# **Επιχειρησιακή Έρευνα – Στοχαστικά Μοντέλα**

Τελική Εξέταση – Φεβρουάριος 2012

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.** Ένας εργαζόμενος θέλει να προγραμματίσει τα έξοδά του για τους επόμενους $N$ μήνες. Αυτή τη στιγμή (αρχή του πρώτου μήνα) έχει στην τράπεζα ένα ποσό $D$. Στην αρχή κάθε μήνα ο εργαζόμενος εισπράττει μισθό ίσο με $w$. Αφού εισπράξει το μισθό του πρέπει να προσδιορίσει το ποσό που θα ξοδέψει στη διάρκεια του μήνα. Δεν υπάρχει δυνατότητα δανεισμού και επομένως το ποσό αυτό δε μπορεί να υπερβαίνει το συνολικό 'πλούτο' του εργαζόμενου τη στιγμή αυτή. Το ποσό που δεν καταναλώνεται κατατίθεται στην τράπεζα σε ένα λογαριασμό με μηνιαίο επιτόκιο ίσο με $r$ και μηνιαίο ανατοκισμό.
Αν σε ένα μήνα ο εργαζόμενος ξοδέψει ποσό $x$, έχει ωφέλεια ίση με $u(x)$. Επίσης στο τέλος του ορίζοντα των $N$ μηνών, αν το συνολικό ποσό που υπάρχει στην τράπεζα είναι πάνω από $M$ τότε ποσό $M$ από αυτό θα διατεθεί για την αγορά ενός αυτοκινήτου που έχει ωφέλεια για τον εργαζόμενο ίση με $V$. Το ποσό που θα μείνει (υπόλοιπο μετά την αγορά του αυτοκινήτου ή ολόκληρη η αποταμίευση αν δεν αγοραστεί αυτοκίνητο), θα ξοδευτεί για άλλους σκοπούς με συνολική συνάρτηση ωφέλειας $u$ όπως παραπάνω.
Σκοπός του εργαζόμενου είναι να μεγιστοποιήσει τη συνολική ωφέλεια από τη διαχείριση της περιουσίας του στο διάστημα των $N$ μηνών.
Να οριστεί ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα και να γραφούν οι εξισώσεις βελτιστότητας.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.** Στο εργαστήριο ενός φωτογράφου υπάρχουν δύο φωτιστικά οροφής που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Κάθε μέρα κάθε ένα από αυτά έχει πιθανότητα 5% να καεί. Η λάμπα του κάθε φωτιστικού κοστίζει 30 ευρώ και η διαδικασία αντικατάστασης κοστίζει 50 ευρώ. Ο φωτογράφος έχει αποφασίσει ότι θα αλλάζει τις λάμπες μόνο όταν κάποιο πρωί που μπαίνει στο εργαστήριο είναι και οι δύο καμένες. Η αντικατάσταση μπορεί να γίνει μόνο το πρωί και είναι ακαριαία. Αν κάποια μέρα λειτουργεί μόνο ένα φωτιστικό ή αν καεί μόνο το ένα στη διάρκεια της μέρας, τότε υπάρχει ένα κόστος ίσο με 50 ευρώ λόγω μειωμένης παραγωγικότητας. Αν κάποια μέρα καούν και οι δύο λάμπες υπάρχει κόστος ίσο με 1000 ευρώ λόγω μηδενικής παραγωγικότητας.
**(α)** Να οριστεί μια μαρκοβιανή διαδικασία που περιγράφει τη λειτουργία των φωτιστικών και να βρεθεί ο πίνακας πιθανοτήτων πρώτης μετάβασης.
**(β)** Να βρεθεί το ποσοστό ημερών που το εργαστήριο λειτουργεί με ελλιπή φωτισμό ή μηδενικό φωτισμό. (Οι συνθήκες φωτισμού μιας μέρας καθορίζονται από τη χειρότερη κατάσταση φωτισμού της μέρας).
**(γ)** Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο ημερήσιο κόστος σε μεγάλο ορίζοντα.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.** Μια έρευνα σχετικά με τους τηλεθεατές της χώρας έχει δώσει τα παρακάτω αποτελέσματα: Έστω $X_t$ η κατάσταση ενός τηλεθεατή στην αρχή της περιόδου $t = 1, 2, \ldots$, όπου οι δυνατές καταστάσεις είναι : 0=δε βλέπει ποτέ τηλεόραση, 1=βλέπει μόνο κρατικά κανάλια, 2=βλέπει αρκετά συχνά τηλεόραση, 3=εθισμένος στην τηλεόραση, 4=προσπαθεί να αλλάξει τη στάση του σχετικά με την τηλεθέαση, 5=παθολογική εξάρτηση από την τηλεόραση. Ο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος δίνεται παρακάτω

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/2 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 7/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**(α)** Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.
**(β)** Ποια είναι η πιθανοτητα ένας τηλεθεατής ξεκινώντας από το να βλέπει κρατικά κανάλια μόνο, να καταλήξει σε παθολογική εξάρτηση από την τηλεόραση;

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.** Ένας τοπικός πυροσβεστικός σταθμός έχει υπό την ευθύνη του δύο δασικές περιοχές Α και Β. Υπάρχουν δύο διαθέσιμα πυροσβεστικά οχήματα και στην αρχή κάθε μέρας ο διοικητής αποφασίζει πώς θα κατανεμηθούν στις δύο περιοχές (και τα δύο στην Α, ένα στην Α και ένα στη Β ή και τα δύο στη Β). Στην αρχή κάθε μέρας η κάθε περιοχή βρίσκεται είτε σε κανονική κατάσταση (όχι πυρκαγιά) είτε σε κατάσταση πυρκαγιάς. Αν μια περιοχή βρίσκεται σε κανονική κατάσταση στην αρχή μιας μέρας, τότε η πιθανότητα να βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς στην αρχή της επόμενης μέρας είναι ίση με 0.3 αν δεν υπάρχει κανένα όχημα σ' αυτή την περιοχή, με 0.2 αν υπάρχει ένα όχημα και με 0.1 αν υπάρχουν δύο οχήματα. Αντίστοιχα αν μια περιοχή βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς στην αρχή μιας μέρας, τότε η πιθανότητα να βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς στην αρχή της επόμενης μέρας είναι ίση με 0.9 αν δεν υπάρχει κανένα όχημα σ' αυτή την περιοχή, με 0.6 αν υπάρχει ένα όχημα και με 0.3 αν υπάρχουν δύο οχήματα. Υποθέτουμε ότι οι περιοχές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Αν μια περιοχή βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς μια μέρα τότε ο αναμενόμενος αριθμός καμένων δέντρων στη διάρκεια της μέρας είναι ίσος με 300 αν εκεί δεν υπάρχει κανένα όχημα, με 250 αν υπάρχει ένα όχημα και με 100 αν υπάρχουν δύο οχήματα.

Το κριτήριο βελτιστοποίσης είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου αριθμού καμένων δέντρων ανά ημέρα και στις δύο περιοχές συνολικά.

**(α)** Να οριστεί μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων για το παραπάνω πρόβλημα (Υπόδειξη: Μπορείτε να ορίσετε ως κατάσταση $s = 0, A, B, AB$ αν στην αρχή της μέρας δεν υπάρχει πουθενά πυρκαγιά, υπάρχει πυρκαγιά μόνο στην A, μόνο στη B, ή και στις δύο περιοχές, αντίστοιχα.

**(β)** Έστω η πολιτική κατανομής $R$: όταν και οι δύο περιοχές είναι στην ίδια κατάσταση τότε πηγαίνει από ένα όχημα στην κάθε μια, ενώ όταν μόνο μία έχει πυρκαγιά τότε και τα δύο οχήματα πηγαίνουν στην κατάσταση πυρκαγιάς. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός καμένων δέντρων ανά μέρα σε μεγάλο ορίζοντα κάτω από αυτή την πολιτική.