1

Αναμενόμενο μέσο κόστος / μονάδα χρόνου

$$X_t \longrightarrow C(X_t) \in \{ C(0), C(1), \dots, C(M) \}$$

κόστος στη X_t.

- αναμενόμενο μέσο κόστος για τις πρώτες n- περιόδους

$$E\Big[\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)}_{\text{μέσος κόστος στις } n\text{- περιόδους}}\Big] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E[C(X_t)]$$

αναμενόμενο

[αδιαχ. + επαναληπτ. μ.α.]

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{M} a_i \cdot \sum_{j=0}^{M} C(j) \sum_{t=1}^{n} P_{ij}^{(t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{\sum_{j=0}^{M} C_j \pi_j}$$

$$= E_{\pi}[C(X_\infty)]$$

π_j : • οριακό ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j (αποδεικν.)

• μακροπρόθεσμη μέση τιμή του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j (*).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t) \xrightarrow{a.s.} \sum_{j=0}^{M} \pi_j C(j)$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα αποθεμάτων : κόστος αποθήκευσης.

$$C(X_t) = \begin{cases} 0 & ; \; X_t = 0 \\ 2 & ; \; X_t = 1 \\ 8 & ; \; X_t = 2 \\ 18 & ; \; X_t = 3 \end{cases}$$

Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο κόστος σε σταθερότητα.

$\Downarrow$

$$= E_\pi\left[C(X_t)\right] = \sum_{j=0}^{M} \pi_j \, C(j)$$

$$= 0.286 \times 0 + 0.285 \times 2 + 0.263 \times 8 + 0.166 \times 18 = 5.662$$

④ Επέκταση για πιο πολύπλοκες συναρτήσεις κόστους ④

π.χ. + επιπρόσθετο κόστος από ζήτηση που δεν ικανοποιείται για εβδομάδα t.

$$C(X_{t-1}, D_t)$$

$\Longrightarrow$ αναμενόμενο μέσο κόστος σε στασιμότητα:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_{t-1}, D_t)\right) = E_\pi\, C(X_{t-1}, D_t)$$

$$E\left[E\left[C(X_{t-1}, D_t) \mid X_{t-1}\right]\right]$$

Ορίζουμε

$$K(j) = E\left[C(j, D_t) \mid X_{t-1} = j\right], \forall j = 0, \dots, M$$

$\Rightarrow$

$$E_\pi\left[C(X_{t-1}, D_t)\right] = \sum_{j=0}^{M} K(j)\cdot \pi_j$$

Πρόβλημα αποθεμάτων

5

Κόστος παραγγελίας : $10 + 25 \cdot z$ για παραγγελία z μονάδων ($)

Ποινή για ανικανοποίητη ζήτηση : 50 ∀ μονάδα που χάνεται.

Με δεδομένη πολιτική παραγγελιών

$$C(X_{t-1}, D_t) = \begin{cases} \overbrace{10 + 25 \cdot 3}^{85} + 50 \cdot \max\{D_t - 3, 0\}, & X_{t-1} = 0 \\ 50 \cdot \max\{D_t - X_{t-1}\}, & 1 \leq X_{t-1} \leq 3 \end{cases}$$

$$k(0) = E[C(0, D_t)] = 85 + 50 \cdot E[\max\{D_t - 3, 0\}]$$

$$= 85 + 50 \cdot \sum_{k=4}^{+\infty} (k-3) \cdot P(D_t = k) = 85 + 50 \cdot (P(D_t = 4) + 2P(D_t = 5) + \ldots)$$

$K(0) \cong 86.2$

- $K(1) = E\left[G'(1, D_t)\right] = 50 \cdot E\left[\max\{D_t - 1, 0\}\right]$

$$= 50 \cdot \left[P(D_t = 2) + 2P(D_t = 3) + 3P(D_t = 4) + \dots\right]$$

$$\cong 18.4.$$

- $K(2) \cong 5.2$
- $K(3) \cong 1.2$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{j=0}^{3} K(j)\,\pi_j = 86.2 \times 0.286 + 18.4 \times 0.285 + 5.2 \times 0.263 + 1.2 \times 0.166 \cong 31.46 \,\$$$

Ασκήσεις

16.2.1

$P(\text{βροχή} \mid \text{βροχή}) = 0.5$.

$P(\text{λιακάδα} \mid \text{λιακάδα}) = 0.9$.

(α) Γιατί μαρκοβιανή ?

[από υποθέσεις πρέπει ν.δ.ο.

$\Rightarrow X_{t+1} \mid X_t, \cancel{X_{t-1}, \ldots,} X_0$.

(β) πίνακας μετάβασης.

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{αν βρέχει} \\ 1, & \text{αν λιακάδα} \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

16.5.1.

8

Δίνεται $P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$.

Να βρεθούν οι στάσιμες πιθανότητες.

Λύση

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi P = \pi \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 . \end{array}}$$

$\pi P = \pi \iff$

$$(\pi_0 \ \ \pi_1) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} = (\pi_0 \ \ \pi_1) \iff$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\pi_0 + (1-\beta)\pi_1 = \pi_0 \\ (1-\alpha)\pi_0 + \cancel{\beta\pi_1} = \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 . \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} (1-\alpha)\pi_0 = (1-\beta)\pi_1 \\ \pi_1 = 1 - \pi_0 \end{array} \Big\} \iff$$

$0 < \alpha, \beta < 1$

$$\iff \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}\,\pi_1 \\[2ex] \pi_1 = 1 - \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}\,\pi_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}\,\pi_1 \\[2ex] \left(1 + \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}\right)\pi_1 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}\,\pi_1 \\[2ex] \pi_1 = \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} \end{cases} \iff \boxed{\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} \\ \pi_1 &= \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} \end{aligned}}$$

9

Άσκηση 16.5.5.

- ανάγκη σε νοσοκομείο για AB−
- Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ζήτηση ανά 3 μέρες :

$$\boxed{P(D=0)=0.4,\ P(D=1)=0.3,\ P(D=2)=0.2,\ P(D=3)=0.1}$$

$$\Rightarrow \quad E(D) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = \boxed{1}$$

- παράδοση αίματος γίνεται στο νοσοκομείο μόνο κάθε 3 μέρες

πολιτική νοσοκομείου : Παραγγελία 1 φιάλη κάθε φορά
+ επείγουσα παραγγελία με μεγάλο κόστος αν υπάρξει επιπλέον ζήτηση.

→ κάθε φορά θα χρησιμοποιείται η πιο παλιά φιάλη
+ αν μείνει αδιάθετη φιάλη για 21 μέρες τότε ← πετάγεται.

11

Έστω X_t = # φιαλών μετά την t-παράδοση $(X_t \geq 1)$
και $X_0 = 1$.

(α) Δείξτε ότι είναι μ.α. και βρείτε τον P

(β) να βρεθούν οι στάσιμες πιθανότητες

(γ) P_π (1 φιάλη να πεταχτεί σε διάστημα 3 μερών).

(δ) P_π ("μία επείγουσα παραγγελία να χρειαστεί μεταξύ τακτικών παραδόσεων")

Λύση

12

(α). αν $X_t = k \rightarrow k \geq 1$ (αφού κάθε εβδομάδα γίνεται παράδοση)

φιάλες.

$$\begin{array}{cl}
1 & \rightarrow \text{ηλικία } 0 \text{ περιόδων (μόλις έφτασε)} \\
+\,1 & \rightarrow \text{ηλικ. } 1 \text{ περιοδ.} \\
+\,1 & \rightarrow \text{ηλικ. } 2 \text{ περιοδ.} \\
\vdots & \quad \vdots \\
+\,1 & \rightarrow \text{ηλικ. } k-1 \text{ περιοδ.}
\end{array}$$

k-φιάλες

Υπόθεση: αν φτάσει 21 μέρες πετιέται → 7 περιόδους.

θέλουμε $k-1 \leq 6 \Rightarrow \boxed{k \leq 7}$.

$\Rightarrow X_t \in \{1, 2, \dots, 7\}$ → χώρος καταστάσεων.

Έστω D_t: η ζήτηση την t-περίοδο.

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{X_t + \overset{\text{παραγ.}}{1} - \overset{\text{ζήτ.}}{D_t},\ 1\}, & 1 \le X_t \le 6 \\ \begin{cases} 7, & D_t = 0 \text{ ή } 1 \\ 6, & D_t = 2 \\ 5, & D_t = 3 \end{cases}, & X_t = 7 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ μαρκοβιανή ιδιότητα. ✓

π.χ. αν $X_t = 1$ $\quad P_{11} = P(D_t > 0) = 1 - P(D_t = 0) = 0.6$

$$P_{12} = P(D_t = 0) = 0.4.$$

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

14

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

14

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

(16) ~~(16)~~ άσκηση

15

να βρεθούν οι στάσιμες πιθ.

$\pi_1 = 0.139$

$\pi_2 = 0.139$

$\pi_3 = 0.139$

$\pi_4 = 0.138$

$\pi_5 = 0.141$

$\pi_6 = 0.130$

$\pi_7 = 0.174$

16

(γ) Γ : "1 φιάλη να πεταχτεί σε διάστημα 3 ημερών"

$$\Gamma = \{X_t = 7, D_t = 0\}$$

$$P(\Gamma) = P_\pi(X_t = 7, D_t = 0)$$

$$= P_\pi(X_t = 7) \cdot P(D_t = 0 \mid \cancel{X_t = 7})$$

$$= \pi_7 \cdot P(D_t = 0) = 0.174 \times 0.4$$

$$= 0.0696 \text{ ή } 6.96\%$$

δηλ. 1 φιάλη πετιέται στο 6,96 % των περιόδων.

17

δηλ. κατά μέσο όρο

1 φορά κάθε $\dfrac{1}{0.0696} \simeq 14.37$ περιόδους.

ή $3 \times 14.37 \simeq 43$ μέρες.

(δ) Δ: " μια επείγουσα παραγγελία να χρειαστεί μεταξύ τακτικών παραδόσεων "

$$\Delta = \{ X_t < D_t \}$$

$$P(\Delta) = P_\pi(X_t < D_t) = \sum_{i=1}^{2} P_\pi(X_t = i)\, P(D_t > i \mid \cancel{X_t = i})$$

$$= \boxed{\pi_1 P(D_t > 1) + \pi_2 P(D_t > 2)} \simeq 0.0695$$

ή 6.95 %

0 Εισαγωγικά:

Εκτός απο την απλή περιγραφή ενός συστήματος, η εξέλιξη του οποίου περιγράφεται από μια μ.α., πολλές φορές μπορούμε να παρέμβουμε στο σύστημα σε κάθε χρονική περίοδο και να παίρνουμε αποφάσεις που αλλάζουν τις πιθανότητες μετάβασης της μ.α και τις τιμές της συνάρτησης κόστους που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Για κάθε μία από τις καταστάσεις, πολλές (17)
φορές έχουμε ένα σύνολο εναλλακτικών ενεργειών
που θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε να
πράξουμε και ο στόχος είναι να κινηθούμε
βέλτιστα, δηλ. να βρούμε τη βέλτιστη
διαδικασία αποφάσεων που συνδέεται
με την εκάστοτε μ.α. και συνάρτηση
κόστους. Μία τέτοια διαδικασία,
λέγεται μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων.

Μ. Δ. Α.

1 Παράδειγμα

Ένας κατασκευαστής έχει μια κύρια μηχανή στην καρδιά μιας παραγωγικής διαδικασίας. Στο τέλος κάθε εβδομάδας γίνεται επιθεώρηση και η μηχανή βρίσκεται σε κάποια από τις καταστ

0 ⟶ λειτουργεί σαν καινούρια

1 ⟶ λειτουργική με μικρή χειροτέρευση

2 ⟶ λειτουργική με μεγάλη χειροτέρευση

3 ⟶ όχι λειτουργική [βλάβη ή μη αποδεκτή ποιότητα παραγωγής].

Χωρίς κάποια παρέμβαση έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι η κατάσταση της εξελίσσεται ως μ.α. με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρείστε ότι η κατάσταση 3 είναι απορροφητική. Εδώ εξετάζεται ένα σύνολο στρατηγικών και υπολογίζονται αναμενόμενα κόστη.

Πίνακας 1.

απόφαση	Κατάστ.	Αναμ. κόστος λόγω παραγ. ελαττ. ανικ	κόστος συντήρησης	κόστος χαμένης παραγωγής	Συνολικό κόστος/εβδομάδα
1: ΔΕΝ ΚΑΝΩ ΤΙΠΟΤΑ	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2: ΕΠΙΣΚΕΥΗ	2	0	2000	2000	4000
3: ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	1,2,3	0	4000	2000	6000

2 Μοντέλο μ.δ.α.

23

1) παρατηρούμε την κατάσταση i μετά από κάθε μετάβαση.

2) μετά την παρατήρηση, μια απόφαση (ενέργεια) K επιλέγεται μέσα από ένα σύνολο K δυνατών αποφάσεων. Κάποιες μπορεί να αποκλείονται.

3) Η απόφαση $d_i = K$ [$d_i \rightarrow$ decision for the i-th state.] τότε αυτή επιφέρει ένα άμεσο κόστος με μέση τιμή C_{iK}

4) Η απόφαση $d_i = K$ καθορίζει επίσης τις πιθανότητες μετάβασης του επόμενου βήματος. Συμβολικά γράφουμε $P_{ij}(K)$

24

5) κάθε προσδιορισμός αποφάσεων $(d_0, d_1, \ldots, d_M)$ καθορίζει μια πολιτική R για τη μ.δ.α.

6) ο στόχος είναι η εύρεση βέλτιστης πολιτικής σύμφωνα με κάποιο κριτήριο κόστους.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το μέσο κόστος / χρονική μονάδα σε στασιμότητα.

Παρατήρηση:

Τα είδη της πολιτικής που χρησιμοποιούμε:

στάσιμη πολιτική: $d_i(t) = k_i \longrightarrow$ ανεξ. του t.

ντετερμινιστική πολιτική: $i \xrightarrow{\text{decision}} k_i$ (χωρίς κατανομή πιθανότητας).

Συμβολικά γράφουμε και

$d_i(R)$ όταν θέλουμε να δηλώσουμε την απόφαση που παίρνουμε στην κατάσταση i κάτω από την πολιτική R.

Σημαντικό !

Συγκρίνονται ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ και ΟΧΙ αποφάσεις μεμονωμένες

Πίνακας 2.

Πολιτική	Περιγραφή	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Αντικατάσταση στην κατ. 3	1	1	1	3
R_b	Αντικατάσταση στην 3 + επισκευή στην 2.	1	1	2	3
R_c	Αντικατασ. στις 2 και 3	1	1	3	3
R_d	Αντικατασ. στις 1,2 και 3.	1	3	3	3

Συμπεραίνουμε ότι

$(d_0(R_a), d_1(R_a), d_2(R_a), d_3(R_b)) = (1, 1, 1, 3)$. κ.λ.π.