Επιχειρησ. Έρευνα - Στοχαστικά Υποδείγματα.

- Δυναμικός Προγραμματισμός
  - → Ντετερμινιστικός (1 Δ)
  - → Στοχαστικός (1 Δ)
- Μαρκοβιανές Αλυσίδες (2 Δ)
- Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων (1.5 Δ)

\+ Επαναληπτικές Ασκήσεις.

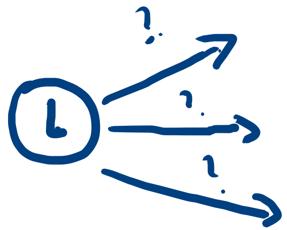
<u>Βιβλιογραφ.</u>: Introduction to Operation Research (Hillier-Lieberman) κεφ. 11 — 16 — 21.

Ενότητα 1

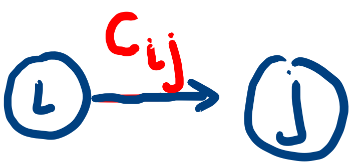
Δυναμικός Προγραμματισμός

- Ο Δυναμ. Προγραμ. είναι ένας γενικός τρόπος προσέγγισης για την επίλυση προβλημάτων που μπορούν να λυθούν με τις μεθόδους του και αφορούν τον καθορισμό ενός βέλτιστου συνδυασμού αποφάσεων που επιλέγουμε ανάμεσα σε ένα σύνολο αλληλοσυσχετιζόμενων αποφάσεων.
- Δεν υπάρχει συγκεκριμένος μαθηματικός φορμαλισμός ενός προβλήματος Δυναμικού Προγραμματισμού παρά ένα σύνολο κοινών χαρακτηριστικών αυτών των προβλημάτων που κατανοούνται μέσω παραδείγματος.

(i) : πόλη (πολιτεία), $i \in \{A, \ldots, J\}$.



: δυνατές διαδρομές που μπορούν να επιλεγούν με πόλη αναχώρησης την i.



: κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε ένα ταξίδι από την πόλη i στην πόλη j με ένα κόστος c_{ij}.

*. Το κόστος σχετίζεται με τις πολιτικές ασφάλειας ζώνης. Όσο πιο χαμηλό, τόσο μικρότερος ο κίνδυνος επίθεσης από τους ληστές.

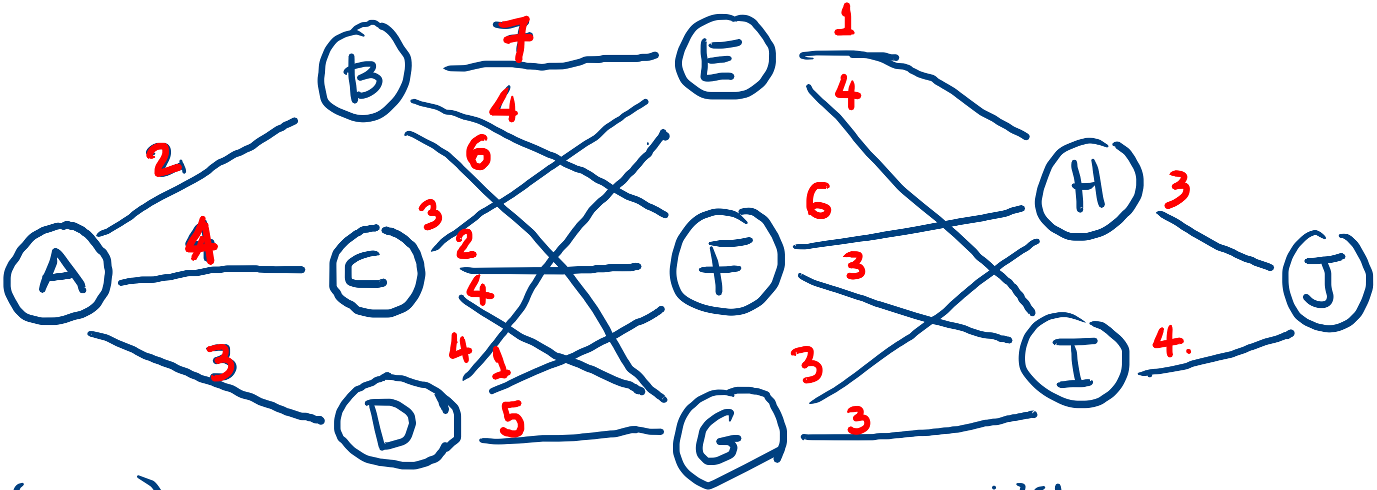
Στόχος: ο Τυχοδιώκτης αναζητά τη διαδρομή με το μικρότερο δυνατό συνολικό κόστος, δηλ. την πιο ασφαλή διαδρομή.

1

Πρότυπο παράδειγμα Δυναμικού Προγραμματισμού

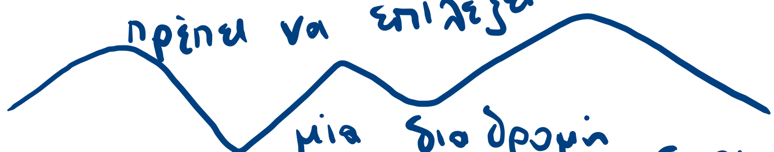
3

Το πρόβλημα της άμαξας – stagecoach problem



(1850)
ένας τυχοδιώκτης ξεκινά
από το Missouri (A)
με μία άμαξα.

πρέπει να επιλέξει



μία διαδρομή

J θέλει να φτάσει εδώ
→ California
επιλέγοντας την πιο ασφαλή διαδρομή.

Πρώτη Σκέψη: προφανώς το να επιλέξουμε μία "μυωπική" πολιτική, όπου σε κάθε στάδιο επιλέγουμε να κινηθούμε στην πόλη που αντιστοιχεί το μικρότερο κόστος (σε ένα βήμα) μπορεί να μη μας οδηγήσει στη βέλτιστη διαδρομή. Εμείς θέλουμε τη διαδρομή που επιτυγχάνεται το μικρότερο δυνατό συνολικό κόστος και στα 4 στάδια.

π.χ.

$$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} F \xrightarrow{3} I \xrightarrow{4} J \quad (\text{συνολ}: 13)$$

όμως η διαδρομή:

$$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} I \xrightarrow{4} J \quad (\text{συνολ}: 11)$$

Άρα πρέπει να βρούμε ένα βέλτιστο τρόπο ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ

5

Η τεχνική επίλυσης του προηγ. προβλήματος στηρίζεται σε μία αναδρομική διαδικασία προς τα πίσω [βασική αρχή Δυναμικού Προγραμματισμού]

$\boxed{\text{Λύση – Συμβολισμοί.}}$

x_n : μεταβλητή απόφασης $(n=1,2,3,4)$ για τον προορισμό στο στάδιο n. Τότε θα σχηματίζεται η ακολουθία αποφάσεων $A \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 = J$

$f_n(s_n, x_n)$: είναι το συνολικό κόστος της διαδρομής που προκύπτει αν ξεκινήσουμε στο στάδιο n, στην κατάσταση s_n, επιλέξουμε προορισμό x_n και κινηθούμε βέλτιστα στα επόμενα στάδια, δηλ. από το $n+1$ και πέρα.

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n} f_n(s_n, x_n) = f_n(s_n, x_n^*)$$

δηλ. η x_n^* ελαχιστοποιεί την $f_n(s_n, x_n)$

[όχι κατ' ανάγκη μοναδικό].

Εδώ έχουμε ότι

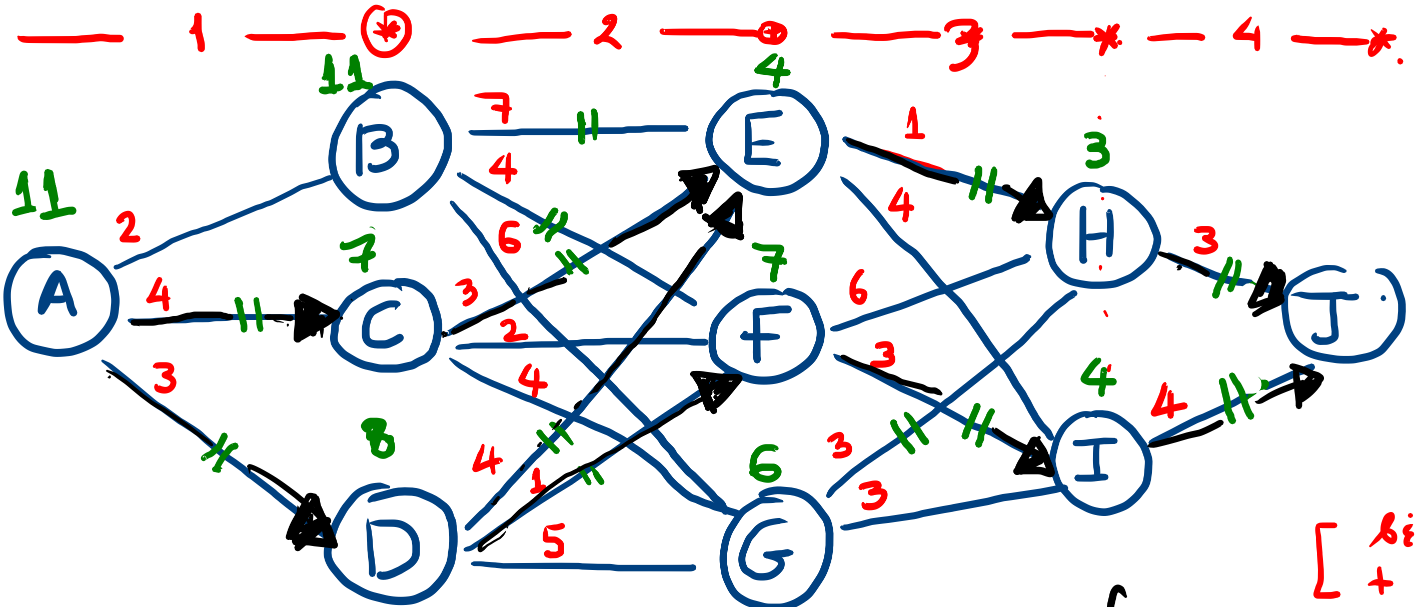
$$\boxed{f_n(s_n, x_n) = \underbrace{c_{s_n x_n}}_{\text{(άμεσο κόστος)}} + \underbrace{f_{n+1}^*(x_n)}_{\text{βέλτιστο κόστος από } n+1 \text{ και μετά}}, \quad \underline{x_n = s_{n+1}}}$$

Αυτή είναι η αναδρομή προς τα πίσω.

Η λύση του προβλήματος Δυναμ.-Προγραμματισμού θα είναι το $f_1^*(\underset{=s_1}{A})$ που αντιστοιχεί στη βέλτιστη τιμή.

και φυσικά χρειαζόμαστε τη/τις διαδρομές που πετυχαίνουν το $f_1^*(A)$.

Στάδια



[βέλτιστη τιμή + αποφάσεις]

βέλτιστη τιμή $f_1^*(A) = 11$: βέλτιστες διαδρομές

- $A \to C \to E \to H \to J$
- $A \to D \to E \to H \to J$
- $A \to D \to F \to I \to J$

στάδιο 4 (μοναδική επιλογή → J). 8

εκκιν :

H : $f_4^*(H) = 3$, $x_4^* = J$

I : $f_4^*(I) = 4$, $x_4^* = J$

στάδιο 3

εκκιν :

E : $f_3^*(E) = \min_{x_3} \{ C_{Ex_3} + f_4^*(x_3) \} = 4$, $x_3^* = H$

F : $f_3^*(F) = \min_{x_3} \{ C_{Fx_3} + f_4^*(x_3) \} = 7$, $x_3^* = I$.

G : $f_3^*(G) = \min_{x_3} \{ C_{Gx_3} + f_4^*(x_3) \} = 6$, $x_3^* = H$

... συνέχισε για να βρεις το $f_1^*(A)$ + όλες τις διαδρομές.

2 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

1) Το πρόβλημα χωρίζεται σε στάδια (βήματα), όπου μία απόφαση (πολιτική) απαιτείται σε κάθε στάδιο.

2) Κάθε στάδιο έχει έναν αριθμό δυνατών καταστάσεων στην αρχή του σταδίου. [πεπερασμένο ή άπειρος αριθμός]

3) Η πολιτική σε κάθε στάδιο οδηγεί σε μία μετάβαση (αλλαγή κατάστασης). από την παρούσα σε μία επόμενη, που θα γίνει με τη σειρά της η αρχική του επόμενου σταδίου.

4) Αναζήτηση βέλτιστης πολιτικής συνολικά για το πρόβλημα. Σε κάθε στάδιο και ∀ δυνατή κατάσταση καθορίζεται μία βέλτιστη πολιτική αποφάσεων.

5) Η βέλτιστη πολιτική για τα υπολειπόμενα βήματα. (10)

είναι ανεξάρτητη των αποφάσεων που έχουμε πάρει στα προηγούμενα βήματα

[αρχή βελτιστότητα του Δ.Π.].

Δεδομένης μια παρούσης κατάστασης, η βέλτιστη πολιτική για τα υπολειπόμενα στάδια, είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο με τον οποίο φτάσαμε σε αυτήν τη κατάσταση [η μαρκοβιανή ιδιότητα].

6) Ξεκινάμε βρίσκοντας τη βέλτιστη πολιτική του τελευταίου σταδίου.

↳ συνήθως τετριμμένη.

7) **αναδρομική σχέση** για να βρούμε βέλτιστη πολιτική στο στάδιο-n, δοθείσης της βέλτιστης πολιτικής στο στάδιο-n+1.

για το πρόβλημα της άμαξας:

$$f_n^*(S_n) = \min_{x_n} \left\{ C_{S_n x_n} + f_{n+1}^*(x_n) \right\},$$

Γενικότερα, αν $f_n^*(S_n) = f_n(S_n, x_n^*)$, τότε αναδρ. σχέση

$$f_n^*(S_n) = \max_{x_n} \left\{ f_n(S_n, x_n) \right\} \text{ ή } \min_{x_n} \left\{ f_n(S_n, x_n) \right\}.$$

όπου $f_n(S_n, x_n)$ συνάρτηση του S_n, του x_n και $f_{n+1}^*(S_{n+1})$ αλλά και κάποιου μέτρου συνεισφοράς του x_n στη συνάρτ. κόστους

8) Λύση αναδρομικά προς τα πίσω

$n = N, N-1, \ldots, 1$ μέχρι

να βρούμε τη συνολική βέλτιστη λύση.

Ντετερμινιστικός Δυναμικός Προγραμματισμός

• **Ντετερμινιστικά προβλήματος** (δομή).

στάδιο n στάδιο $n+1$.

Κατάσταση: $S_n \xrightarrow{x_n} S_{n+1}$

Τιμή $f_n(S_n, x_n) =$ συνεισφορά των x_n $+ f^*_{n+1}(S_{n+1})$

• Η κατάσταση S_{n+1} καθορίζεται πλήρως από την παρούσα S_n και την πολιτική x_n [vs κατανομή πιθανότητας]

• Τύποι προβλημάτων Ν.Δ.Π.

— διαφορετικές μορφές αντικειμ. συνάρτησης
(άθροισμα, γινόμενο, άλλης συναρτ. μορφής...)

— διακριτός ή συνεχής χώρος καταστάσεων

• **Παράδειγμα**

Κατανομή ιατρικών ομάδων σε χώρες

WHC : 5 ιατρικές ομάδες ⟶ 3 χώρες
World Health Council.
με στόχο τη βελτίωση της υγείας / εκπαίδευση...

• μέτρο απόδοσης (αποτελεσματικότητας) :
επιπρόσθετα χρόνια ζωής
= πληθυσμός × αύξηση Μ.Ο. ζωής.

Πίνακας : 11.1 για ακριβή νούμερα.

Πρόβλημα : $\max \sum_{i=1}^{3} P_i(x_i)$, υπό περιορισμούς.

$\sum_{i=1}^{3} x_i = 5$, $x_i \geq 0$ + θετικοί ακέραιοι, όπου

x_i = # ομάδων που κατανέμονται στη χώρα i. $1 \leq i \leq 3$.

εδώ ένα στάδιο αντιστοιχεί σε μία χώρα

$P_i(x_i)$ = μέτρο απόδοσης x_i μονάδων στη χώρα i.

Δομή του προβλήματος ως πρόβλημα Ν.Δ.Π.

στάδιο n. στάδιο $n+1$.

κατάσταση : $s_n \xrightarrow{x_n} s_n - x_n$

τιμή : $f_n(s_n, x_n)$. $p_n(x_n)$. $f^*_{n+1}(s_n - x_n)$

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_n - x_n).$$

αναδρ. σχέση :

$$f^*_n(s_n) = \max_{0 \le x_n \le s_n} \left\{ p_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_n - x_n) \right\}.$$

$n = 1, 2$.

για $n = 3$, $f^*_3(s_3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le s_3} p_3(x_3)$

[Λύση σελ: 545-548]

Παρατήρηση :

Το προηγούμενο πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση των προβλημάτων κατανομής πόρων [Distribution of Effort Problem].

1 διαθέσιμη πηγή → δραστηρ. 1.
→ δραστηρ. 2.
⋮
→ δραστηρ. N.

Ερώτημα :
Ποιός είναι ο βέλτιστος τρόπος κατανομής ?

αναγκαία συνθήκη : η προσθετικότητα.

Παράδειγμα (κατανομή επιστημόνων σε ερευνητικές ομάδες.) 17

3 ερευνητ. ομάδες $\longrightarrow$ 3 διαφορετικές προσεγγίσεις.

P_i : πιθανότητα αποτυχίας της ομάδας i

$$P(\text{αποτυχ. προγραμμ.}) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \underset{p_1}{0.4} \times \underset{p_2}{0.6} \times \underset{p_3}{0.8} = 0.192$$

$\hookrightarrow$ <u>Παρέμβαση</u> : 2 διακεκριμ. επιστήμονες θέλουμε να τοποθετηθούν στις ομάδες με βέλτιστο τρόπο, ώστε ελαχιστ. της πιθαν. αποτυχ. του προγραμμ.

(18)

Ερώτημα:

Ποιά είναι η βέλτιστη τοποθέτηση ?

Πρόβλημα: $\min \prod_{i=1}^{3} P_i(X_i)$, υπό περιορισμούς.

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 2 \quad , \quad X_i \geq 0 \; . \; (+ \text{ ακέραιοι}).$$

$\Downarrow$

⋮

αναδρ. σχέση.

$$f_n^*(S_n) = \min_{X_n = 0,1,\ldots,S_n} \left\{ P_n(X_n) \times f_{n+1}^*(S_n - X_n) \right\}$$

$n = 1,2,3.$

$$f_4^*(S_n) = 1$$

Παρατήρηση

Τα 2 προηγούμενα προβλήματα κατανομής πόρων έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι είναι αντιστρέψιμα με την έννοια ότι θα μπορούσαμε να τα λύσουμε κινούμενοι μπροστά και όχι προς τα πίσω

[δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης]

Άσκηση 11.2.2.

20

Θέλουμε να τοποθετήσουμε πωλητές σε διάφορες περιοχές για τη μεγιστοποίηση του κέρδους

(6 πωλητές ; 3 περιοχές ; $\underbrace{\text{1 πωλητής σε κάθε περιοχή}}_{\text{περιορισμός}}$)

πίνακας αναμενόμενων αυξήσ. πωλήσεων.

Πωλητές \ Περιοχές	1	2	3
1	35	21	28
2	48	42	41
3	70	56	63
4	89	70	75

βήμα n = περιοχή n $(1 \leq n \leq 3)$

S_n = # πωλητών που είναι ακόμα διαθέσιμοι στο στάδιο n

X_n = # πωλητών που διατιθ. στο στάδιο n.

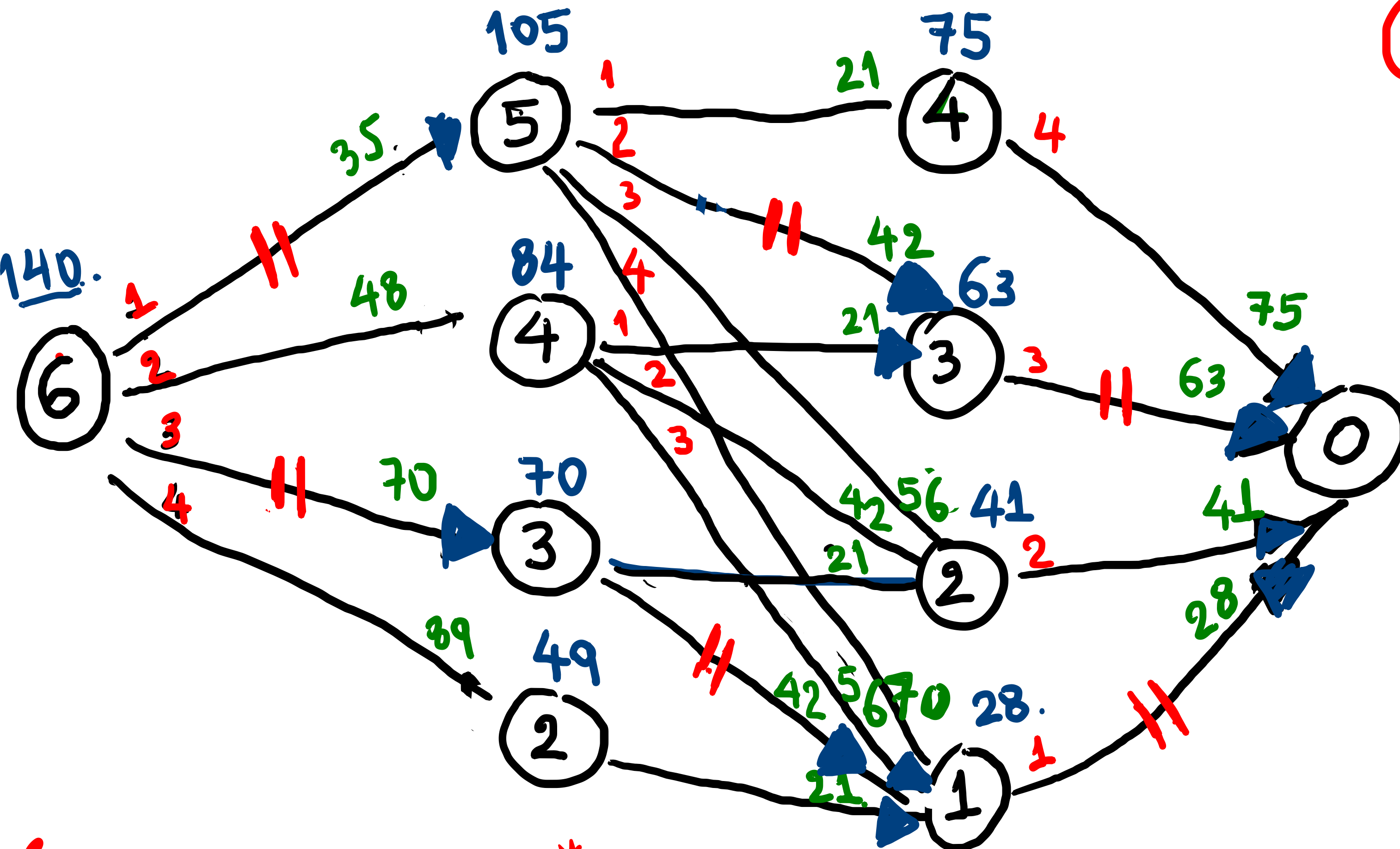
Εξισώσεις Βελτιστότητας

$$f_n^*(s_n) = \max_{1 \le x_n \le s_n + n - 3} \left\{ p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right\}.$$

$$\left[\; x_n + (3-n) \le s_n \; \right]$$

$p_n(x_n) =$ άμεσο κέρδος, δηλ. η αναμ. αύξηση των πωλήσεων στην περιοχή n με την τοποθέτ. x_n πωλητών.

σύμβαση: $f_4(s_4) = 0$



βέλτιστη λύση : $f_1^*(6) = 140$ με βέλτιστες πολιτικές

$6 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 0$

$6 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{1} 0$

Ασκ.

23

11.2.1 + 11.2.4 + 11.3.1 + 11.3.9. (α).

+ 11.3.11.

+ προβλ. $\underbrace{11.3.12.}$

Να μεγιστοπ. η $Z = 18x_1 - x_1^2 + 20x_2 + 10x_3$

υπο περιορ.

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 11$$

$x_i \geq 0$ + ακέραιοι.

[Λύση: 4-0-6 ; τιμή 66].

Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός.

Το παιχνίδι του Τσαουσέσκου — Βάλτε Γκολ στον Ντουκαντάμ.

→ Ο παιχνιδιάρης δικτάτορας αποφασίζει τις επόμενες μέρες να παίξει ένα παιχνίδι. Είναι διατεθειμένος να γυμνάζει και να πληρώσει παίκτες της Μπαρτσελόνα να χτυπήσουν πέναλτι στο Ντουκαντάμ για να τον δει να δέχεται γκολ.

↳ Ο στόχος του δικτάτορα είναι να παίξει το παιχνίδι αυτό, αλλά να πληρώσει το ελάχιστο δυνατό.

Κανόνες του παιχνιδιού

25

1. Θα καλέσει το πολύ 3 παίχτες.
   [Τον έναν μετά τον άλλο, αν χρειαστεί].

2. Ο n-παίχτης χτυπά μία σειρά από X_n πέναλτι (πρέπει να καθοριστεί). Αν μπεί τουλάχιστον ένα γκολ, τότε το παιχνίδι τελειώνει και δεν καλούνται οι επόμενοι παίχτες.

3. Κάθε παίχτης πληρώνεται 3.000 € για το κόστος | μεταφοράς του + την αμοιβή του

4. Ο Ντουκαντάμ πληρώνεται 1.000 £ για κάθε πέναλτι που χτυπιέται, και αν καταφέρει να τα πιάσει όλα, και από τους 3 παίχτες, παίρνει Bonus 16.000 €.

Σύμβαση: Θεωρούμε ότι σε κάθε πέναλτι που θα χτυπηθεί, αλλά και ανεξαρτήτως παίχτη που θα το χτυπήσει, έχουμε σταθερή πιθανότητα p, ο Ντουκαντάμ να πιάσει το πέναλτι, δηλ. να μη δεχθεί γκολ.

[ανεξαρτησία στα χτυπήματα των πέναλτι].

Αυτό το πρόβλημα λύνεται με Σ.Δ.Π.

Χρειάζεται να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος που υπεισέρχεται σε αυτό το πρόβλημα.

Μοντελοποίηση

στάδιο n = η σειρά των πέναλτι του n-παίχτη.

x_n = # πέναλτι που χτυπά ο n-οστός παίχτης.

S_n = # πέναλτι που υπολείπονται να μπούν για να τελειώσει το παιχνίδι.

$$S_n \in \{0, 1\}$$

$K(x_n)$ = κόστος του n-παίχτη $\longrightarrow$ $K(x_n) = \begin{cases} 0, & x_n = 0 \\ 3, & x_n > 0 \end{cases}$

$f_n(S_n, x_n)$ = συνολικό <u>αναμενόμενο</u> κόστος, αν ξεκινήσουμε στο στάδιο n, στην κατάσταση S_n, αποφασίσουμε x_n και κινηθούμε βέλτιστα από το στάδιο $n+1$ και πέρα.

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n \geq 0} f_n(s_n, x_n)$$

όπου $f_n^*(0) = 0$, $f_4^*(1) = 16$

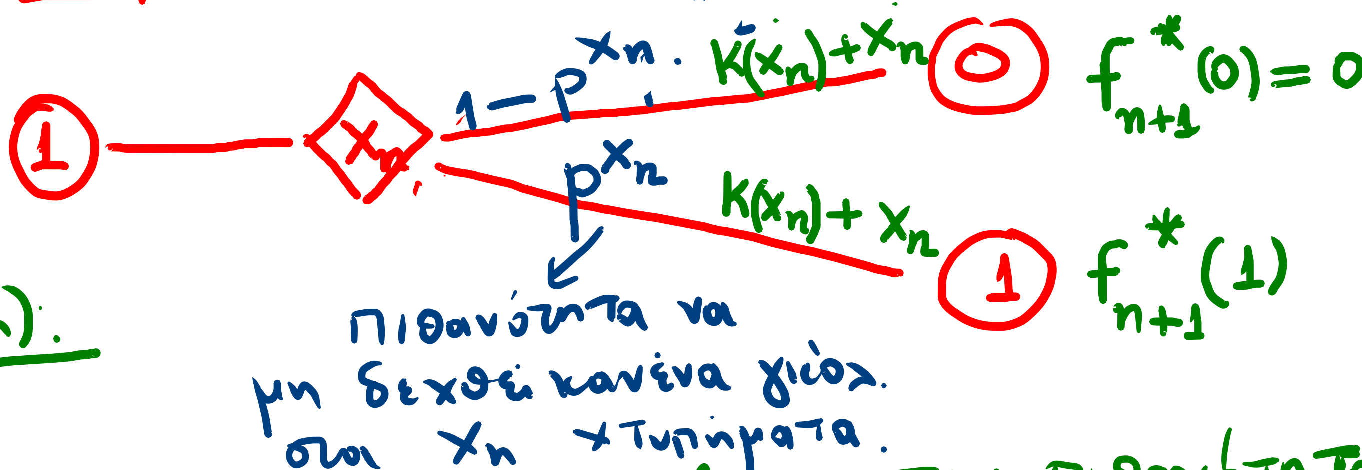
$(\forall n = 1,2,3,4)$.

Δομή ως πρόβλημα Σ.Δ.Π.

κατάστ.

Τιμή

$f_n(1, x_n)$.



Προσοχή! η απόφαση x_n μεταβάλλει την πιθανότητα μετάβασης στις καταστάσεις του επόμενου σταδίου

29

$$f_n(1, x_n) = E_{\substack{S_n, x_n \\ S_n = 1}}\Big[\underbrace{K(x_n) + x_n}_{\text{άμεσο κόστος.}} + f^*_{n+1}(S_{n+1})\Big]$$

$$= K(x_n) + x_n + P_0(1, x_n) f^*_{n+1}(0) + P_1(1, x_n) f^*_n(1)$$

$$= K(x_n) + x_n + (1 - p^{x_n}) \cdot 0 + p^{x_n} f^*_{n+1}(1).$$

$$= K(x_n) + x_n + p^{x_n} f^*_{n+1}(1).$$

$$\boxed{f^*_n(1) = \min_{x_n \geq 0} \left\{ K(x_n) + x_n + p^{x_n} f^*_{n+1}(1) \right\}.}$$

$$f^*_4(1) = 16$$

Καθορισμός Reject Allowances (30)

↳ σελ. 563 [ανοχής απόρριψης].

HITT-AND-MISS MANUFACTURING COMPANY που δέχεται εντολή να κατασκευάσει ένα αντικείμενο συγκεκριμένου τύπου.

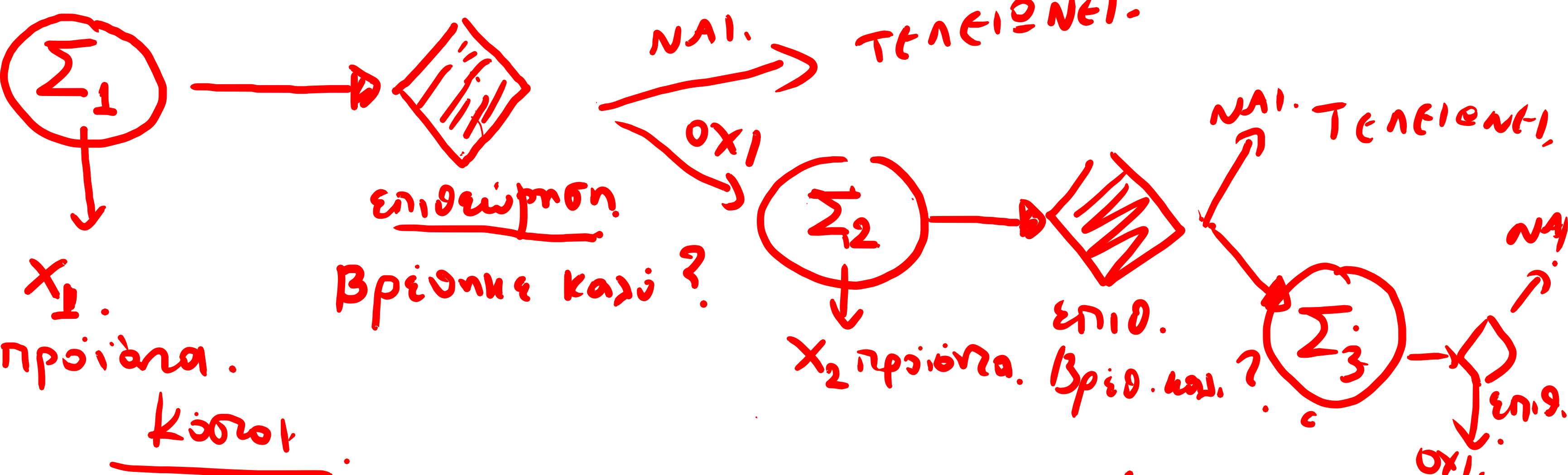
Ο πελάτης έχει αυστηρές προδιαγραφές και έτσι η εταιρεία αποφασίζει να παράξει παραπάνω από 1 (πιθαν. p, το προϊόν να είναι ελαττωματικό).

έξτρα προϊόντων σε 1 σειρά παραγωγής : reject allowance.

Δομή:

Σ_n : n-σειρά παραγωγής.

X_n : # προϊόντων που αποφασίζεται να παραχθούν



Κόστοι

$K(X_n)$ → κόστος από την εκκίνηση της διαδ. παραγωγής + X_n : κόστος 1 ∀ παραγόμενο προϊόν.

‖
3

πρόστιμο

16 (σε 100€)

Μοντελοποίηση

Ακριβώς ίδια με το παιχνίδι του Τσαουσίσκου.

Επίλυση για $p = \frac{1}{2}$

$$K(x_3) = \begin{cases} 0, & x_3 = 0 \\ 3, & x_3 > 0 \end{cases}$$

$n=3$.

$f_3(1, x_3) = K(x_3) + x_3 + 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$

s_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	-	-	-	-	-	$\cancel{0}$	0
1	16	12	9	8	8	8.5	8	3 ή 4

$n=2$.

$f_2(1, x_2) = K(x_2) + x_2 + f_3^*(1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$.

s_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(1)$	x_2^*
1	8	8	7	7	7.5	↗	7	2 ή 3.

$n=1 \to$ συμπληρώστε. $f_1^*(1) = 6.75$, $x_1^* = 2$

675 \$ για πρόβλ. παραγ., 6750 € Τσαουσ. $\left(p = \frac{1}{2}\right)$