Μαθηματικά Αγοράς και Παραγωγής
Επιχειρησιακή Έρευνα - Στοχαστικά Μοντέλα.

Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων
Hillier and Lieberman, "Introduction to Operations Research"
7^{th} ed, Chapter 16.

Άσκηση 16.2 - 1

(a) Αν X_t είναι ο καιρός την περίοδο (ημέρα) t

και $X_t = \begin{cases} 0 & \text{αν βρέχει} \\ 1 & \text{λιακάδα,} \end{cases}$

τότε η κατανομή της X_{t+1} εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_t, επομένως ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα

(b) Ο πίνακας μεταβάσεων ενός βήματος είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 16.2 - 2

(a) Ορίζουμε την κατάσταση την ημέρα t, X_t, ως εξής

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{αν η μετοχή αυξήθηκε τις ημέρες } t \text{ και } t-1 \\ 1 & \text{αν αυξήθηκε την ημέρα } t \text{ και μειώθηκε την } t-1 \\ 2 & \text{αν μειώθηκε την ημέρα } t \text{ και αυξήθηκε την } t-1 \\ 3 & \text{αν μειώθηκε τις ημέρες } t \text{ και } t-1 \end{cases}$$

Για να βρούμε τον πίνακα μεταβάσεων σκεπτόμαστε ως εξής

Η κατάσταση X_{t+1} παριστάνει την κίνηση της μετοχής στις ημέρες t και t+1. Επομένως:

Αν $X_t = 0$, δηλ. η μετοχή αυξήθηκε την ημέρα t κ' την t-1, τότε οι δυνατές καταστάσεις για την X_{t+1} είναι 0 και 2 (δηλ. οι δύο καταστάσεις για τις οποίες την ημέρα t υπάρχει αύξηση)

Η $X_{t+1} = 0$ αν η μετοχή αυξηθεί και την ημέρα t, γεγονός που θα γίνει με πιθανότητα α_1 (δεδομένου $X_t = 0$). Άρα $P_{00} = \alpha_1$
Αντίθετα $X_{t+1} = 2$ αν η μετοχή μειωθεί την ημέρα t+1, πού θα γίνει με πιθανότητα $1-\alpha_1$, δηλ $P_{02} = 1-\alpha_1$.
Για τις καταστάσεις 1,3 ισχύει $P_{01} = P_{03} = 0$, όπως είδαμε παραπάνω.

Όμοια σκεπτόμενοι κ' για τις υπόλοιπες περιπτώσεις του X_t βρίσκουμε τον πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 1-\alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1-\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 1-\alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 1-\alpha_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Άσκηση 16.3-1

(a)
$$P^{(1)} = P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.14 & 0.86 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = P^5 = \begin{bmatrix} 0.175 & 0.825 \\ 0.165 & 0.835 \end{bmatrix}$$

$$P^{(10)} = P^{10} = \begin{bmatrix} 0.1668 & 0.8332 \\ 0.1666 & 0.8334 \end{bmatrix}$$

$$P^{(20)} = P^{20} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.8333 \\ 0.1667 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

(b) Οι εξισώσεις στάσιμης κατάστασης είναι

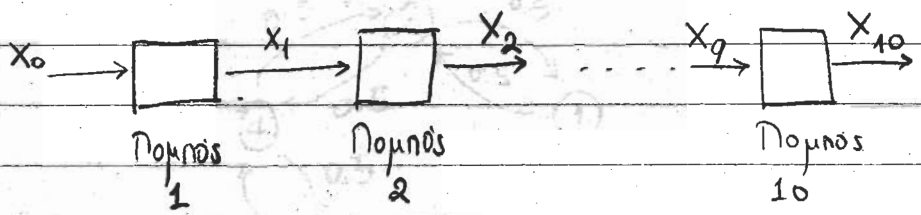
$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.1\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5\pi_0 = 0.1\pi_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi_1 = 5\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6\pi_0 = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_0 = 1/6 \\ \pi_1 = 5/6 \end{array}}$$

Από το (a) βλέπουμε ότι για $n=20$ έχουμε προσέγγιση των π_0, π_1 με ακρίβεια 4ου δεκαδικού ψηφίου.

Άσκηση 16.3-2

(a) Σχηματικά η λειτουργία αναμετάδοσης του ψηφίου είναι:



$X_t \in \{0,1\}$, $t = 0,1,\dots,10$

Η κατανομή πιθανότητας κάθε κατάστασης X_{t+1} εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_t, επομένως ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα, και η διαδικασία $\{X_t, t=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ο πίνακας μεταβάσεων είναι

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ο πίνακας μεταβάσεων 10 βημάτων είναι $P^{(10)} = P^{10} = \begin{bmatrix} 0.908 & 0.092 \\ 0.092 & 0.908 \end{bmatrix}$

Βλέπουμε ότι η πιθανότητα σωστής εκπομπής μετά τη $10^{η}$ αναμετάδοση είναι $P[X_{10}=0 \mid X_0=0] = P[X_{10}=1 \mid X_0=1] = 0.908$

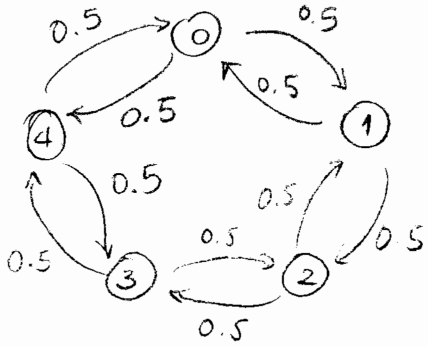
(b) Ο πίνακας P τώρα είναι $P = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.001 \\ 0.001 & 0.999 \end{bmatrix}$

και $P^{(10)} = P^{10} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$

Επομένως η πιθανότητα σωστής αναμετάδοσης τώρα γίνεται 0.99

Άσκηση 16.3-3

(a) Σχηματικά το διάγραμμα καταστάσεων/μεταβάσεων φαίνεται παρακάτω.



Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβάσεων είναι

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $$P^5 = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.3125 & 0.15625 & 0.15625 & 0.3125 \\ 0.3125 & 0.0625 & 0.3125 & 0.15625 & 0.15625 \\ 0.15625 & 0.3125 & 0.0625 & 0.3125 & 0.15625 \\ 0.15625 & 0.15625 & 0.3125 & 0.0625 & 0.3125 \\ 0.3125 & 0.15625 & 0.15625 & 0.3125 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.248 & 0.1611 & 0.2148 & 0.2148 & 0.1611 \\ 0.1611 & 0.248 & 0.1611 & 0.2148 & 0.2148 \\ 0.2148 & 0.1611 & 0.248 & 0.1611 & 0.2148 \\ 0.2148 & 0.2148 & 0.1611 & 0.248 & 0.1611 \\ 0.1611 & 0.2148 & 0.2148 & 0.1611 & 0.248 \end{bmatrix}$$

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0.2058 & 0.1953 & 0.2018 & 0.2018 & 0.1953 \\ 0.1953 & 0.2058 & 0.1953 & 0.2018 & 0.2018 \\ 0.2018 & 0.1953 & 0.2058 & 0.1953 & 0.2018 \\ 0.2018 & 0.2018 & 0.1953 & 0.2058 & 0.1953 \\ 0.1953 & 0.2018 & 0.2018 & 0.1953 & 0.2058 \end{bmatrix}$$

$$P^{80} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$ (προσέγγιση 6 δεκαδ. ψηφ.)

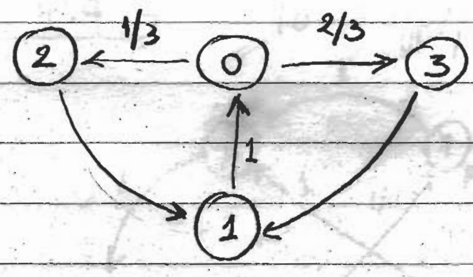
(c) Οι πιθανότητες στάσιμης κατάστασης προκύπτουν

$\pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_4 = 0.2$

Από το (b) έχουμε ότι για $n=80$ υπάρχει προσέγγιση στα π με ακρίβεια $6^{ου}$ δεκαδικού ψηφίου

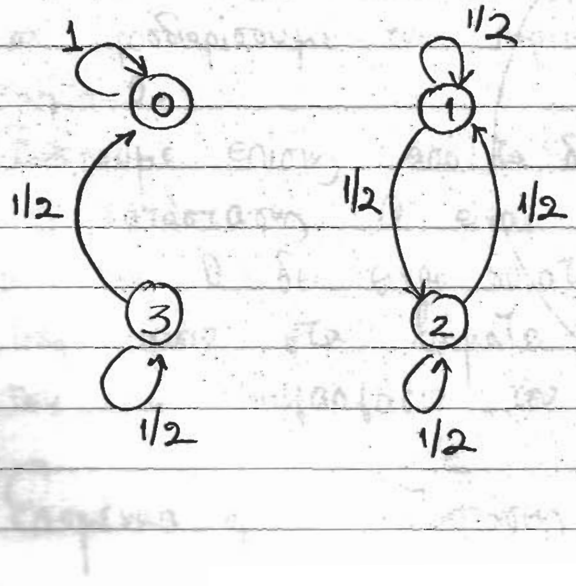
Άσκηση 16.4-1

(a)
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Από το διάγραμμα φαίνεται εύκολα ότι κάθε κατάσταση είναι <u>προσιτή</u> από κάθε άλλη, επομένως η αλυσίδα είναι <u>αδιαχώριστη</u>. Επιπλέον, αφού και ο αριθμός των καταστάσεων είναι πεπερασμένος, όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές (recurrent).

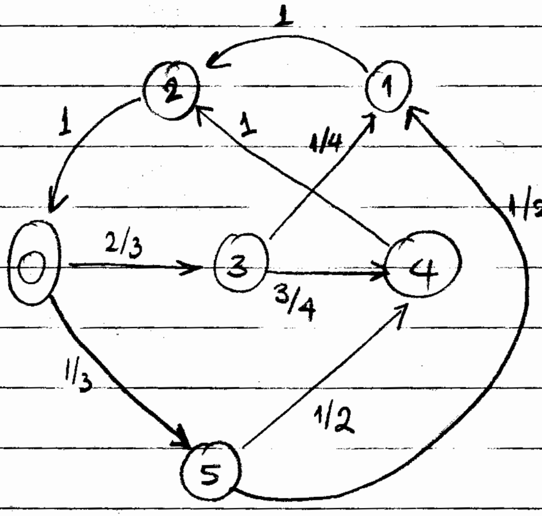
(b)
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Από το διάγραμμα φαίνεται ότι υπάρχουν 3 κλάσεις επικοινωνίας, οι $\{0\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$.

Η 0 είναι κατάσταση απορρόφησης, οι 1,2 είναι επαναληπτικές και η 3 μεταβατική

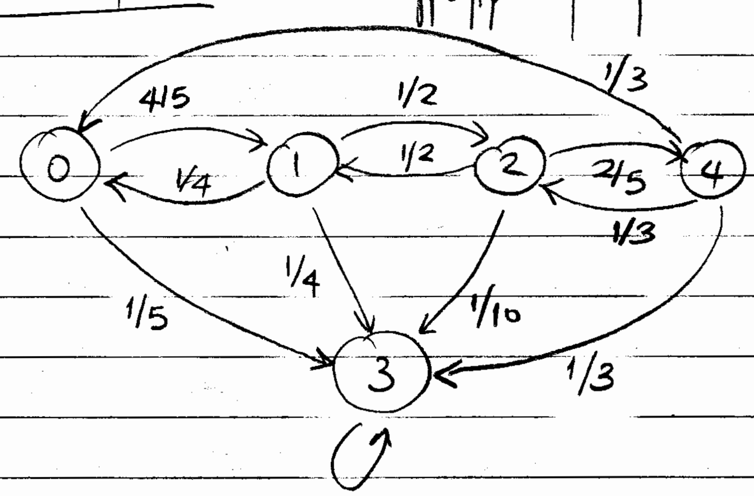
<u>Άσκηση 16.4-4</u> Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε κατάσταση είναι προσιτή από κάθε άλλη, επομένως η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη δηλ. αποτελείται από μια κλάση επικοινωνίας που περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις.
Αφού η περιοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης, όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο, άρα αρκεί να προσδιορίσουμε την περίοδο μιας κατάστασης, έστω της 0.
Βλέπουμε επίσης από το διάγραμμα ότι η περίοδος της κατάστασης 0 είναι 4, επειδή ξεκινώντας από την 0 δεν είναι δυνατό να επιστρέψουμε σ' αυτήν παρά μόνο στα βήματα μετά από αριθμό βημάτων που είναι πολλαπλάσιο του 4.

Επομένως όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 4.

Άσκηση 16.4-5 Το διάγραμμα μεταβάσεων φαίνεται παρακάτω:



Η 3 είναι κατάσταση απορρόφησης

Οι 0,1,2,4 επικοινωνούν μεταξύ τους

Επομένως οι κλάσεις είναι: $\{0,1,2,4\}$ και $\{3\}$

Η $\{3\}$ είναι απορρόφησης

Η $\{0,1,2,4\}$ είναι κλάση μεταβατικών καταστάσεων, επειδή από κάθε μια υπάρχει θετική πιθανότητα να γίνει μετάβαση στην 3 κ' επομένως το σύστημα να μην επιστρέψει ποτέ σ' αυτές τις καταστάσεις.

Για την περιοδικότητα: Έστω η κατάσταση 0. Ξεκινώντας από την κατάσταση 0, μπορούμε να επιστρέψουμε σ' αυτήν έπειτα από 2, 4, 6, ... βήματα, δηλ. μόνο πολλαπλάσια του 2. Επομένως η κλάση $\{0,1,2,4\}$ είναι περιοδική με περίοδο 2.

Άσκηση 16.5 - 1

Ο πίνακας μεταβάσεων είναι:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις στάσιμης κατάστασης είναι:

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} \\ \pi_1 &= \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_0 &= \alpha \pi_0 + (1-\beta)\pi_1 \\ \pi_1 &= (1-\alpha)\pi_0 + \beta \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (1-\alpha)\pi_0 &= (1-\beta)\pi_1 \\ (1-\alpha)\pi_0 &= (1-\beta)\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι στην πραγματικότητα η ίδια μία εξίσωση. Αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι μία από τις εξισώσεις προκύπτει πάντα ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, κ' επομένως δεν χρειάζεται να συμπεριληφθεί.

Καταλήγουμε λοιπόν στο παρακάτω σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} (1-\alpha)\pi_0 &= (1-\beta)\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-\beta}{1-\alpha}\pi_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha} + 1\right)\pi_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}, \quad \pi_0 = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}}$$

Άσκηση 16.5-4

Εδώ θεωρούμε ένα συγκεκριμένο καταναλωτή του προϊόντος (μαύρα) και ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τις αλλαγές μάρκας που προτιμά ο καταναλωτής.

Έστω X_t η μάρκα που προτιμά ο καταναλωτής κατά το μήνα t, με $X_t \in \{A, B, C\}$.

Ο πίνακας μεταβάσεων είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Από το πρόγραμμα βρίσκουμε την κατανομή στάσιμης κατάστασης

$\pi_A = 0.346 \quad \pi_B = 0.385 \quad \pi_C = 0.269$

Βλέπουμε ότι στη στάσιμη κατάσταση ένας καταναλωτής προτιμά τη μάρκα A με πιθ. 34.6%, τη B με 38.5% κ' τη C με 26.9%

Επομένως αυτά είναι και τα αντίστοιχα μερίδια αγοράς (δηλ. ποσοστά καταναλωτών που προτιμούν κάθε μάρκα).

Άσκηση 16.5-5 (α) Παίρνουμε ως μονάδα χρόνου (περίοδο) τις 3 μέρες, και ως κατάσταση X_t τον αριθμό φιαλών πού βρίσκονται σε απόθεμα αμέσως μετά την παραλαβή της περιόδου t.

Πρίν προχωρήσουμε στην μοντελοποίηση παρατηρούμε το εξής. Αφού σε κάθε περίοδο γίνεται παραλαβή μιάς μόνο φιάλης, και το νοσοκομείο όποτε χρειάζεται αίμα χρησιμοποιεί τις παλαιότερες φιάλες πρώτα, είναι εύκολο να δούμε ότι αν $X_t = k$, δηλ. υπάρχουν k φιάλες σε απόθεμα, τότε μία είναι εντελώς νέα, μία έχει ηλικία μιας περιόδου, μία 2 περιόδων, κ.ο.κ. έως την τελευταία φιάλη που είναι $k-1$ περιόδων. Τώρα επίσης έχουμε ότι φιάλες παλαιότερες των 21 ημερών (δηλαδή των 7 περιόδων) πετάγονται.
Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει περίπτωση να έχουμε ποτέ κατάσταση $X_t > 7$, δηλαδή περισσότερες από 7 φιάλες σε απόθεμα. Επομένως οι δυνατές καταστάσεις είναι $X_t \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Για τον πίνακα μεταβάσεων, παρατηρούμε ότι, αν D_t είναι η ζήτηση κατά την περίοδο t, τότε

$$X_{t+1} = \max\{X_t + 1 - D_t , 1\} \quad \text{αν } X_t = 1, 2, \ldots, 6.$$

Σ' αυτή την περίπτωση το νέο απόθεμα ισούται με το προηγούμενο (X_t) σύν την νέα φιάλη μείον τη ζήτηση κατά την περίοδο t, D_t (και βέβαια είναι ίσο με 1 αν $D_t \geq X_t$, δηλαδή αν εξαντληθεί όλο το προηγούμενο απόθεμα).

Αν όμως $X_t = 7$ τότε μία φιάλη θα πεταχτεί οπωσδήποτε στην επόμενη περίοδο (δεν υπάρχει περίπτωση να χρησιμοποιηθούν όλες αφού $D_t \leq 3$), επομένως σ' αυτή την περίπτωση το νέο απόθεμα X_{t+1} είναι

$$X_{t+1} = \begin{cases} 7 & \text{αν } D_t=0 \text{ ή } D_t=1 \\ 6 & \text{αν } D_t=2 \\ 5 & \text{αν } D_t=3 \end{cases}$$

(Για να το δούμε αυτό, έστω π.χ. ότι $D_t=0$. Τότε μια φιάλη θα πεταχτεί κ' μια νέα θα έρθει οπότε $X_{t+1}=7$. Αν $D_t=1$, η παλαιότερη θα χρησιμοποιηθεί, καμμιά δε θα πεταχτεί κ' μια νέα θα έρθει, επομένως $X_{t+1}=7$, κ.ο.κ.).

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{array}\right] \end{array}$$

Π.χ. για $X_t=1$: αν $D_t=0$ (με πιθ. 0.4) τότε $X_{t+1}=2$

ενώ αν $D_t>0$ (με πιθ. 0.6) τότε $X_{t+1}=1$

επομένως $P_{00}=0.6$, $P_{01}=0.4$, $P_{0K}=0$, $K=2,3,\ldots,7$.

Όμοια προκύπτουν οι πιθανότητες μετάβασης για τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα.

(b) Από το IOR-Tutorial βρίσκουμε τις πιθανότητες στάσιμης κατάστασης:

$\pi_1 = 0.139$, $\pi_2 = 0.139$, $\pi_3 = 0.139$, $\pi_4 = 0.138$

$\pi_5 = 0.141$, $\pi_6 = 0.13$, $\pi_7 = 0.174$

(c) Μια φιάλη θα πεταχτεί αν σε κάποια περίοδο t ισχύει $X_t = 7$ και σ' αυτή την περίοδο η ζήτηση είναι $D_t = 0$, και σε καμμία άλλη περίπτωση.

Επομένως η πιθανότητα να πεταχτεί μια φιάλη σε στάσιμη κατάσταση είναι ίση με

$$\tilde{P} = \pi_7 \cdot P[D=0] = (0.174)(0.4) = 0.0696 \text{ ή } 6.96\%.$$

Αυτό σημαίνει επίσης ότι μια φιάλη θα πετιέται περίπου στο 6.96% των περιόδων, δηλαδή κατά μέσο όρο μια φορά κάθε $\frac{1}{0.0696} = 14.37$ περιόδους δηλαδή

κάθε $3 \cdot (14.37) = 43$ ημέρες.

(d) Επείγουσα διανομή χρειάζεται όταν

$X_t = 1$ και $D_t = 2$ ή $D_t = 3$

ή $X_t = 2$ και $D_t = 3$

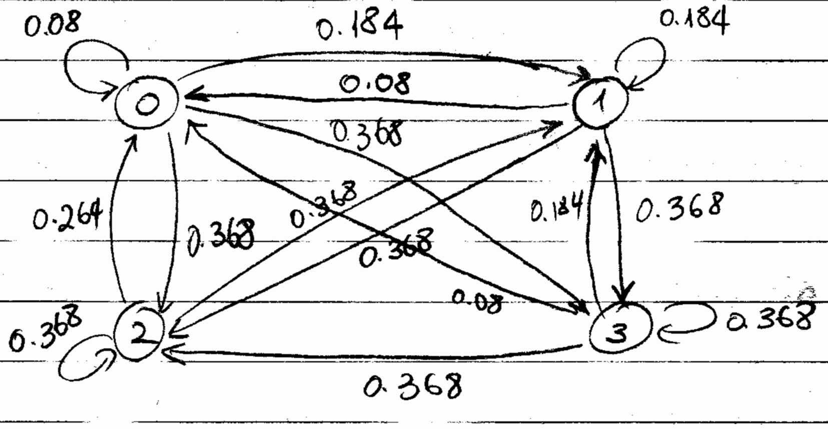
Επομένως η πιθανότητα να χρειαστεί σε στάσιμη κατάσταση είναι

$$\bar{P} = \pi_1 \cdot \left(P(D=2) + P(D=3)\right) + \pi_2\, P(D=3) =$$

$$= (0.139)(0.1+0.2) + (0.139)\cdot(0.2) = 0.0695 \text{ ή } 6.95\%$$

Άσκηση 16.5-7

Το διάγραμμα καταστάσεων-μεταβάσεων για τη νέα πολιτική φαίνεται παρακάτω:



Η διαφορά από το παράδειγμα του βιβλίου είναι στις μεταβάσεις από την κατάσταση 1. Αν $X_t = 1$ τότε η επόμενη εβδομάδα ξεκινάει με 3 κομμάτια σε απόθεμα και επομένως οι μεταβάσεις είναι ίδιες μ' αυτές που αντιστοιχούν στην κατάσταση 0, δηλαδή οι γραμμές του νέου πίνακα μεταβάσεων για τις καταστάσεις 0 κ' 1 ταυτίζονται.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.08 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.08 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.08 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \end{array}$$

Από το IOR Tutorial βρίσκουμε τις πιθανότητες στάσιμης κατάστασης

$\pi_0 = 0.1477$

$\pi_1 = 0.2517$

$\pi_2 = 0.368$

$\pi_3 = 0.2326$

Για το αναμενόμενο κόστος μιας περιόδου στην κατάσταση j, $k(j)$, έχουμε ότι

$$k(0) = 86.2, \quad k(2) = 5.2, \quad k(3) = 1.2,$$

όπως έχουν υπολογιστεί στη σελ 817 του βιβλίου, καθώς τίποτα δεν αλλάζει γι' αυτές τις καταστάσεις με τη νέα πολιτική.

Για την κατάσταση 1, έχουμε παραγγελία 2 κομματιών όπως υπαγορεύει η πολιτική, ώστε το απόθεμα να φτάσει τα 3 κομμάτια. Επομένως υπάρχει κόστος αγοράς ίσο με $10 + 25 \cdot 2 = 60$. Όσον αφορά το αναμενόμενο κόστος ελλείψεων, αυτό είναι ίσο με

$50 \cdot E[\max(D-3, 0)]$ αφού κατά την επόμενη περίοδο θα υπάρχει αρχικό απόθεμα ίσο με 3.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$k(1) = 60 + 50[P_D(4) + P_D(5) + P_D(6) + \cdots] = 61.2,$$

κ' επομένως το αναμενόμενο κόστος ανά εβδομάδα σε στάσιμη κατάσταση είναι ίσο με

$$\sum_{j=0}^{3} k(j)\pi_j = 30.33$$

Άσκηση 16.5-8

Εντελώς αντίστοιχη με την 16.5-7.