Θέμα 1 :

Βήμα n : n-οστή μετακίνηση , $n=1,2,3$.

κατάσταση S_n : Το κελί που βρισκόμαστε πρίν τη n-οστή μετακίνηση.

απόφαση x_n : Το κελί που αποφασίζεται στη n-οστή μετακίνηση.

άμεσο κέρδος : η απόφαση x_n, μας οδηγεί σε αναμενόμενο κέρδος $r(x_n)$, που εξαρτάται μόνο απο το κελί που θα επισκεφτούμε.

κελί	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κέρδος	14	8	12	8	12	15	13,33	15	13,33

καθορίζεται απο $r(x_n) =$ # ερωτήσεων x αναμ. κέρδος ∀ ερώτηση

$=$ # ερωτήσεων x πιθ. επιτυχίας x κέρδος σωστής απάντησης

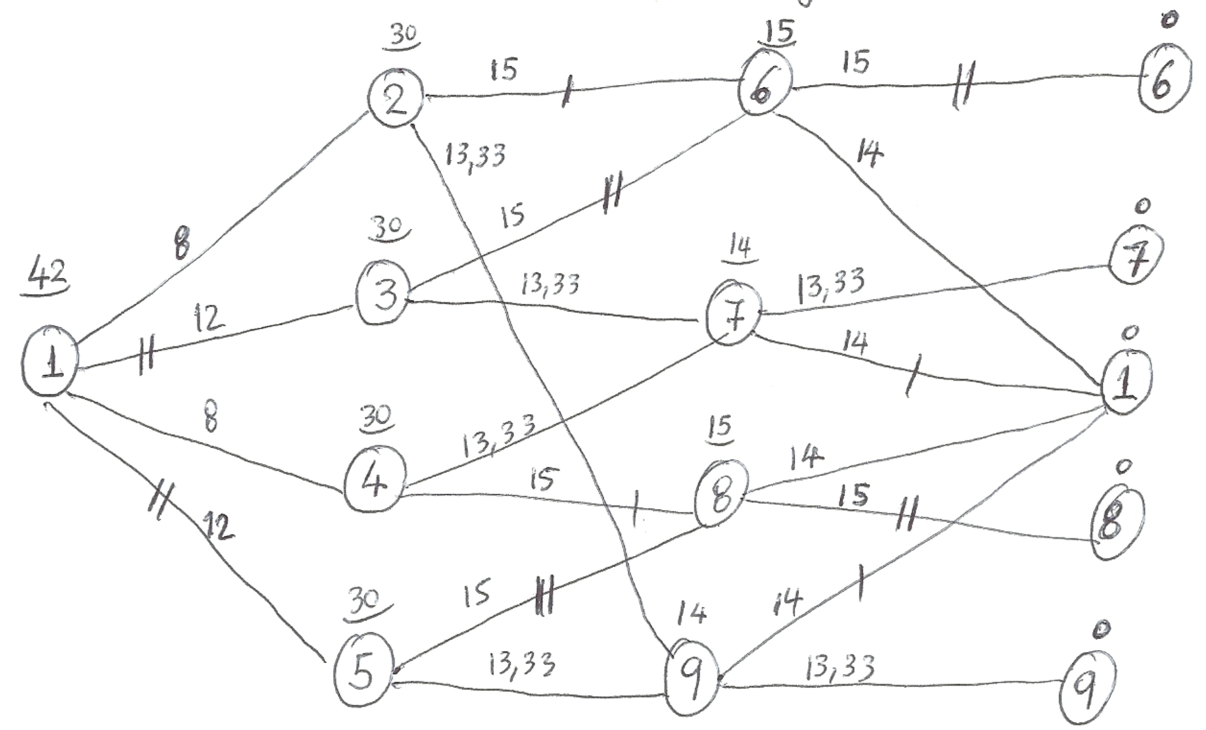
(δίνονται απο τον πίνακα στην εκφώνηση)

εξισώσεις βελτιστότητας (στόχος η μεγιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου κέρδους)

$$f_n^*(S_n) = \max_{\text{επιτρεπτά } x_n} \left\{ r(x_n) + f_{n+1}^*(S_{n+1}) \right\}, \quad \text{όπου}$$

$S_{n+1} = x_n$, $n=1,2,3$, και $S_1 = 1$. Θέτουμε $f_4^*(S_4) = 0$.

Τα επιτρεπτά x_n και S_n καθορίζονται απο το παρακάτω διάγραμμα.



Παίρνουμε 2 βέλτιστες διαδρομές $1 \to 3 \to 6 \to 6$

και $1 \to 5 \to 8 \to 8$

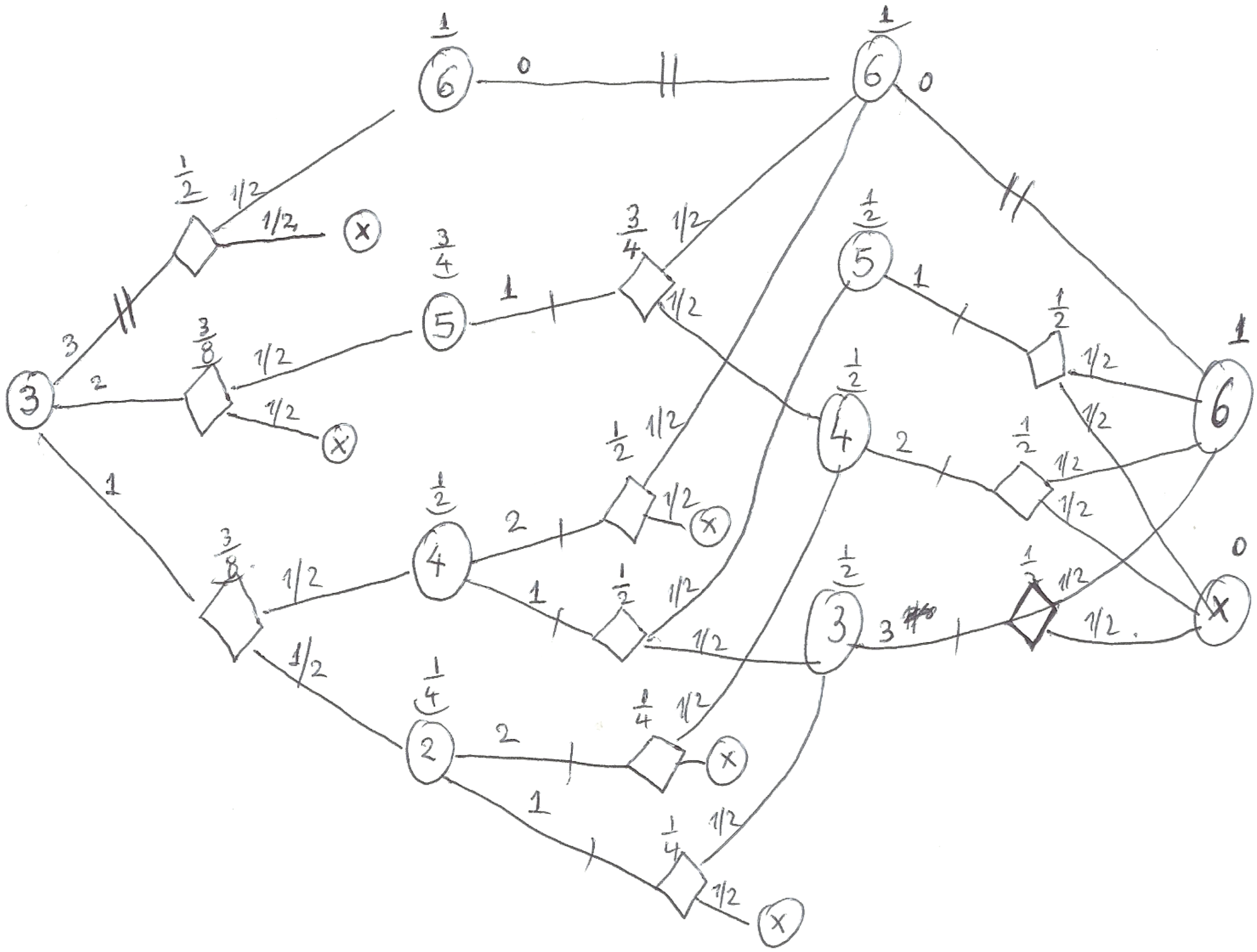
Θέμα 2:

Βήμα n : n-οστή φάση (ποντάρισμα)

Κατάσταση S_n: Το ποσό που έχει διαθέσιμο ο τζογαδόρος στη n-οστή φάση.

απόφαση x_n : το ποσό που στοιχηματίζει στη n-οστή φάση.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις οδηγούμαστε στο ακόλουθο διάγραμμα:
(καταστάσεων + κόμβων πιθανότητας)



$$f^*_n(S_n) = \max_{\substack{x_n:\\ 1\le x_n \le \min\{S_n,\,6-S_n\}}} \left\{ \frac{1}{2} f^*_{n+1}(S_n+x_n) + \frac{1}{2} f^*_{n+1}(S_n-x_n) \right\}.$$

Τελικά, να παίζει και τα 3 εκ. € στο 1ο ποντάρισμα είναι η καλύτερη στρατηγική με πιθ. επιτυχίας $\frac{1}{2}$.

Θέμα 3: Θέτουμε $(X_n)_{n\geq 0}$ τη στοχαστική διαδικασία

(α) της μεταβολής της τιμής σε ημερήσια βάση με

$X_n \in \{0,1\}$, ανάλογα αν η μεταβολή είναι πτωτική ή ανοδική αντίστοιχα. Σύμφωνα με τις υποθέσεις:

$$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=0) = \frac{1}{2} \\ P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=1) = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(X_n)_{n\geq 0} \text{ όχι μ.α.}}$$

- Μοντελοποίηση ως μ.α.

Ορίζουμε $(Y_n)_{n\geq 0}$ στοχ. διαδ. με $Y_n = (X_{n+1}, X_n)$.

Έχουμε $Y_n \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ και προκύπτει μ.α. με

$$P(Y_{n+1}=(0,0) \mid Y_n=(0,0)) = P(X_{n+2}=0, X_{n+1}=0 \mid X_{n+1}=0, X_n=0)$$
$$= P(X_{n+2}=0 \mid X_{n+1}=0, \cancel{X_n=0}) = \frac{2}{3}$$

$$P(Y_{n+1}=(0,1) \mid Y_n=(0,0)) = P(X_{n+2}=0, \underbrace{X_{n+1}=1 \mid X_{n+1}=0}_{\neq}, X_n=0) = 0$$

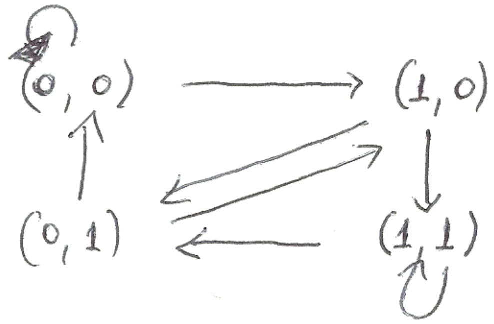
$$P(Y_{n+1}=(1,0) \mid Y_n=(0,0)) = P(X_{n+2}=1, X_{n+1}=0 \mid X_{n+1}=0, X_n=0) = \frac{1}{3}$$

και $P(Y_{n+1}=(1,1) \mid Y_n=(0,0)) = 0$.

Παρόμοια προκύπταν και τα υπόλοιπα και έχουμε ...

$$P = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

(β) διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης



$\Rightarrow$ (Y_n) είναι αδιαχώριστη μ.α.

Για ευκολία $(0,0) \longleftrightarrow 0$, $(0,1) \longleftrightarrow 1$, $(1,0) \longleftrightarrow 2$, $(1,1) \longleftrightarrow 3$.

στάσιμη κατανομή

Πρέπει $\pi P = \pi$ και $\sum_{i=0}^{3} \pi_i = 1$ $\xLeftrightarrow{\text{εξαιρούμε 1 εξίσωση}}$

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}\pi_0 + \tfrac{2}{3}\pi_1 &= \pi_0 \\ \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{2}{3}\pi_3 &= \pi_1 \\ \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{3}\pi_1 &= \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \pi_0 &= 2\pi_2 \\ \pi_1 &= \pi_2 \\ \pi_3 &= \tfrac{3}{4}\pi_2 \\ \tfrac{19}{4}\pi_2 &= 1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \pi_0 &= \tfrac{8}{19} \\ \pi_1 &= \tfrac{4}{19} \\ \pi_2 &= \tfrac{4}{19} \\ \pi_3 &= \tfrac{3}{19} \end{aligned}$$

Άρα $\pi = \left(\frac{8}{19}, \frac{4}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}\right)$

(γ) Βλέπουμε απ' ευθείας ότι $P_{(0,0),(0,0)} > 0$, άρα η (Y_n) είναι αδιαχώριστη + εργοδική μ.α.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} \leftarrow$$

block αναπαράσταση, όπου π όπως στο (β), το στάσιμο διάνυσμα.

(δ)

(i) μακροπρόθεσμο ποσοστό ημερών με άνοδο $= \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)} = \pi_{(1,0)} + \pi_{(1,1)} = \frac{7}{19}$

(ή $\pi_1 + \pi_3 = \pi_2 + \pi_3$)

μακροπρόθεσμο ποσοστό διαδοχικών ημερών με άνοδο $= \underset{\pi_3}{\underset{\parallel}{\pi_{(1,1)}}} = \frac{3}{19}$.

(α) • Μια πολιτική R καθορίζεται από ένα συνδυασμό αποφάσεων (d_{-1}, d_0, d_1) στις καταστάσεις -1, 0 και 1.

Χωρίς κανένα περιορισμό έχουμε $\boxed{d_i \in \{-1, 0, 1\}}$ που είναι οι δυνατές αποφάσεις k. Άρα έχουμε $3^3 = 27$ δυνατές πολιτικές.

• Από τις υποθέσεις είναι φανερό ότι

$$\boxed{C_{i,k} = -i + \frac{k}{2}} \quad , \forall\, i, k \in \{-1, 0, 1\}.$$

• Αν το πρόσημο της απόφασης συμβαδίζει με την πολιτική των πωλήσεων, τότε $R : (d_{-1}, d_0, d_1) = (-1, 0, 1)$

και από τις υποθέσεις $P(R) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$.

(β) • <u>στάσιμη κατανομή</u>

Λύνουμε $\pi P(-1) = \pi$ και $\sum_{i=-1}^{1} \pi_i = 1$. $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 0.1\,\pi_{-1} + 0.2\,\pi_0 + 0.2\,\pi_1 &= \pi_{-1} \\ \cancel{0.5\,\pi_{-1} + 0.4\,\pi_0 + 0.6\,\pi_1 = \pi_0} & \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{διαγραφ.}\\ \text{μια}\end{smallmatrix}\right) \\ 0.4\,\pi_{-1} + 0.4\,\pi_0 + 0.2\,\pi_1 &= \pi_1 \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \pi_{-1} + 2\pi_0 + 2\pi_1 &= 10\pi_{-1} \\ 2\pi_{-1} + 2\pi_0 + \pi_1 &= 5\pi_1 \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 9\pi_{-1} &= 2\pi_0 + 2\pi_1 \\ 2,\cancel{4}\,\pi_1 &= \cancel{2}\pi_{-1} + \cancel{2}\pi_0 \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2\pi_0 + 2\pi_1 &= 18\pi_1 - 9\pi_0 \\ 2\pi_1 &= \pi_{-1} + \pi_0 \\ \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{11}{16}\pi_0 \\ \pi_{-1} &= \left(\frac{11}{8} - 1\right)\pi_0 \\ \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{8} + 1\right)\pi_0 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \\ \pi_{-1} &= \frac{6}{33} \\ \pi_0 &= \frac{16}{33} \end{aligned} \Leftrightarrow \pi = (\pi_{-1}, \pi_0, \pi_1) = \left(\frac{6}{33}, \frac{16}{33}, \frac{11}{33}\right).$$

• μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος

$$E_{\pi(R)}(C') = \sum_{i=-1}^{1} \pi_i C_{i,-1} = \pi_{-1} C_{-1,-1} + \pi_0 C_{0,-1} + \pi_1 C_{1,-1}$$

$$= \frac{6}{33} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{33} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{33}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{43}{66}.$$

(γ) Βήμα 1 (Βήμα Προσδιορισμού Τιμών).

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$g = C_{i,-1} + \sum_{j=-1}^{1} P_{ij}(-1)\, U_j - U_i \,, \quad \forall i \in \{-1, 0, 1\},$$

με $U_1 = 0$. Όμως από (β), $g = E_{\pi(R)}(C') = -\frac{43}{66}$.

Άρα γίνεται σύστημα 2×2 με αγνώστους τα U_{-1} και U_0.
(οι 2 τελευταίες, $i=0$ και $i=1$)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{43}{66} &= -\frac{1}{2} + 0.2\, U_{-1} + 0.4\, U_0 - U_0 \quad (1) \\ -\frac{43}{66} &= -\frac{3}{2} + 0.2\, U_{-1} + 0.6\, U_0 \quad (2) \end{aligned}\right| \iff$$

$$\left.\begin{aligned} (1)-(2):&\quad 0 = -12\, U_0 + 10 \\ (1)+(2):&\quad -\frac{430}{33} = 4\, U_{-1} - 20 \end{aligned}\right| \iff \boxed{\begin{aligned} U_0 &= \frac{5}{6} \\ U_{-1} &= \frac{115}{66} \end{aligned}}$$

Βήμα 2 (Βήμα Βελτίωσης Πολιτικής). $\Rightarrow (-1, -1, 0)$ καλύτερη $\Downarrow$ $\boxed{\text{διευθυντής άδικο}}$

• $\boxed{i=-1}$ $\min_k \left\{ C_{-1,k} + P_{-1,-1}^{(k)} U_{-1} + P_{-1,0}^{(k)} U_0 \right\}$

Άρα $\min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} + 0.1 \times \frac{115}{66} + 0.5 \times \frac{5}{6}}_{\approx 1.09 \text{ (για } k=-1)}, \underbrace{1 + 0.5 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times \frac{5}{6}}_{>}, \underbrace{\frac{3}{2} + 0.3 \times \frac{115}{66} + 0.5 \times \frac{5}{6}}_{>} \right\}$.

• $\boxed{i=0}$ $\min_k \left\{ C_{0,k} + P_{0,-1}(k)\, U_{-1} + P_{0,0}(k)\, U_0 \right\}$

Άρα $\min_k \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2} + 0.2 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times \frac{5}{6}}_{\cong 0.1819 \text{ (για } k=-1)}, \underbrace{0 + 0.3 \times \frac{115}{66} + 0.5 \times \frac{5}{6}}_{>}, \underbrace{\frac{1}{2} + 0.2 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times \frac{5}{6}}_{>} \right\}$

• $\boxed{i=1}$ $\min_k \left\{ C_{1,k} + P_{1,-1}(k)\, U_{-1} + P_{1,0}(k)\, U_0 \right\}$.

Άρα $\min_k \left\{ \underbrace{-\frac{3}{2} + 0.2 \times \frac{115}{66} + 0.6 \times \frac{5}{6}}_{-0.6514}, \underbrace{-1 + 0.1 \times \frac{115}{66} + 0.2 \times \frac{5}{6}}_{-0.659\ (k=0)}, \underbrace{-\frac{1}{2} + 0.1 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times}_{>} \right.$