X_t=1) = 0.7.$$

$$P(X_{t+1}=0 \mid X_t=1, X_{t-1}, \dots, X_0) = P(X_{t+1}=0 \mid X_t=1) = 0.3.$$

$$P(X_{t+1}=1 \mid X_t=0, X_{t-1}, \dots, X_0) = P(X_{t+1}=1 \mid X_t=0) = 0.5.$$

$$P(X_{t+1}=0 \mid X_t=0, X_{t-1}, \dots, X_0) = P(X_{t+1}=0 \mid X_t=0) = 0.5.$$

Παρατήρηση.

Αν για κάποιο λόγο, η πτώση ή η άνοδος την επόμενη μέρα, εξαρτάται από το τί συνέβη σήμερα αλλά και χθές, τότε πλέον η (X_t) δεν είναι μ.α. Μπορούμε όμως να ψτιάξαμε $Y_t = (X_t, X_{t-1})$ και τότε η (Y_t) είναι μ.α. και $Y_t \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.
και εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πάρουμε.

$$Z_t = \begin{cases} 0 & , X_{t-1}=0, X_t = 0 \\ 1 & X_{t-1}=0, X_t = 1 \\ 2 & X_{t-1}=1, X_t = 0 \\ 3 & X_{t-1}=1, X_t = 1, \end{cases}$$

και η (Z_t) είναι μ.α.

5 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov.

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i) = \sum_{k=0}^{M-1} P(X_n=j, X_m=k \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} P(X_m=k \mid X_0=i) P(X_n=j \mid X_m=k, \cancel{X_0=i})$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)}, \quad \forall\, 0 \le m \le n,$$

$\Leftrightarrow$.

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}, \quad \forall\, 0 \le m \le n.$$

$$\xRightarrow{P^{(1)}=P.} P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)} = P^2 P^{(n-2)} = \dots = P^n \cdot \underbrace{P^{(0)}}_{= I}.$$

δηλ. $\boxed{P^{(n)} = P^n}$

π.χ. αν θέλουμε να υπολογίσουμε στο τέλος της $2^{ης}$ και $4^{ης}$ εβδομάδας, το Πλαίσιο να έχει μηδενικό απόθεμα.

$$P^{(2)}_{30} = (P^2)_{30}, \quad P^{(4)}_{30} = (P^4)_{30}$$

7 Περιθώριες πιθανότητες / κατανομή.

$$P(X_n=j) = \sum_{i=0}^{M-1} P(X_0=i)P(X_n=j \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} a_i P_{ij}^{(n)} \quad , \forall j \in S, \ \forall n \geq 0.$$

και $\left(P(X_0=i)\right)_{i\in S} = a \longrightarrow$ αρχικό διάνυσμα πιθανοτήτων.

$P_n \equiv \left(P(X_n=j)\right)_{j\in S}$, τότε. $P_0 = a$

$$P_n = aP^{(n)} = aP^n \qquad \left[a, aP, aP^2, \ldots, aP^n, \ldots\right]$$

Στο παράδ. αποθεμάτων. $a = (0,0,0,1)$

$$a_3 = 1$$

$$P(X_n = 2) = P^{(n)}_{32} = (P^n)_{32}.$$