

Επιχειρησιακή Έρευνα – Στοχαστικά Μοντέλα

Τελική Εξέταση – Φεβρουάριος 2008

Θέμα 1. Ο ιδιοκτήτης μιας μικρής μεταφορικής εταιρείας έχει ένα φορτηγό που χρησιμοποιεί για μεταφορές μέσα στην πόλη και θέλει να προγραμματίσει τη συντήρηση και ενδεχόμενες αντικαταστάσεις του για τα επόμενα 5 χρόνια. Το φορτηγό είναι αυτή τη στιγμή ηλικίας 3 ετών. Η τιμή αγοράς νέου φορτηγού είναι ίση με 15000 ευρώ. Ένα φορτηγό ηλικίας j ετών έχει κόστος συντήρησης ίσο με c_j και αξία μεταπώλησης ίση με μ_j , όπως δίνονται στον παρακάτω πίνακα (σε ευρώ).

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
c_j	0	1000	1000	2000	2000	2500	3000	3500	4000
μ_j		10000	8000	8000	7000	6000	5000	4000	3000

Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική συντήρησης και αντικατάστασης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Θέμα 2. Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων έχει σταθμούς σε δύο πόλεις, Α και Β. Επίσης έχει μόνο δύο αυτοκίνητα από ένα συγκεκριμένο ακριβό μοντέλο. Τα αυτοκίνητα νοικιάζονται για μια μέρα κάθε φορά. Ένα αυτοκίνητο που βρίσκεται σε μια πόλη στην αρχή μιας μέρας θα βρίσκεται είτε στην ίδια πόλη στην αρχή της επόμενης μέρας με πιθανότητα $3/4$, ή στην άλλη πόλη με πιθανότητα $1/4$.

(α) Έστω X_n , ο αριθμός των αυτοκινήτων στην πόλη Α στην αρχή της μέρας n . Να δειχθεί ότι η $(X_n, n = 0, 1, \dots)$ είναι μαρκοβιανή διαδικασία και να βρεθεί ο πίνακας μεταβάσεων.

(β) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

(γ) Αν κάποια μέρα μια πόλη δεν έχει κανένα αυτοκίνητο διαθέσιμο τότε υπάρχει ένα κόστος ίσο με 100 € (λόγω πιθανής απώλειας εσόδων ενοικίασης). Να βρεθεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα.

Θέμα 3. Δίνεται μια μαρκοβιανή διαδικασία με τον παρακάτω πίνακα μεταβάσεων ενός βήματος:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας.

(β) Για κάθε μια από τις επαναληπτικές κλάσεις να βρεθεί η κατανομή στάσιμης κατάστασης σαν να ήταν ξεχωριστή αλυσίδα.

Θέμα 4. Κάθε χρόνο ο διευθυντής πωλήσεων ενός πολυκαταστήματος παίρνει καταστάσεις πελατών ταξινομημένων σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τις αγορές που έκαναν το προηγούμενο έτος. Οι κατηγορίες είναι Χ (χαμηλή), Μ (μεσαία) και Υ (υψηλή). Ο διευθυντής πρέπει να καθορίσει σε ποιους πελάτες θα σταλεί ο νέος ετήσιος κατάλογος. Το κόστος αποστολής ενός καταλόγου είναι 15 €. Οι αγορές κάποιου πελάτη εξαρτώνται από την κατηγορία του

και από το αν λάβει κατάλογο ή όχι. Συγκεκριμένα, αν ένας πελάτης της κατηγορίας X λάβει κατάλογο, οι αγορές του την επόμενη χρονιά θα είναι κατά μέσο όρο 20€, ενώ αν δε λάβει κατάλογο 10€. Τα αντίστοιχα ποσά για ένα πελάτη κατηγορίας M είναι 35 και 15€ και για ένα πελάτη κατηγορίας Y, 50 και 25€.

Η απόφαση για αποστολή ή όχι καταλόγου επίσης επηρεάζει και την ταξινόμηση του πελάτη το επόμενο έτος. Αν ένας πελάτης κατηγορίας X λάβει κατάλογο τότε με πιθανότητα 0.3 παραμένει στην κατάσταση X την επόμενη χρονιά, με πιθανότητα 0.4 μετακινείται στην κατηγορία M και με πιθανότητα 0.3 στην κατηγορία Y. Αν ο πελάτης κατηγορίας X δε λάβει κατάλογο, τότε οι πιθανότητες για την κατηγορία που θα βρεθεί την επόμενη χρονιά είναι 0.5 στη X, 0.4 στη M και 0.1 στην Y.

Οι πιθανότητες μετάβασης για ένα πελάτη κατηγορίας M που λαβαίνει κατάλογο είναι 0.2 στη X, 0.2 στη M και 0.6 στην Y, ενώ για ένα πελάτη κατηγορίας M που δε λαβαίνει κατάλογο, 0.3 στη X, 0.4 στη M και 0.3 στην Y.

Τέλος, οι πιθανότητες μετάβασης για ένα πελάτη κατηγορίας Y που λαβαίνει κατάλογο είναι 0.1 στη X, 0.1 στη M και 0.8 στην Y, ενώ για ένα πελάτη κατηγορίας Y που δε λαβαίνει κατάλογο, 0.2 στη X, 0.4 στη M και 0.4 στην Y.

Ο διευθυντής θέλει να βρει την πολιτική που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα για κάθε πελάτη.

(α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (να προσδιοριστούν ο χώρος καταστάσεων, τα σύνολα αποφάσεων, η συνάρτηση κέρδους και οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος). Πόσες είναι οι στάσιμες ντετερμινιστικές πολιτικές;

(β) Θεωρήστε την πολιτική σύμφωνα με την οποία κατάλογος στέλνεται μόνο στους πελάτες κατηγορίας Y. Ξεκινώντας από αυτή την πολιτική να γίνει μια επανάληψη του αλγόριθμου βελτίωσης πολιτικής (δηλαδή το βήμα προσδιορισμού τιμών και το βήμα βελτίωσης). Ποιο είναι το αποτέλεσμα αυτής της επανάληψης; (δηλαδή η πολιτική που εξετάζεται είναι βέλτιστη ή όχι;)