Επιχειρησιακή Έρευνα – Στοχαστικά Μοντέλα

Λυμένες Ασκήσεις Δυναμικού Προγραμματισμού

Hillier and Lieberman, "Introduction to Operations Research", edition 7

Chapter 11: Dynamic Programming

Πρόβλημα 11.2-2

Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι εντελώς ανάλογη μ'αυτήν του παραδείγματος κατανομής ενός διακριτού αγαθού που έχουμε δει στην τάξη (κατανομή ιατρικών ομάδων σε 3 χώρες), με μόνη διαφορά ότι εδώ πρέπει να δοθεί τουλάχιστον μια μονάδα αγαθού σε κάθε περιοχή, πράγμα που περιορίζει το σύνολο των επιτρεπτών αποφάσεων σε κάθε βήμα. Συγκεκριμένα ορίζουμε:

n= (περιοχή), n=1,2,3.

s_n=αριθμός πωλητών που δεν έχουν διατεθεί ακόμη στο βήμα n

x_n = αριθμός πωλητών που θα διατεθούν στην περιοχή n. Επειδή κάθε περιοχή πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα πωλητή, έχουμε ότι $x_n \geq 1$. Πρέπει όμως να θέσουμε επιπλέον περιορισμούς στο x_n, που να εξασφαλίζουν ότι μετά την ανάθεση στην περιοχή n θα μείνουν αρκετοί πωλητές διαθέσιμοι ώστε και οι υπόλοιπες περιοχές να πάρουν τουλάχιστον από ένα η κάθε μία. Συγκεκριμένα, μετά την ανάθεση στην περιοχή n, ο αριθμός των περιοχών που μένουν είναι ίσος με $3-n$. Επομένως από τους s_n πωλητές διαθέσιμους στο βήμα n πρέπει να μείνουν τουλάχιστον $3-n$ αδιάθετοι για τα υπόλοιπα βήματα, άρα στο βήμα n μπορούν να διατεθούν το πολύ $s_n-(3-n)=s_n+n-3$ πωλητές. Συνοψίζοντας βλέπουμε ότι οι επιτρεπτές τιμές της απόφασης x_n στην κατάσταση s_n είναι $1 \leq x_n \leq s_n+n-3$, και φυσικά x_n ακέραιος.

Αν στην κατάσταση s_n πάρουμε την απόφαση x_n, τότε για το επόμενο βήμα η κατάσταση s_{n+1} θα είναι ίση με τον αριθμό πωλητών που δεν έχουν διατεθεί, δηλαδή $s_{n+1}=s_n-x_n$.

Αν στην κατάσταση s_n πάρουμε την απόφαση x_n, το άμεσο κέρδος είναι η αναμενόμενη αύξηση των πωλήσεων στην περιοχή n, έστω $r_n(x_n)$. Οι τιμές του $r_n(x_n)$ δίνονται στον πίνακα.

Έστω $f_n(s_n)$ το μέγιστο ποσό των αναμενόμενων πωλήσεων για τα υπόλοιπα βήματα μέχρι το τέλος, δεδομένου ότι στο βήμα n μένουν s_n πωλητές που δεν έχουν διατεθεί ακόμη. Η συνάρτηση τιμής $f_n(s_n)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση βελτιστότητας:

$$f_n(s_n) = \max_{1 \leq x_n \leq s_n+n-3} \{r_n(x_n) + f_{n+1}(s_n - x_n)\},$$

για $n=1,2,3$, και $f_4(s_4)=0$.

Για να λύσουμε τις εξισώσεις βελτιστότητας ακολουθούμε αναδρομή προς τα πίσω, ξεκινώντας από $n=3$ και προχωρώντας διαδοχικά στις περιπτώσεις $n=2,1$. Προηγουμένως πρέπει να προσδιορίσουμε ποιες καταστάσεις είναι δυνατές σε κάθε βήμα. Συγκεκριμένα στο βήμα $n=1$ έχουμε $s_1=6$, επειδή μας δίνεται ότι αρχικά υπάρχουν 6 διαθέσιμοι πωλητές. Επίσης έχουμε βρει ότι $1 \leq x_1 \leq 4$. Επομένως στο βήμα $n=2$ θα έχουν ήδη διατεθεί από 1 έως 4 πωλητές, και επομένως ο αριθμός των αδιάθετων μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ 2 και 5, δηλαδή $2 \leq s_2 \leq 5$. Στο βήμα $n=3$, οι διαθέσιμοι πωλητές θα είναι τουλάχιστον ένας, επειδή αυτό εξασφαλίζει ο περιορισμός για τα x_n που θέσαμε παραπάνω. Από την άλλη πλευρά, στα προηγούμενα δύο βήματα έχουν διατεθεί τουλάχιστον 2 πωλητές, επομένως για το βήμα 3 μένουν το πολύ 4. Επομένως, $1 \leq s_3 \leq 4$.

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση των εξισώσεων βελτιστότητας:

***n* = 3**: Στο βήμα 3 είναι προφανώς βέλτιστο να διατεθούν όλοι οι πωλητές που απομένουν στην περιοχή 3.

$$\begin{aligned}
f_3(1) &= r_3(1)+f_4(0)=28+0=28, \quad x_3^*(1)=1 \\
f_3(2) &= r_3(2)+f_4(0)=41+0=41, \quad x_3^*(2)=2 \\
f_3(3) &= r_3(3)+f_4(0)=63+0=63, \quad x_3^*(3)=3 \\
f_3(4) &= r_3(4)+f_4(0)=75+0=75, \quad x_3^*(4)=4
\end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{n=2}}$: $2 \le s_2 \le 5$.

$$
\begin{aligned}
f_2(2) &= r_2(1)+f_3(1) = 21+28 = 49, \quad x_2^*(2) = 1 \\
f_2(3) &= \max\begin{cases} r_2(1)+f_3(2) \\ r_2(2)+f_3(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 21+41 \\ 42+28 \end{cases} = 70, \quad x_2^*(3) = 2 \\
f_2(4) &= \max\begin{cases} r_2(1)+f_3(3) \\ r_2(2)+f_3(2) \\ r_2(3)+f_3(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 21+63 \\ 42+41 \\ 56+28 \end{cases} = 84, \quad x_2^*(4) = 1 \text{ ή } 3 \\
f_2(5) &= \max\begin{cases} r_2(1)+f_3(4) \\ r_2(2)+f_3(3) \\ r_2(3)+f_3(2) \\ r_2(4)+f_3(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 21+75 \\ 42+63 \\ 56+41 \\ 70+28 \end{cases} = 105, \quad x_2^*(5) = 2
\end{aligned}
$$

$\underline{\boldsymbol{n=1}}$: $s_1 = 6$

$$
f_1(6) = \max\begin{cases} r_1(1)+f_2(5) \\ r_1(2)+f_2(4) \\ r_1(3)+f_2(3) \\ r_1(4)+f_2(2) \end{cases} = \max\begin{cases} 35+105 \\ 48+84 \\ 70+70 \\ 89+49 \end{cases} = 140, \quad x_1^*(6) = 1 \text{ ή } 3
$$

Από τη λύση των εξισώσεων μπορούμε να ανασυνθέσουμε τις βέλτιστες πολιτικές:

$$
\begin{gathered}
s_1 = 6,\ x_1 = 1,\ s_2 = 5,\ x_2 = 2,\ s_3 = 3,\ x_3 = 3 \\
s_1 = 6,\ x_1 = 3,\ s_2 = 3,\ x_2 = 2,\ s_3 = 1,\ x_3 = 1
\end{gathered}
$$

Πρόβλημα 11.2-4

(a) Λάθος. Οι εξισώσεις βελτιστότητας δίνουν ένα τρόπο να υπολογιστεί η βέλτιστη πολιτική στο βήμα n χρησιμοποιώντας τη βέλτιστη πολιτική στο βήμα $n+1$.

(b) Λάθος. Η λύση των εξισώσεων βελτιστότητας δίνει τη βέλτιστη απόφαση για οποιαδήποτε κατάσταση σε κάθε βήμα. Επομένως αν σε κάποια κατάσταση ληφθεί μια όχι βέλτιστη απόφαση, που θα οδηγήσει σε άλλη κατάσταση απ ότι η βέλτιστη, στο επόμενο βήμα η βέλτιστη απόφαση έχει ήδη υπολογισθεί και δεν χρειάζεται επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης.

(c) Λάθος. Η μόνη πληροφορία που χρειάζεται σε κάθε βήμα είναι η κατάσταση που βρίσκεται η διαδικασία σ' αυτό το βήμα.

Πρόβλημα 11.3-2

Η λύση προκύπτει εντελώς ανάλογα μ' αυτήν του προβλήματος 11.2-2. Η τελική απάντηση είναι :

$$f_1(7) = 23, \quad x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 1.$$

Πρόβλημα 11.3-3

Η λύση προκύπτει εντελώς ανάλογα μ' αυτήν του προβλήματος 11.2-2. Η τελική απάντηση είναι :

$$f_1(6) = 28,$$

με δύο βέλτιστες λύσεις:

$$
\begin{gathered}
x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3 \\
x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1
\end{gathered}
$$

Πρόβλημα 11.3-4

Η λύση προκύπτει εντελώς ανάλογα μ' αυτήν του προβλήματος 11.2-2, με τη διαφορά ότι εδώ δεν υπάρχει η απαίτηση για ανάθεση τουλάχιστον μιας μονάδας σε κάθε βήμα. Επομένως το σύνολο εφικτών καταστάσεων σε κάθε βήμα είναι $\{0, 1, \ldots, 5\}$ και οι επιτρεπτές αποφάσεις στην κατάσταση (n, s) είναι $\{0, 1, \ldots, s\}$ (όμοια με το παράδειγμα των ιατρικών ομάδων). Η τελική απάντηση είναι:

$$f_1(5) = 23,$$

με βέλτιστη λύση

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3.$$

Πρόβλημα 11.3-5

Η λύση προκύπτει εντελώς ανάλογα μ' αυτήν του προβλήματος 11.2-2, με τη διαφορά ότι εδώ δεν υπάρχει η απαίτηση για ανάθεση τουλάχιστον μιας μονάδας σε κάθε βήμα. Επομένως το σύνολο εφικτών καταστάσεων σε κάθε βήμα είναι $\{0, 1, \ldots, 6\}$ και οι επιτρεπτές αποφάσεις στην κατάσταση (n, s) είναι $\{0, 1, \ldots, s\}$ (όμοια με το παράδειγμα των ιατρικών ομάδων). Η τελική απάντηση είναι:

$$f_1(6) = 33,$$

με βέλτιστες λύσεις

$$\begin{aligned} x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2 \\ x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2 \\ x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 11.3-8

Πρόκειται για πρόβλημα κατανομής πόρων με κριτήριο τη μεγιστοποίηση του γινομένου των άμεσων πληρωμών. Η κατανομή γίνεται σε 3 βήματα που αντιστοιχούν στις 3 φάσεις εισαγωγής του προϊόντος στην αγορά. Η κατάσταση s_n στο βήμα n είναι το ποσό που είναι διαθέσιμο για την καμπάνια στη φάση n και τις επόμενες. Η απόφαση x_n αντιστοιχεί στο ποσό που θα ξοδευτεί στη φάση n. Στη φάση 1 πρέπει να δοθεί τουλάχιστον μία μονάδα, ενώ για τις επόμενες φάσεις δεν υπάρχει περιορισμός ελάχιστου ποσού. Επομένως $1 \leq x_1 \leq 4$, $0 \leq s_2 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq s_2$, $0 \leq s_3 \leq 3$, και $x_3 = s_3$, αφού η φάση 3 είναι η τελευταία. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι η δυναμική της διαδικασίας δίνεται από την εξίσωση $s_{n+1} = s_n - x_n$. Τέλος η πληρωμή ενός βήματος $r_n(x_n)$ δίνεται από τον πίνακα και αντιστοιχεί για $n = 1$ στο μερίδιο αγοράς ($r_1(x_1) = m(x_1)$), για $n = 2$ στο ποσοστό του μεριδίου αγοράς που διατηρείται στη φάση 2 ($r_2(x_2) = f_2(x_2)$) και για $n = 3$ στο ποσοστό του μεριδίου αγοράς που διατηρείται στη φάση 3 ($r_3(x_3) = f_3(x_3)$).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις βελτιστότητας

$$f_n(s_n) = max_{x_n}\{r_n(x_n) f_{n+1}(s_n - x_n)\}$$

με $f_4(0) = 1$.

<u>$\boldsymbol{n = 3}$:</u>

$$\begin{aligned} f_3(0) &= r_3(0) \cdot f_4(0) = 0.3 \cdot 1 = 0.3, \quad x_3^*(0) = 0 \\ f_3(1) &= r_3(1) \cdot f_4(0) = 0.5 \cdot 1 = 0.5, \quad x_3^*(1) = 1 \\ f_3(2) &= r_3(2) \cdot f_4(0) = 0.6 \cdot 1 = 0.6, \quad x_3^*(2) = 2 \\ f_3(3) &= r_3(3) \cdot f_4(0) = 0.7 \cdot 1 = 0.7, \quad x_3^*(3) = 3 \end{aligned}$$

<u>$\boldsymbol{n = 2}$:</u>

$$f_2(0) = r_2(0) \cdot f_3(0) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06, \quad x_2^*(0) = 0$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= \max\begin{cases} r_2(0)\cdot f_3(1) \\ r_2(1)\cdot f_3(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0.2\cdot 0.5 \\ 0.4\cdot 0.3 \end{cases} = 0.12, \quad x_2^*(1)=1 \\
f_2(2) &= \max\begin{cases} r_2(0)\cdot f_3(2) \\ r_2(1)\cdot f_3(1) \\ r_2(2)\cdot f_3(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0.2\cdot 0.6 \\ 0.4\cdot 0.5 \\ 0.5\cdot 0.3 \end{cases} = 0.20, \quad x_2^*(2)=1 \\
f_2(3) &= \max\begin{cases} r_2(0)\cdot f_3(3) \\ r_2(1)\cdot f_3(2) \\ r_2(2)\cdot f_3(1) \\ r_2(3)\cdot f_3(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0.2\cdot 0.7 \\ 0.4\cdot 0.6 \\ 0.5\cdot 0.5 \\ 0.6\cdot 0.3 \end{cases} = 0.25, \quad x_2^*(3)=2
\end{aligned}
$$

<u>$\boldsymbol{n=1}$:</u>

$$
f_1(4) = \max\begin{cases} r_1(1)\cdot f_2(3) \\ r_1(2)\cdot f_2(2) \\ r_1(3)\cdot f_2(1) \\ r_1(4)\cdot f_2(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 20\cdot 0.25 \\ 30\cdot 0.20 \\ 40\cdot 0.12 \\ 50\cdot 0.06 \end{cases} = 6, \quad x_1^*(4)=2
$$

Επομένως η βέλτιστη πολιτική είναι $x_1=2, x_2=1, x_3=1$, δηλαδή πρέπει να δοθούν 2, 1, και 1 εκατομμύρια στις φάσεις 1, 2 και 3 αντίστοιχα, και κάτω από τη βέλτιστη πολιτική το τελικό μερίδιο αγοράς θα είναι ίσο με 6%.

Πρόβλημα 11.3-10

Το μηχάνημα αποτελείται από 3 τμήματα σε σειρά, δηλαδή για να λειτουργήσει πρέπει να λειτουργούν και τα 3 τμήματα. Κάθε τμήμα μπορεί να αποτελείται από 1 έως 3 μονάδες. Έστω $p_i(x_i)$ η πιθανότητα να λειτουργεί το τμήμα i αν αποτελείται από x_i μονάδες (πίνακας 1), και $c_i(x_i)$ το κόστος εγκατάστασης x_i μονάδων στο τμήμα i (πίνακας 2).

Τότε η πιθανότητα λειτουργίας του όλου συστήματος είναι ίση με $p_1(x_1)p_2(x_2)p_3(x_3)$, ενώ ο περιορισμός του διαθέσιμου ποσού των 1000\$ (δηλαδή 10 μονάδων) γράφεται στη μορφή $c_1(x_1)+c_2(x_2)+c_3(x_3)\leq 10$.

Από τη σκοπιά του δυναμικού προγραμματισμού, πρόκειται για πρόβλημα κατανομής πόρου (δηλαδή των 10 χρηματικών μονάδων) σε 3 δραστηριότητες (τα 3 τμήματα του μηχανήματος). Η διαφορά από τα παραδείγματα που έχουμε δει μέχρι τώρα είναι ότι εδώ η απόφαση σε κάθε βήμα δεν είναι αυτή καθαυτή η ποσότητα πόρου που θα διατεθεί, αλλά ο αριθμός μονάδων που θα μπουν στο αντίστοιχο τμήμα του μηχανήματος. Συγκεκριμένα, έστω ότι η κατάσταση s_n στο βήμα n είναι ο αριθμός των χρηματικών μονάδων που παραμένουν διαθέσιμες για τα τμήματα $n, n+1, ...4$. Έστω x_n ο αριθμός μονάδων που θα εγκατασταθούν στο τμήμα n. Τότε το άμεσο κέρδος είναι ίσο με $p_n(x_n)$, και η επόμενη κατάσταση είναι $s_{n+1}=s_n-c_n(x_n)$.

Επομένως οι εξισώσεις βελτιστότητας είναι

$$
f_n(s_n) = \max_{x_n}\{p_n(x_n)\cdot f_{n+1}(s_n-c_n(x_n))\}
$$

Επειδή οι δυνατές αποφάσεις και καταστάσεις σε κάθε βήμα είναι δύσκολο να προσδιορισθούν αναλυτικά, είναι προτιμότερο να σχεδιάσουμε το αντίστοιχο δίκτυο καταστάσεων–αποφάσεων. Το δίκτυο δίνεται στο Σχήμα 1.

Οι εξισώσεις βελτιστότητας μπορούν εύκολα να λυθούν πάνω στο δίκτυο. Έχουμε $f_5(s_5)=1$ για κάθε s_5.

<u>$\boldsymbol{n=4}$:</u>

$$
\begin{aligned}
f_4(2) &= 0.5, \quad x_4^*(2)=1 \\
f_4(3) &= 0.7, \quad x_4^*(3)=2 \\
f_4(4) &= 0.9, \quad x_4^*(4)=3 \\
f_4(5) &= 0.9, \quad x_4^*(5)=3 \\
f_4(6) &= 0.9, \quad x_4^*(6)=3
\end{aligned}
$$

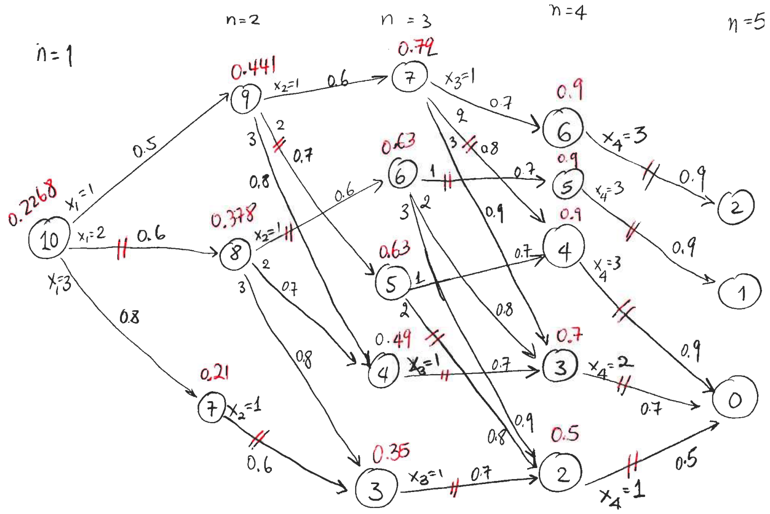

Figure 1: Πρόβλημα 11.3-10

<u>***n* = 3**:</u>

$$
\begin{aligned}
f_3(3) &= 0.7 \cdot 0.5 = 0.35, \quad x_3^*(3) = 1 \\
f_3(4) &= 0.7 \cdot 0.7 = 0.49, \quad x_3^*(4) = 1 \\
f_3(5) &= \max \begin{cases} 0.7 \cdot 0.9 \\ 0.8 \cdot 0.5 \end{cases} = 0.63, \quad x_3^*(5) = 2 \\
f_3(6) &= = \max \begin{cases} 0.7 \cdot 0.9 \\ 0.8 \cdot 0.7 \\ 0.9 \cdot 0.5 \end{cases} = 0.63, \quad x_3^*(6) = 1 \\
f_3(7) &= \max \begin{cases} 0.7 \cdot 0.9 \\ 0.8 \cdot 0.9 \\ 0.9 \cdot 0.7 \end{cases} = 0.72, \quad x_3^*(7) = 2
\end{aligned}
$$

<u>***n* = 2**:</u>

$$
\begin{aligned}
f_2(7) &= 0.6 \cdot 0.35 = 0.21, \quad x_2^*(7) = 1 \\
f_2(8) &= = \max \begin{cases} 0.6 \cdot 0.63 \\ 0.7 \cdot 0.49 \\ 0.8 \cdot 0.35 \end{cases} = 0.378, \quad x_2^*(8) = 1 \\
f_2(9) &= = \max \begin{cases} 0.6 \cdot 0.72 \\ 0.7 \cdot 0.63 \\ 0.8 \cdot 0.49 \end{cases} = 0.441, \quad x_2^*(9) = 2
\end{aligned}
$$

<u>***n* = 1**:</u>

$$
f_1(10) = \max \begin{cases} 0.5 \cdot 0.441 \\ 0.6 \cdot 0.378 \\ 0.8 \cdot 0.21 \end{cases} = 0.2268, \quad x_1^*(10) = 2
$$

Επομένως η βέλτιστη τοποθέτηση των μονάδων είναι $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3$, και η μέγιστη πιθανότητα να λειτουργήσει το μηχάνημα είναι ίση με 22.68%.

Πρόβλημα 11.3-12

Μπορούμε να δούμε το πρόβλημα ως πρόβλημα κατανομής πόρων με 3 βήματα. Ο περιορισμός

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

όπου $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 3, b = 11$, εκφράζει τις ποσότητες του πόρου που διατίθενται σε κάθε βήμα, ανάλογα με την απόφαση x_n. Έστω s_n η ποσότητα πόρου που είναι διαθέσιμη για το βήμα n και τα επόμενα βήματα (κατάσταση) και x_n η απόφαση στο βήμα n. Προφανώς η αρχική κατάσταση είναι $s_1 = b = 11$. Τότε το άμεσο κέρδος είναι $r_n(x_n)$, όπου $r_1(x_1) = 18x_1 - x_1^2,\ r_2(x_2) = 20x_2,\ r_3(x_3) = 10x_3$. Επίσης αν στην κατάσταση s_n παρθεί η απόφαση x_n, τότε η νέα κατάσταση στο βήμα $n+1$ θα είναι ίση $s_{n+1} = s_n - a_nx_n$.

Οι εξισώσεις βελτιστότητας είναι:

$$f_n(s_n) = \max_{x_n}\{r_n(x_n) + f_{n+1}(s_n - a_nx_n)\},$$

με $f_4(s_4) = 0$ για κάθε s_4.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να παραστήσουμε το πρόβλημα με το δίκτυο του Σχήματος 2:

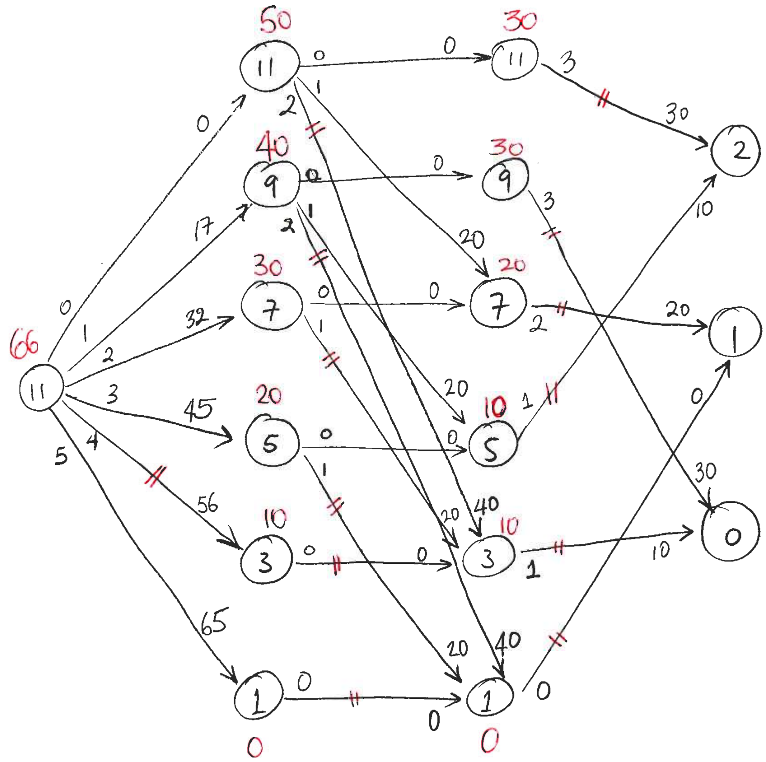

Figure 2: Πρόβλημα 11.3-12

Το δίκτυο περιλαμβάνει και τη βέλτιστη λύση. Βλέπουμε ότι $f_1(11) = 66$ και η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Πρόβλημα 11.3-13

Το πρόβλημα είναι ανάλογο με το 11.3-12, με δύο διαφορές: Πρώτον το κριτήριο είναι πολλαπλασιαστικό, όπως έχουμε δει και σε άλλα παραδείγματα, και δεύτερον, οι μεταβλητές απόφασης πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 1, όπως επίσης έχουμε δει σε άλλα προβλήματα. Εδώ θα δούμε ένα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης του κάτω φράγματος (δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος που θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το “τέχνασμα”, απλά το κάνουμε για να δούμε εναλλακτικούς τρόπους μοντελοποίησης που είναι χρήσιμοι σε πολλά προβλήματα).

Κάνουμε ένα μετασχηματισμό των μεταβλητών ώστε να απαλλαγούμε από τους περιορισμούς κάτω φράγματος. Εισάγουμε τις μεταβλητές $y_i = x_i - 1, i = 1, 2, 3$. Χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές η αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με

$$Z = (y_1 + 1)(y_2 + 1)^2(y_3 + 1)^3$$

ενώ ο περιορισμός γίνεται

$$(y_1 + 1) + 2(y_2 + 1) + 3(y_3 + 1) \leq 10$$

που απλοποιείται σε

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 4$$

Επομένως το αρχικό πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & Z = (y_1 + 1)(y_2 + 1)^2(y_3 + 1)^3 \\ \text{subject to} & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 4 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Στην τελευταία του μορφή το πρόβλημα είναι εντελώς αντίστοιχο με το πρόβλημα 11.3.12 που λύθηκε προηγουμένως, με μόνη διαφορά το πολλαπλασιαστικό κριτήριο. Ορίζοντας καταστάσεις και αποφάσεις με όμοιο τρόπο και θέτοντας $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 4$, και συνάρτηση άμεσου κέρδους

$$r_1(y_1) = y_1 + 1,\ r_2(y_2) = (y_2 + 1)^2,\ r_3(y_3) = (y_3 + 1)^3,$$

παίρνουμε τις εξισώσεις βελτιστότητας

$$f_n(s_n) = \max_{y_n}\{r_n(y_n) \cdot f_{n+1}(s_n - a_n y_n)\},$$

με $f_4(s_4) = 1$ για κάθε s_4.

Οι εξισώσεις αυτές αντιστοιχούν στο δίκτυο του Σχήματος 3.

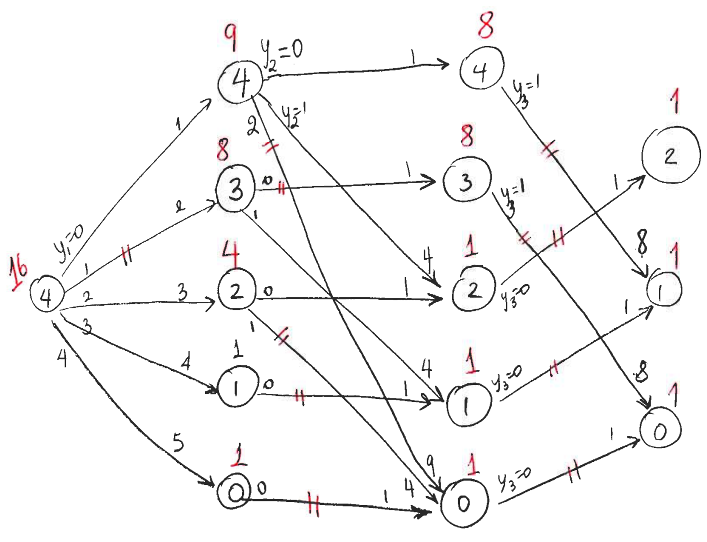

Figure 3: Πρόβλημα 11.3-13

Το δίκτυο περιλαμβάνει και τη βέλτιστη λύση. Βλέπουμε ότι $f_1(4) = 16$ και η βέλτιστη λύση είναι $y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 1$. Επομένως η βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα είναι $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Πρόβλημα 11.4-2

Η κατάσταση s_n είναι το ποσό που έχει συγκεντρωθεί στην αρχή του βήματος n (πριν παρθεί η απόφαση επένδυσης σε αυτό το βήμα). Επειδή κάθε επένδυση γίνεται στο ποσό των 5000 και η απόδοση είναι πάντα πολλαπλάσιο του 5000, όλες οι δυνατές καταστάσεις σε κάθε βήμα είναι πολλαπλάσια του 5000. Θέτοντας ως μονάδα μέτρησης τα \$1000, έχουμε ότι οι δυνατές καταστάσεις είναι 0,5,10,....

Αν η κατάσταση $s_n = 0$, η μόνη απόφαση που μπορεί να ληφθεί είναι να μη γίνει επένδυση και η επόμενη κατάσταση θα είναι $s_{n+1} = 0$. Αν $s_n \geq 5$, υπάρχουν 3 δυνατές αποφάσεις στο βήμα n:

- $x_n = A$: Να επενδυθούν 5000 στο A. Σ'αυτή την περίπτωση η απόδοση μπορεί να είναι είτε 0 ή 10000, δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο ή θα μειωθεί κατά 5000 ή θα αυξηθεί κατά 5000. Επομένως η νέα κατάσταση θα είναι $s_{n+1} = s_n - 5$ με πιθανότητα 0.3 ή $s_{n+1} = s_n + 5$ με πιθανότητα 0.7.

- $x_n = B$: Να επενδυθούν 5000 στο B. Σ'αυτή την περίπτωση η απόδοση μπορεί να είναι είτε 5000 ή 10000, δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο ή θα μείνει το ίδιο ή θα αυξηθεί κατά 5000. Επομένως η νέα κατάσταση θα είναι $s_{n+1} = s_n$ με πιθανότητα 0.9 ή $s_{n+1} = s_n + 5$ με πιθανότητα 0.1.

- $x_n = O$: Να μη γίνει καμία επένδυση σε αυτό το βήμα. Σ'αυτή την περίπτωση η νέα κατάσταση θα είναι $s_{n+1} = s_n$ με πιθανότητα 1.

Και στα δύο ερωτήματα το κριτήριο είναι να μεγιστοποιηθεί ένα μέτρο της τελικής κατάστασης (είτε η αναμενόμενη τιμή του τελικού ποσού, ή η πιθανότητα το τελικό ποσό να είναι τουλάχιστον 10000). Επομένως και στα δύο ερωτήματα δεν υπάρχει άμεσο κέρδος στα ενδιάμεσα βήματα.

(a) Όταν το κριτήριο είναι η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου τελικού ποσού, η εξίσωση βελτιστότητας είναι

$$\begin{aligned} f_n(s_n) &= \max \begin{cases} 0.3 f_{n+1}(s_n - 5) + 0.7 f_{n+1}(s_n + 5), \\ 0.9 f_{n+1}(s_n) + 0.1 f_{n+1}(s_n + 5), \\ f_{n+1}(s_n) \end{cases} , \quad \text{για} \quad s_n > 0 \\ f_n(0) &= f_{n+1}(0) \end{aligned}$$

και στο τελικό βήμα $f_4(s) = s$.

Το δίκτυο καταστάσεων αποφάσεων φαίνεται στο Σχήμα 4, μαζί με τις συναρτήσεις βέλτιστης τιμής $f_n(s_n)$ σημειωμένες πάνω στους κόμβους. Για τους υπολογισμούς πάνω στο δίκτυο εφαρμόζουμε τους εξής κανόνες που προκύπτουν από τις εξισώσεις βελτιστότητας: Για να βρούμε την τιμή σε ένα κόμβο κατάστασης παίρνουμε το μέγιστο των τιμών που αντιστοιχούν στα βέλη (αποφάσεις) που φεύγουν από αυτή την κατάσταση. Για να βρούμε την τιμή σε ένα κόμβο πιθανότητας παίρνουμε την αναμενόμενη τιμή που αντιστοιχεί σ αυτόν τον κόμβο, δηλαδή το άθροισμα των πιθανοτήτων επί τις αντίστοιχες τιμές για τα βέλη που φεύγουν από αυτόν τον κόμβο.

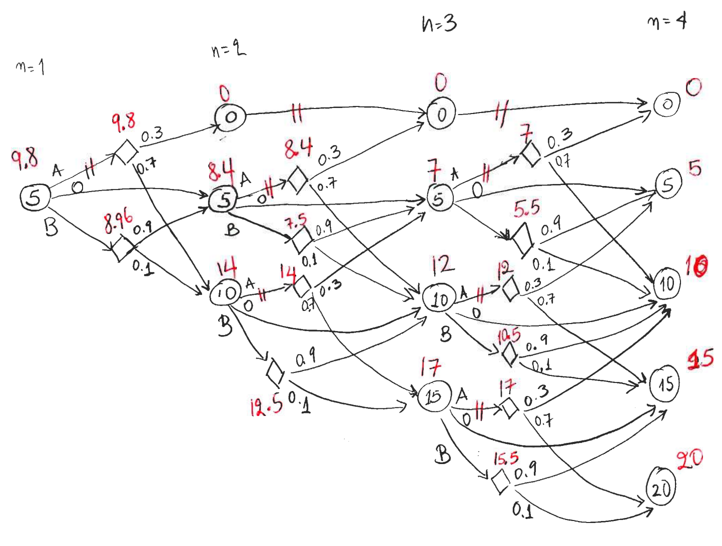

Figure 4: Πρόβλημα 11.4-2(a)

Από το σχήμα φαίνεται ότι η βέλτιστη πολιτική είναι όσο υπάρχουν χρήματα να γίνεται πάντα επένδυση στο A.

(b) Το κριτήριο είναι η μεγιστοποίηση της πιθανότητας το τελικό ποσό να είναι τουλάχιστον ίσο με 10000, δηλαδή της πιθανότητας η τελική κατάσταση να είναι $s_4 = 10, 15$ ή 20. Για να μοντελοποιήσουμε αυτό το κριτήριο θέτουμε ως συνάρτηση τελικού κέρδους

$$f_4(s_4) = \begin{cases} 1, & \text{αν } s_4 = 10, 15, 20 \\ 0, & \text{αν } s_4 = 0, 5 \end{cases}$$

Η επιλογή αυτή μας δίνει το κριτήριο που θέλουμε, επειδή η αναμενόμενη τιμή του τελικού κέρδους είναι ίση με $E(f_4(s_4)) = 1 \cdot P(s_4 \geq 10) + 0 \cdot P(s_4 < 10) = P(s_4 \geq 10)$, όπου E δηλώνει αναμενόμενη τιμή και P δηλώνει πιθανότητα.

Οι εξισώσεις βελτιστότητας είναι οι ίδιες με αυτές του (a), καθώς υπάρχουν ακριβώς οι ίδιες αποφάσεις και δυναμική, και επίσης δεν υπάρχει συνάρτηση άμεσου κέρδους.

$$\begin{aligned} f_n(s_n) &= \max \begin{cases} 0.3 f_{n+1}(s_n - 5) + 0.7 f_{n+1}(s_n + 5), \\ 0.9 f_{n+1}(s_n) + 0.1 f_{n+1}(s_n + 5), \\ f_{n+1}(s_n) \end{cases}, \quad \text{για} \quad s_n > 0 \\ f_n(0) &= f_{n+1}(0) \end{aligned}$$

Το δίκτυο καταστάσεων αποφάσεων φαίνεται στο Σχήμα 5, μαζί με τις συναρτήσεις βέλτιστης τιμής $f_n(s_n)$ σημειωμένες πάνω στους κόμβους. Σημειώνεται η διαφορά από το (a) στις τιμές των τελικών κόμβων, που φυσικά αλλάζει και τις τιμές σε όλους τους κόμβους.

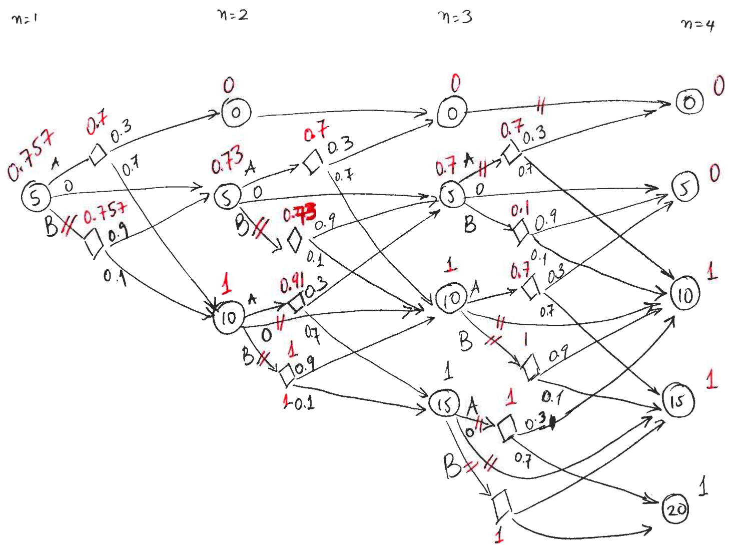

Figure 5: Πρόβλημα 11.4-2(b)

Από το σχήμα φαίνεται ότι η βέλτιστη πολιτική είναι στο βήμα 1 να γίνει επένδυση στο B. Αν η απόδοση είναι 10 τότε στο βήμα 2 το ποσό έχει ήδη φτάσει στο 10 και από εκεί και μετά σε κάθε βήμα μπορεί είτε να γίνεται επένδυση στο B είτε καθόλου και η πιθανότητα να επιτευχθεί ο στόχος είναι 100%. Αν αντίθετα στο βήμα 1 η απόδοση είναι 5 και η νέα κατάσταση 5, τότε στο βήμα 2 είναι πάλι βέλτιστη η επένδυση στο B. Αν και τότε η απόδοση είναι 5 στο βήμα 3 η επένδυση πρέπει να γίνει στο A, διαφορετικά πάλι έχει επιτευχθεί ο στόχος.