Μαθηματικά Αγοράς και Παραγωγής
Επιχειρησιακή Έρευνα- Στοχαστικά Μοντέλα.

Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων
Hillier and Lieberman "Introduction to Operation Research"
7th ed. Chapter 21.

Άσκηση 21.2-1

Ορίζουμε ως κατάσταση τον αριθμό πελατών που βρίσκονται στο σύστημα εξυπηρέτησης στην αρχή της περιόδου (πριν την άφιξη του νέου πελάτη). Οι δυνατές καταστάσεις είναι $i=0,1,2$.
Στην αρχή κάθε περιόδου οι δυνατές αποφάσεις είναι δύο:

$$k = \begin{cases} 1 & , \text{αργός ρυθμός} \\ 2 & , \text{γρήγορος ρυθμός.} \end{cases}$$

(a)

Πρώτα θα βρούμε τις πιθανότητες μετάβασης.

Για την κατάσταση $i=0$, απόφαση $k=1$:

Αν δεν έρθει κανένας πελάτης η νέα κατάσταση θα είναι η 0 (με πιθανότητα 1/2)
Αν έρθει νέος πελάτης θα αρχίσει αυτόματα να εξυπηρετείται. Επειδή $k=1$, δηλ. έχουμε αργό ρυθμό εξυπηρέτησης, ο πελάτης θα τελειώσει με πιθανότητα 3/5 και επομένως η νέα κατάσταση θα είναι 0 (πιθανότητα $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$). Αν έρθει νέος πελάτης κ' δεν προλάβει να εξυπηρετηθεί (με πιθανότητα $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$) η νέα κατάσταση θα είναι $j=1$.

Επομένως $P_{00}(1)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$, $P_{01}(1)=\frac{1}{5}$, $P_{02}(1)=0$.

i=0, k=2 Εδώ έχουμε γρήγορο ρυθμό εξυπηρέτησης

Επομένως $P_{00}(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{10}$

$P_{01}(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P_{02}(2) = 0.$

i=1, k=1 Ήδη υπάρχει ένας πελάτης στο σύστημα.

Αν έρθει ένας νέος (με πιθανότητα $1/2$) κ' τελειώσει ένας (με πιθανότητα $3/5$) η νέα κατάσταση θα είναι $j=1$.
Αν έρθει ένας νέος και δεν τελειώσει κανένας (πιθανότητα $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$) η νέα κατάσταση θα είναι $j=2$.
Αν δεν έρθει νέος πελάτης (πιθανότητα $1/2$), τότε οι δυνατές μεταβάσεις είναι $j=0$ αν φύγει ο υπάρχων πελάτης (πιθανότητα $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$) ή $j=1$ αν δε φύγει (πιθανότητα $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$)

Επομένως συνολικά οι πιθανότητες μετάβασης είναι

$P_{10}(1) = \frac{3}{10}$, $P_{11}(1) = \frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$, $P_{12}(1) = \frac{1}{5}$

i=1, k=2 Εδώ η διαφορά είναι στο γρήγορο ρυθμό εξυπηρέτησης.

$P_{10}(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$, $P_{11}(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$, $P_{12}(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$i=2,\ k=1$ Αφού υπάρχουν δύο πελάτες, δεν πρόκειται να μπει νέος πελάτης στο σύστημα στη διάρκεια της περιόδου. Επομένως η νέα κατάσταση θα είναι είτε
$j=1$ αν φύγει ένας πελάτης (με πιθανότητα $\frac{3}{5}$) ή
$j=2$ αν δε φύγει κανένας (" " $\frac{2}{5}$).

$$P_{20}(1)=0, \quad P_{21}(1)=\frac{3}{5}, \quad P_{22}(1)=\frac{2}{5}$$

$i=2,\ k=2$ Όμοια έχουμε

$$P_{20}(2)=0, \quad P_{21}(2)=\frac{4}{5}, \quad P_{22}(2)=\frac{1}{5}$$

Για το αναμενόμενο κόστος μιας περιόδου έχουμε:

$i=0,\ k=1$: Αφού $k=1$, το κόστος λειτουργίας είναι 3. Αν έρθει ένας πελάτης και φύγει (με πιθανότητα $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$) θα έχουμε και κέρδος 50. Αν έρθει ο πελάτης και δεν φύγει σ' αυτή την περίοδο δεν υπάρχει το κέρδος.

Επομένως το αναμενόμενο κόστος είναι $C_{01}=3-\frac{3}{10}\cdot 50=-12$.

$i=0,\ k=2$ Εδώ το κόστος λειτουργίας είναι 9 κ' η πιθανότητα είσπραξης του κέρδους των 50 είναι $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$.

επομένως $C_{02}=9-\frac{2}{5}\cdot 50=-11$

$i=1,\ k=1$ Κόστος λειτουργίας $=3$
Κέρδος $=50$ αν φύγει ένας πελάτης (με πιθανότητα $\frac{3}{5}$)

$$C_{11}=3-\frac{3}{5}\cdot 50=-27$$

$\underline{i=1,\ k=2}$ Κόστος λειτουργίας = 9

Κέρδος = 50 με πιθανότητα $\frac{4}{5}$

$$C_{12} = 9 - \frac{4}{5} \cdot 50 = -31$$

$\underline{i=2,\ k=1}$ Κόστος λειτουργίας = 3

Κέρδος = 50 με πιθανότητα $\frac{3}{5}$

$$C_{21} = 3 - \frac{3}{5} \cdot 50 = -27$$

$\underline{i=2,\ k=2}$ Κόστος λειτουργίας = 9

Κέρδος = 50 με πιθανότητα $\frac{4}{5}$

$$C_{22} = 9 - \frac{4}{5}\, 50 = -31.$$

Συνοπτικά έχουμε:

$P_{00}(1) = \frac{4}{5}$, $P_{01}(1) = \frac{1}{5}$, $P_{02}(1) = 0$

$P_{00}(2) = \frac{9}{10}$, $P_{01}(2) = \frac{1}{10}$, $P_{02}(1) = 0$

$P_{10}(1) = \frac{3}{10}$, $P_{11}(1) = \frac{1}{2}$, $P_{12}(1) = \frac{1}{5}$

$P_{10}(2) = \frac{2}{5}$, $P_{11}(2) = \frac{1}{2}$, $P_{12}(2) = \frac{1}{10}$

$P_{20}(1) = 0$, $P_{21}(1) = \frac{3}{5}$, $P_{22}(1) = \frac{2}{5}$

$P_{20}(2) = 0$, $P_{21}(2) = \frac{4}{5}$, $P_{22}(1) = \frac{1}{5}$

$C_{01} = -12$ $\quad C_{11} = -27$ $\quad C_{21} = -27$

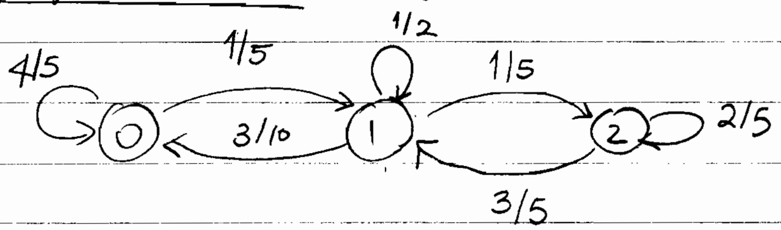
$C_{02} = -11$ $\quad C_{12} = -31$ $\quad C_{22} = -31.$

(b) Αφού έχουμε 3 καταστάσεις κ' 2 αποφάσεις σε κάθε κατάσταση, υπάρχουν 8 στάσιμες ντετερμινιστικές πολιτικές:

Πολιτική R	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$
R_1	1	1	1
R_2	1	1	2
R_3	1	2	1
R_4	1	2	2
R_5	2	1	1
R_6	2	1	2
R_7	2	2	1
R_8	2	2	2

(c) Για κάθε πολιτική βρίσκουμε το διάγραμμα μεταβάσεων της αντίστοιχης Μαρκοβιανής αλυσίδας, το κόστος για κάθε κατάσταση, τις πιθανότητες σε στάσιμη κατανομή και το μέσο κόστος ανά περίοδο:

Πολιτική $R = R_1$ $(d_0 = 1, d_1 = 1, d_2 = 1)$

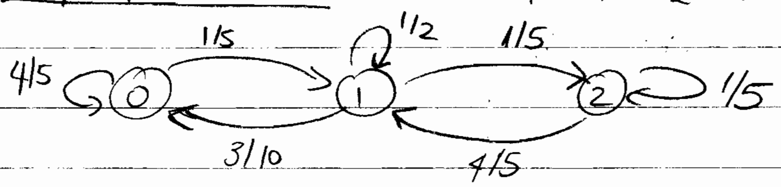


$C_0 = -12$ $C_1 = -27$ $C_2 = -27$

$\pi_0 = 0.529$ $\pi_1 = 0.353$ $\pi_2 = 0{,}118$

Μέσο κόστος $\overline{C}(R_1) = C_0 \cdot \pi_0 + C_1 \pi_1 + C_2 \pi_2 = -19.058$

Πολιτική $R = R_2$ $\quad (d_0 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = 2)$

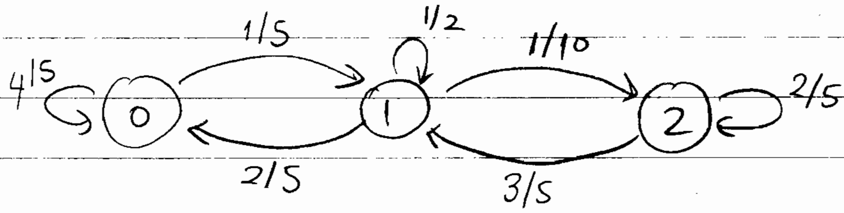


$C_0 = -12 \qquad C_1 = -27 \qquad C_2 = -31$

$\pi_0 = 0.545 \qquad \pi_1 = 0.364 \qquad \pi_2 = 0.091$

$\bar{C}(R_2) = -19.182$

Πολιτική $R = R_3$ $\quad (d_0 = 1,\ d_1 = 2,\ d_2 = 1)$

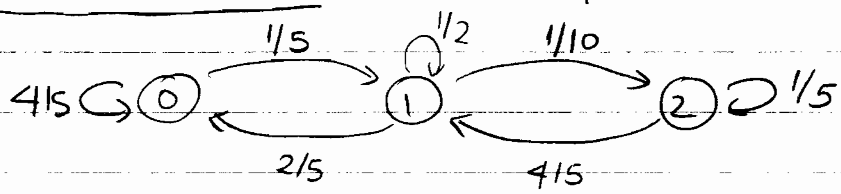


$C_0 = -12 \qquad C_1 = -31 \qquad C_2 = -27$

$\pi_0 = 0.632 \qquad \pi_1 = 0.316 \qquad \pi_2 = 0.052$

$\bar{C}(R_3) = -18.789$

Πολιτική $R = R_4$ $\quad (d_0 = 1,\ d_1 = 2,\ d_2 = 2)$

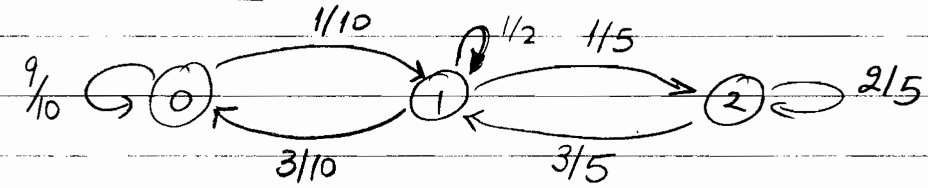


$C_0 = -12 \qquad C_1 = -31 \qquad C_2 = -31$

$\pi_0 = 0.64 \qquad \pi_1 = 0.32 \qquad \pi_2 = 0.04$

$\bar{C}(R_4) = -18.84$

Πολιτική $R = R_5$ $(d_0 = 2,\ d_1 = 1,\ d_2 = 1)$

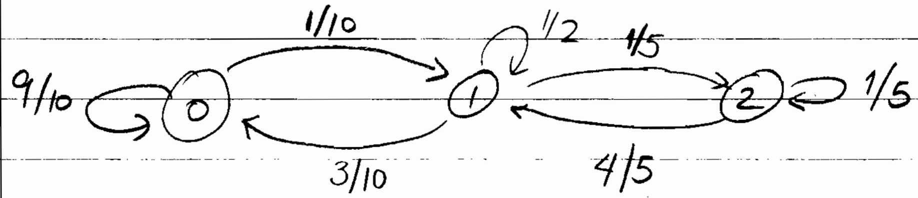


$C_0 = -11$ $C_1 = -27$ $C_2 = -27$

$\pi_0 = 0.692$ $\pi_1 = 0.231$ $\pi_2 = 0.077$

$\bar{C}(R_5) = -15.923$

Πολιτική $R = R_6$ $(d_0 = 2,\ d_1 = 1,\ d_2 = 2)$

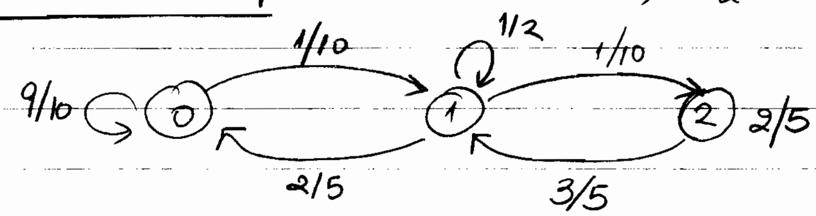


$C_0 = -11$ $C_1 = -27$ $C_2 = -31$

$\pi_0 = 0.706$ $\pi_1 = 0.235$ $\pi_2 = 0.059$

$\bar{C}(R_6) = -15.941$

Πολιτική $R = R_7$ $(d_0 = 2,\ d_1 = 2,\ d_2 = 1)$

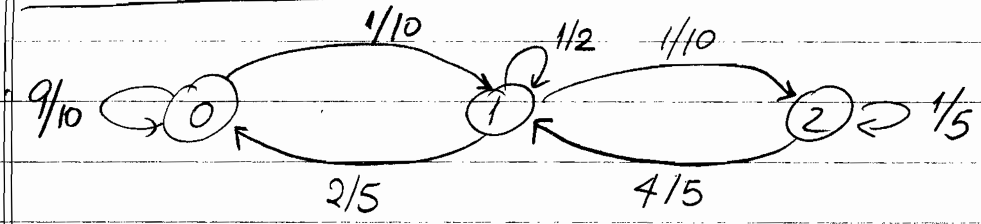


$C_0 = -11$ $C_1 = -31$ $C_2 = -27$

$\pi_0 = 0.774$ $\pi_1 = 0.194$ $\pi_2 = 0.032$

$\bar{C}(R_7) = -15.387$

Πολιτική $R=R_8$ $(d_0=2,\ d_1=2,\ d_2=2)$



$C_0=-11 \qquad C_1=-31 \qquad C_2=-31$

$\pi_0=0.780 \qquad \pi_1=0.195 \qquad \pi_2=0.025$

$$\bar{C}(R_8)=-15.390$$

Συγκρίνοντας το μέσο κόστος των πολιτικών βρίσκουμε ότι ελαχιστοποιείται για $R=R_2$. Επομένως η βέλτιστη πολιτική είναι $d_0=1$, $d_1=1$, $d_2=2$, δηλαδή να χρησιμοποιείται ο γρήγορος ρυθμός μόνο όταν στην αρχή της περιόδου βρίσκονται 2 πελάτες μέσα στο σύστημα. Το μέσο κόστος αυτής της πολιτικής είναι -19.182 ή ισοδύναμα το μέσο κέρδος ανά περίοδο είναι ίσο με 19.182.

Άσκηση 21.2-3

(a)

Η κατάσταση του συστήματος είναι το επίπεδο των πωλήσεων στη διάρκεια της περιόδου (τριμήνου) t

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{χαμηλές πωλήσεις} \\ 1, & \text{υψηλές πωλήσεις} \end{cases}$$

Επίσης υπάρχουν δύο δυνατές αποφάσεις σε κάθε κατάσταση i:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{όχι διαφήμιση} \\ 2, & \text{διαφήμιση.} \end{cases}$$

Θα ορίσουμε κέρδος (αντί κόστους) ενός βήματος, και η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι το αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά τρίμηνο (μεγιστοποίηση)

Το κέρδος ενός βήματος στην κατάσταση i και κάτω από την απόφαση k είναι ίσο με C_{ik}, όπου

$C_{01} = 2$ $\quad C_{02} = 1$

$C_{11} = 4$ $\quad C_{12} = 3$

Οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται παρακάτω:

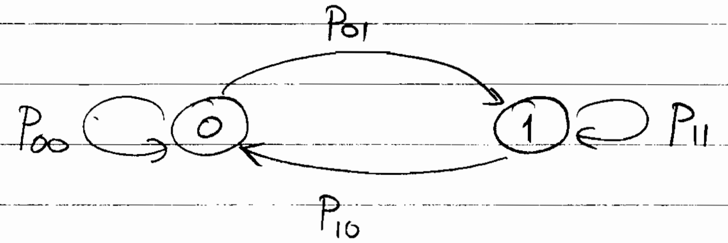
$P_{00}(1) = 3/4$ $\quad P_{01}(1) = 1/4$

$P_{00}(2) = 1/2$ $\quad P_{01}(2) = 1/2$

$P_{10}(1) = 1/2$ $\quad P_{11}(1) = 1/2$

$P_{10}(2) = 1/4$ $\quad P_{11}(2) = 3/4$

(b) Για όλες τις ντετερμινιστικές στάσιμες πολιτικές η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει το παρακάτω γενικό διάγραμμα:



όπου τα $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ εξαρτώνται από τις αποφάσεις που παίρνει η πολιτική στις δύο καταστάσεις.

Η κατανομή στάσιμης κατάστασης υπολογίζεται γενικά ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 (1 - P_{00}) = \pi_1 P_{10} \Rightarrow \pi_0 P_{01} = \pi_1 P_{10} = (1-\pi_0) P_{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 (P_{01} + P_{10}) = P_{10} \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{P_{10}}{P_{01}+P_{10}}$$

$$\pi_1 = \frac{P_{01}}{P_{01}+P_{10}}$$

Το αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά τρίμηνο για μια πολιτική $R = (d_1, d_2)$

$$\bar{C}(R) = C_{0d_0} \pi_0 + C_{1d_1} \pi_1 .$$

(c) Οι δυνατές πολιτικές είναι 4:

R_1 : $d_0 = 1$, $d_1 = 1$

$P_{01}(1) = 1/4$, $P_{10}(1) = 1/2$

$C_{01} = 2$ $\quad$ $C_{11} = 4$

Επομένως $\pi_0 = \dfrac{1/2}{1/2 + 1/4} = \dfrac{2}{3}$, $\pi_1 = \dfrac{1}{3}$

$$\bar{C}(R_1) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

R_2 : $d_0 = 1$, $d_1 = 2$

$$\left.\begin{array}{ll} P_{01}(1) = 1/4 , & P_{10}(2) = 1/4 \\ C_{01} = 2 , & C_{12} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2} , \ \pi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{C}(R_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

R_3 : $d_0 = 2$, $d_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{ll} P_{01}(2) = \frac{1}{2} , & P_{10}(1) = \frac{1}{2} \\ C_{02} = 1 , & C_{11} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2} , \ \pi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{C}(R_3) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

R_4 : $d_0 = 2$, $d_1 = 2$

$$\left.\begin{array}{ll} P_{01}(2) = \frac{1}{2} & P_{10}(2) = \frac{1}{4} \\ C_{02} = 1 , & C_{12} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{3} , \ \pi_1 = \frac{2}{3}$$

$$\bar{C}(R_4) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

Επομένως το μέσο κέρδος μεγιστοποιείται για την πολιτική $R_1 = (1,1)$ που είναι να μη γίνεται ποτέ διαφήμιση.

Άσκηση 21.2-7

(a)

Σχηματικά το πρόβλημα είναι το εξής: Υπάρχει μία μηχανή που κάθε μέρα μπορεί είτε να βρίσκεται σε καλή κατάσταση είτε να είναι χαλασμένη. Κάθε μέρα τη μηχανή μπορεί να χειρίζεται ένα από δύο δυνατά άτομα (Buck = 1, Bill = 2).
Αν η κατάσταση της μηχανής ορίζεται στην αρχή της μέρας t

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{χαλασμένη} \\ 1 & \text{λειτουργεί} \end{cases}$$

τότε το κέρδος μιας περιόδου είναι

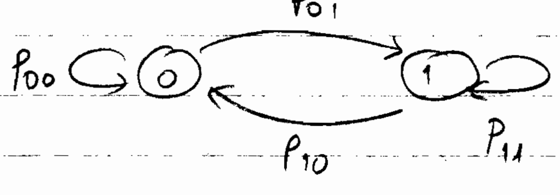
$$C_{01} = 0 \qquad C_{02} = 0$$
$$C_{11} = 1200 \qquad C_{12} = 1200$$

(Έχουμε υποθέσει ότι η μηχανή χαλάει στο τέλος της μέρας, δηλ. αν $X_t = 1$, τότε το κέρδος οπωσδήποτε θα συλλεχθεί στη διάρκεια της μέρας).

Όμοια οι πιθανότητες μετάβασης είναι

$$p_{00}(1) = 0.4 \qquad p_{01}(1) = 0.6$$
$$p_{00}(2) = 0.5 \qquad p_{01}(2) = 0.5$$
$$p_{10}(1) = 0.4 \qquad p_{11}(1) = 0.6$$
$$p_{10}(2) = 0.6 \qquad p_{11}(2) = 0.4$$

(b) Για όλες τις ντετερμινιστικές στάσιμες πολιτικές η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει την ίδια μορφή μ' αυτή της άσκησης 21.2-3



Επομένως $\pi_0 = \dfrac{P_{10}}{P_{10}+P_{01}}$, $\pi_1 = \dfrac{P_{01}}{P_{10}+P_{01}}$

(c) Για τις 4 δυνατές πολιτικές έχουμε:

$R_1 : d_0 = 1, d_1 = 1$ $\quad P_{01}(1) = 0.6, \quad P_{10}(1) = 0.4$, $\quad C_{01} = 0, \quad C_{11} = 1200 \Rightarrow \pi_0 = 0.4, \ \pi_1 = 0.6$

$$\bar{C}(R_1) = 1200 \cdot (0,6) = 720$$

$R_2 : d_0 = 1, d_1 = 2$ $\quad P_{01}(1) = 0.6, \quad P_{10}(2) = 0.6$, $\quad C_{01} = 0, \quad C_{12} = 1200 \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$

$$\bar{C}(R_2) = (1200)(0.5) = 600$$

$R_3 : d_0 = 2, d_1 = 1$ $\quad P_{01}(2) = 0.5, \quad P_{10}(1) = 0.4$, $\quad C_{02} = 0, \quad C_{11} = 1200 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{4}{9}, \quad \pi_1 = \frac{5}{9}$$

$$\bar{C}(R_3) = 1200 \cdot \frac{5}{9} = 666,7$$

$R_4 : d_0 = 2, d_1 = 2$ $\quad P_{01}(2) = 0.5, \quad P_{10}(2) = 0.6$

$$C_{02} = 0, \quad C_{12} = 1200$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{6}{11}, \quad \pi_1 = \frac{5}{11}$$

$$\bar{C}(R_4) = 1200 \cdot \frac{5}{11} = 545,5$$

Επομένως η πολιτική που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο μέσο κέρδος είναι η R_1, δηλ. ο Buck πρέπει να χειρίζεται τη μηχανή και στις δύο καταστάσεις.

Άσκηση 21.2-9 Έστω η κατάσταση X_t = αριθμός μονάδων προϊόντος σε απόθεμα στην αρχή της περιόδου t.
Δίνεται ότι η ζήτηση σε κάθε περίοδο είναι 0, 1 ή 2 μονάδες με πιθανότητα 1/3 για κάθε τιμή.
Επίσης δεν μπορούν να αποθηκευτούν πάνω από 2 μονάδες συνολικά· επομένως αν $X_t = i$ τότε η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να παραχθεί είναι ίση με $2-i$ (υποθέτουμε ότι η ποσότητα παράγεται άμεσα και αποθηκεύεται στην αρχή της περιόδου, πριν εμφανιστεί η ζήτηση).

Επομένως στην κατάσταση $i=0$ οι δυνατές αποφάσεις είναι $d_0 = 0, 1, 2$, στην κατάσταση $i=1$, $d_1 = 1$, ενώ στην κατάσταση $i=2$ η μόνη δυνατή απόφαση είναι $d_2 = 0$.

Για το κόστος μιας περιόδου έχουμε:

C_{ik} = κόστος παραγωγής + αναμ. κόστος αποθήκευσης αποθεμάτων + αναμενόμενο κόστος ελλείψεων.

Το κόστος παραγωγής k μονάδων είναι ίσο με

$$C_{prod}(k) = \begin{cases} 10 + 5k, & k>0 \\ 0 & k=0. \end{cases}$$

Το κόστος αποθήκευσης είναι ίσο με 4 επί τον αριθμό των απόθεμάτων προϊόντων. Αν $X_t = i$ και $d_i = k$, τότε στην αρχή της μέρας θα υπάρχουν $i+k$ μονάδες σε απόθεμα. Αν D_t είναι η ζήτηση στη διάρκεια της ημέρας, τότε:

- Αν $D_t < i+k$, τότε η ποσότητα αποθεμάτων στο τέλος της μέρας είναι ίση με $i+k-D_t$
- Αν $D_t \geq i+k$, η ποσότητα αποθεμάτων είναι ίση με 0.

Επομένως η ποσότητα απούλητων προϊόντων είναι ίση με $\max(i+K-D_t, 0)$ και το κόστος αποθήκευσης

$$C_{hold}(i,k) = 4\, E[\max(i+K-D_t, 0)] \qquad \text{(αναμενόμενη τιμή)}$$

Για το κόστος των ελλείψεων έχουμε: ότι η ποσότητα ελλείψεων είναι ίση με $\max(D_t - i - k, 0)$

Το κόστος ελλείψεων είναι ίσο με 8 αν υπάρχει έλλειψη μιας μονάδας και 32 για 2 μονάδες.

Επομένως το αναμενόμενο κόστος ελλείψεων είναι

$$C_{short}(i,k) = 8 \cdot P[D_t = i+k+1] + 32\, P[D_t = i+k+2]$$

Συνολικά έχουμε:

$$C_{ik} = C_{prod}(k) + C_{hold}(i,k) + C_{short}(i,k)$$

Για $i=0$:

$k=0$: $C_{prod}(0) = 0$

$$C_{hold}(0,0) = 0, \quad C_{short}(0,0) = 8 \cdot P[D_t = 1] + 32 P[D_t = 2] =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{3} + 32 \cdot \frac{1}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}33$$

$$C_{00} = 13.33$$

$k=1$: $C_{prod}(1) = 15$

$$C_{hold}(0,1) = 4 \cdot E[\max(1-D_t, 0)] = 4 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0\right] = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$C_{short}(0,1) = 8P[D_t = 2] + 32P[D_t=3] = 8\cdot\frac{1}{3} = 2.67$$

$$\Rightarrow C_{01} = 15 + 1.33 + 2.67 = 19$$

<u>$i=0,\ k=2$</u>

$$\left.\begin{aligned} &C_{prod}(2) = 20 \\ &C_{hold}(0,2) = 4\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0\right] = 4 \\ &C_{short}(0,2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{02} = 24$$

<u>$i=1,\ k=0$</u>

$$\left.\begin{aligned} &C_{prod}(0) = 0 \\ &C_{hold}(1,0) = C_{hold}(0,1) = 1.33 \quad (\text{γιατί;}) \\ &C_{short}(1,0) = C_{short}(0,1) = 2.67 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{10} = 4$$

<u>$i=1,\ k=1$</u>

$$\left.\begin{aligned} &C_{prod}(1) = 15 \\ &C_{hold}(1,1) = C_{hold}(0,2) = 4 \\ &C_{short}(1,1) = C_{short}(0,2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{11} = 19$$

<u>$i=2,\ k=0$</u>

$$\left.\begin{aligned} &C_{prod}(0) = 0 \\ &C_{hold}(2,0) = C_{hold}(0,2) = 4 \\ &C_{short}(2,0) = C_{short}(0,2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{20} = 4$$

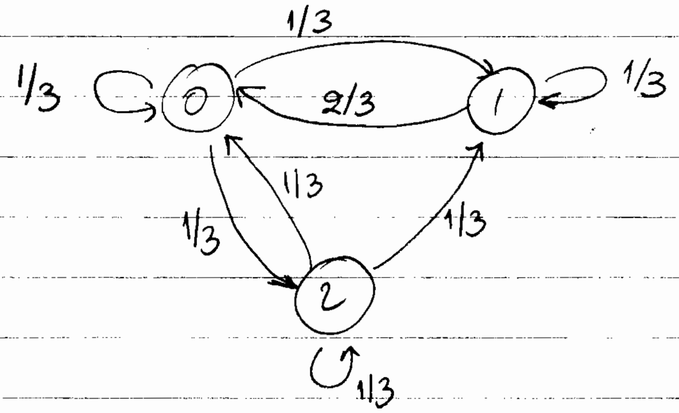
Για τις μεταβάσεις, έχουμε ήδη βρει ότι η ποσότητα αποθεμάτων στο τέλος της μέρας t είναι ίση με $max(i+k-D_t, 0)$, επομένως αυτή είναι και η κατάσταση στην αρχή της μέρας t+1.

$$X_{t+1} = max\{i+k-D_t, 0\}$$

(a) Η πολιτική που παράγει 2 μονάδες όταν $X_t = 0$ και τίποτε άλλο αντιστοιχεί στην πολιτική

$$R = d_0 = 2, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0.$$

Με βάση τα παραπάνω η μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει από αυτή την πολιτική είναι:



$C_0 = C_{02} = 24$

$C_1 = C_{10} = 4$

$C_2 = C_{20} = 4$

Οι πιθανότητες στάσιμης κατάστασης για την πολιτική R

είναι: $\pi_0 = 0.444 \quad \pi_1 = 0.333 \quad \pi_2 = 0.223$

Επομένως το μέσο κόστος ανά περίοδο $\bar{C}(R) = 12.88$

(b) Οι δυνατές πολιτικές είναι οι εξής

$R_1: d_0 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0$

$R_2: d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = 0$

$R_3: d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 0$

$R_4: d_0 = 1, d_1 = 1, d_2 = 0$

$R_5: d_0 = 2, d_1 = 0, d_2 = 0$

$R_6: d_0 = 2, d_1 = 1, d_2 = 0.$

Άσκηση 21.4-1

Παίρνουμε (αυθαίρετα) ως αρχική πολιτική την $R_1 : (1,1,1)$,

για την οποία έχουμε $C_{01} = -12$, $C_{11} = -27$, $C_{21} = -27$

και πίνακα μεταβάσεων

$$P(R_1) = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 3/10 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Το βήμα προσδιορισμού τιμών (value determination) οδηγεί στις εξισώσεις

$$g(R_1) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} P_{ij}(k)\, v_j(R_1) - v_i(R_1) \quad , \quad i = 0,1,2$$

και $v_2(R_1) = 0$.

(Υπενθυμίζεται ότι οι πρώτες τρεις εξισώσεις για $i=0,1,2$ έχουν 4 αγνώστους: $g(R_1)$, $v_0(R_1)$, $v_1(R_1)$, $v_2(R_1)$ κ' επομένως άπειρες λύσεις. Όπως έχουμε δει στη θεωρία, μπορούμε αυθαίρετα να θέσουμε $v_2(R_1) = 0$ για να βρούμε μια λύση).

Οι εξισώσεις εδώ γίνονται (αντικαθιστώντας $v_2(R_1) = 0$)

$$g(R_1) = -12 + \frac{4}{5} v_0(R_1) + \frac{1}{5} v_1(R_1) - v_0(R_1)$$

$$g(R_1) = -27 + \frac{3}{10} v_0(R_1) + \frac{1}{2} v_1(R_1) - v_1(R_1)$$

$$g(R_1) = -27 + \frac{3}{5} v_1(R_1)$$

οι οποίες απλοποιούνται ως εξής:

$$g(R_1) = -12 - \frac{1}{5} v_0(R_1) + \frac{1}{5} v_1(R_1) \qquad (1)$$

$$g(R_1) = -27 + \frac{3}{10} v_0(R_1) - \frac{1}{2} v_1(R_1) \qquad (2)$$

$$g(R_1) = -27 + \frac{3}{5} v_1(R_1) \qquad (3)$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των (2), (3):

$$\frac{3}{10} v_0(R_1) - \frac{1}{2} v_1(R_1) = \frac{3}{5} v_1(R_1) \Rightarrow \frac{3}{10} v_0(R_1) = \frac{11}{10} v_1(R_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0(R_1) = \frac{11}{3} v_1(R_1) \qquad (4)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (1), (3) κ' αντικαθιστώντας το $v_0(R_1)$ από την (4):

$$-12 - \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{3} v_1(R_1) + \frac{1}{5} v_1(R_1) = -27 + \frac{3}{5} v_1(R_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{17}{15} v_1 = 15 \Rightarrow v_1(R_1) = \frac{225}{17},$$

Άρα $v_0(R_1) = \frac{11}{3} v_0(R_1) = \frac{825}{17}$, και από την (3)

$$g(R_1) = -27 + \frac{3}{5} \cdot \frac{225}{17} = -\frac{324}{17}$$

Συνοπτικά έχουμε

$$g(R_1) = -\frac{324}{17} = -19.058$$

$$v_0(R_1) = \frac{825}{17} = 48.529$$

$$v_1(R_1) = \frac{225}{17} = 13.235$$

$$v_2(R_1) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το $g(R_1)$ εκφράζει το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου της πολιτικής R_1, που όπως έχουμε βρει στην άσκηση 21.2-1 ισούται με $\bar{C}(R_1) = -19.058$ κ' επαληθεύεται εδώ.

Για το βήμα βελτίωσης πολιτικής παίρνουμε για κάθε κατάσταση i την απόφαση k που ελαχιστοποιεί

$$\min_{k \in A(i)} \left\{ C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} P_{ij}(k)\, v_j(R_1) - v_i(R_1) \right\}.$$

Εδώ έχουμε:

$i=0$
$$\min \left\{ \begin{array}{ll} -12 + \frac{4}{5} v_0(R_1) + \frac{1}{5} v_1(R_1) - v_0(R_1) & (k=1) \\ -11 + \frac{9}{10} v_0(R_1) + \frac{1}{10} v_1(R_1) - v_0(R_1) & (k=2) \end{array} \right\}$$

$= \ldots$ (πράξεις) $\ldots = \min\{-19.058, -14.529\} = -19.058$, $k^* = 1$

$i=1$
$$\min \left\{ \begin{array}{ll} -27 + \frac{3}{10} v_0(R_1) + \frac{1}{2} v_1(R_1) - v_1(R_1) & (k=1) \\ -31 + \frac{2}{5} v_0(R_1) + \frac{1}{2} v_1(R_1) - v_1(R_1) & (k=2) \end{array} \right\}$$

$= \ldots = \min\{-19.058, -18.206\} = -19.058$ $\quad k^* = 1$

$i=2$ $\quad \min\left\{-27 + \frac{3}{5} v_1(R_1), \; -31 + \frac{4}{5} v_1(R_1)\right\} =$

$= \min\{-19.058, -20.412\} = -20.412$ $\quad k^* = 2$

Επομένως η νέα βελτιωμένη πολιτική είναι η

$R_2 = (1, 1, 2)$

Το βήμα προσδιορισμού τιμών για την R_2 δίνει τις παρακάτω εξισώσεις (θέτοντας πάλι $v_2(R_2)=0$).

$$g(R_2) = -12 - \frac{1}{5} v_0(R_2) + \frac{1}{5} v_1(R_2)$$

$$g(R_2) = -27 + \frac{3}{10} v_0(R_2) - \frac{1}{2} v_1(R_2)$$

$$g(R_2) = -31 + \frac{4}{5} v_1(R_2)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε:

$$g(R_2) = -\frac{211}{11} = -19.182$$

$$v_0(R_2) = \frac{1115}{22} = 50.682$$

$$v_1(R_2) = \frac{325}{22} = 14.773$$

$$v_2(R_2) = 0$$

Στο βήμα βελτίωσης παίρνουμε:

$\underline{i=0}$ $\min\left\{-12 + \frac{4}{5} v_0(R_2) + \frac{1}{5} v_1(R_2) - v_0(R_2),\ -11 + \frac{9}{10} v_0(R_2) + \frac{1}{10} v_1(R_2) - v_0(R_2)\right\} =$

$= \min\{-19.182, -14.591\} = -19.182$ $\qquad \underline{k^* = 1}$

$\underline{i=1}$ $\min\left\{-27 + \frac{3}{10} v_0(R_2) + \frac{1}{2} v_1(R_2) - v_1(R_2),\ -31 + \frac{2}{5} v_0(R_2) + \frac{1}{2} v_1(R_2) - v_1(R_2)\right\}$

$= \min\{-19.182, -18.114\} = -19.182$ $\qquad \underline{k^* = 1}$

$\underline{i=3}$ $\min\left\{-27 + \frac{3}{5} v_1(R_2),\ -31 + \frac{4}{5} v_1(R_2)\right\}$

$= \min\{-18.164, -19.182\} = -19.182$ $\qquad \underline{k^* = 2}$

Η νέα πολιτική είναι η ίδια με την προηγούμενη $R_2 = (1, 1, 2)$

Επομένως είναι <u>βέλτιστη</u>

Άσκηση 21.4-3 Εδώ τα C δηλώνουν κέρδος κ' επομένως στο βήμα βελτίωσης πρέπει να πάρουμε max.

Παίρνουμε ως αρχική πολιτική την $R_1 = (1,1)$ για την οποία έχουμε:

$$P(R_1) = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} C_{01} = 2 \\ C_{11} = 4 \end{array}$$

Βήμα Προσδιορισμού Τιμών $(v_1(R_1) = 0)$

$$\left.\begin{array}{l} g(R_1) = 2 + \frac{3}{4} v_0(R_1) - v_0(R_1) \\ g(R_1) = 4 + \frac{1}{2} v_0(R_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(R_1) = 2 - \frac{1}{4} v_0(R_1) \\ g(R_1) = 4 + \frac{1}{2} v_0(R_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(R_1) = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$v_0(R_1) = -\frac{8}{3} = -2.67$$

Βήμα Βελτίωσης

$i=0$: $\max\left\{2 + \frac{3}{4} v_0(R_1) - v_0(R_1),\ 1 + \frac{1}{2} v_0(R_1) - v_0(R_1)\right\} =$

$= \max\left\{\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{8}{3}$, $\quad k^* = 1$

$i=1$: $\max\left\{4 + \frac{1}{2} v_0(R_1),\ 3 + \frac{1}{4} v_0(R_1)\right\} =$

$= \max\left\{\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{8}{3}$, $\quad k^* = 1$

Επομένως η νέα πολιτική είναι η (1,1) δηλ. η ίδια με την προηγούμενη R_1, άρα η R_1 είναι βέλτιστη

Άσκηση 21.4-7 Έχουμε μεγιστοποίηση κέρδους:

Ξεκινάμε με την πολιτική R_1:

$$P(R_1) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} C_{01} = 0 \\ C_{11} = 1200 \end{matrix}$$

Βήμα προσδιορισμού τιμών $(v_1(R_1) = 0)$

$$\left.\begin{matrix} g(R_1) = 0.4\, v_0(R_1) - v_0(R_1) = -0.6\, v_0(R_1) \\ g(R_1) = 1200 + 0.4\, v_0(R_1) = 1200 + 0.4\, v_0(R_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(R_1) = 720$$

$$v_0(R_1) = -1200$$

Βήμα Βελτίωση

$i=0$ $\max\{0.4\, v_0(R_1) - v_0(R_1),\ 0.5\, v_0(R_1) - v_0(R_1)\}$

$= \max\{720,\ 600\} = 720$ $\qquad k^* = 1$

$i=1$ $\max\{1200 + 0.4\, v_0(R_1),\ 1200 + 0.6\, v_0(R_1)\}$

$= \max\{720,\ 480\} = 720$ $\qquad k^* = 1$

Επομένως η νέα πολιτική είναι η $(1,1)$ δηλαδή η ίδια με την προηγούμενη R_1, άρα η R_1 είναι βέλτιστη

Άσκηση 21.4-9

Από την άσκηση, 21.2-9 έχουμε:

$C_{00} = 13.33$, $C_{01} = 19$, $C_{02} = 24$

$C_{10} = 4$, $C_{11} = 19$

$C_{20} = 4$

Επίσης

$i=0, k=0$: $P_{00}(0) = 1$, $P_{01}(0) = 0$, $P_{02}(0) = 0$

$i=0, k=1$: $P_{00}(1) = \frac{2}{3}$ $P_{01}(1) = \frac{1}{3}$ $P_{02}(1) = 0$

$i=0, k=2$: $P_{00}(2) = \frac{1}{3}$ $P_{01}(2) = \frac{1}{3}$ $P_{02}(2) = \frac{1}{3}$

$i=1, k=0$: $P_{10}(0) = \frac{2}{3}$ $P_{11}(0) = \frac{1}{3}$ $P_{12}(0) = 0$

$i=1, k=1$: $P_{10}(1) = \frac{1}{3}$ $P_{11}(1) = \frac{1}{3}$ $P_{12}(1) = \frac{1}{3}$

$i=2, k=0$: $P_{20}(0) = \frac{1}{3}$ $P_{21}(0) = \frac{1}{3}$ $P_{22}(0) = \frac{1}{3}$

Ξεκινάμε αυθαίρετα με την πολιτική $R_1 = (0,0,0)$

$C_{00} = 13.33$

$C_{10} = 4$

$C_{20} = 4$

$$P(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Βήμα Προσδιορισμού Τιμών $\quad (v_2(R_1)=0)$

$$\left.\begin{aligned} g(R_1) &= 13.33 + v_0(R_1) - v_0(R_1) \\ g(R_1) &= 4 + \frac{2}{3} v_0(R_1) + \frac{1}{3} v_1(R_1) - v_1(R_1) \\ g(R_1) &= 4 + \frac{1}{3} v_0(R_1) + \frac{1}{3} v_1(R_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(R_1) = 13.33$$
$$v_0(R_1) = 21$$
$$v_1(R_1) = 7$$

Βήμα Βελτίωσης

$i=0$ $\quad \min\left\{13.33,\ 19 + \frac{2}{3}v_0(R_1) + \frac{1}{3}v_1(R_1) - v_0(R_1),\ 24 + \frac{1}{3}v_0(R_1) + \frac{1}{3}v_1(R_1) - v_0(R\right.$

$$= \min\{13.33,\ 14.33,\ 12.33\} = 12.33, \qquad \underline{k^* = 2}$$

$i=1$ $\quad \min\left\{4 + \frac{2}{3}v_0(R_1) + \frac{1}{3}v_1(R_1) - v_1(R_1),\ 19 + \frac{1}{3}v_0(R_1) + \frac{1}{3}v_1(R_1) - v_1(R_1)\right\}$

$$= \min\{13.33,\ 21.33\} = 13.33 \qquad \underline{k^* = 0}$$

$i=2$ $\quad$ Επειδή για $i=2$ έχουμε μόνο μια δυνατή απόφαση, $k=0$, το βήμα βελτίωσης είναι περιττό $\underline{k^*=0}$.

Επομένως η νέα πολιτική είναι $\quad R_2 = (2, 0, 0)$

για την οποία έχουμε

$$C_{02} = 24 \qquad P(R_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$C_{10} = 4$$
$$C_{20} = 4$$

Βήμα Προσδιορισμού Τιμών ($v_2(R_2)=0$)

$$\left.\begin{aligned} g(R_2) &= 24 + \tfrac{1}{3}v_0(R_2) + \tfrac{1}{3}v_1(R_2) - v_0(R_2) \\ g(R_2) &= 4 + \tfrac{2}{3}v_0(R_2) + \tfrac{1}{3}v_1(R_2) - v_1(R_2) \\ g(R_2) &= 4 + \tfrac{1}{3}v_0(R_2) + \tfrac{1}{3}v_1(R_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(R_2) = \frac{116}{9} = 12.889$$

$$v_0(R_2) = 20$$

$$v_1(R_2) = \frac{20}{3} = 6.667$$

Βήμα Βελτίωσης

$i=0$: $\min\left\{13.33,\ 19+\tfrac{2}{3}v_0(R_2)+\tfrac{1}{3}v_1(R_2)-v_0(R_2),\ 24+\tfrac{1}{3}v_0(R_2)+\tfrac{1}{3}v_1(R_2)-v_0(R_2)\right\}$

$=\min\{13.333,\ 14.556,\ 12.889\} = 12.889$ $\qquad k^* = 2$

$i=1$ $\min\left\{4+\tfrac{2}{3}v_0(R_2)+\tfrac{1}{3}v_1(R_2)-v_1(R_2),\ 19+\tfrac{1}{3}v_0(R_2)+\tfrac{1}{3}v_1(R_2)-v_1(R_2)\right\}$

$=\min\{12.889,\ 21.222\} = 12.889$ $\qquad k^*=0$

$i=2$ $\qquad k^*=0$

Επομένως η νέα πολιτική είναι η ίδια με την προηγούμενη $R_2 = (2,0,0)$, άρα είναι <u>βέλτιστη</u>