

## ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

**Θέμα 1:** Ένα τηλεπαιχνίδι παίζεται σε 3 βήματα ως εξής: κάθε παίχτης ξεκινάει από το κέντρο ενός πίνακα  $3 \times 3$  (9 κελιά) και μπορεί στα δύο πρώτα βήματα να κινηθεί εντός του πίνακα δεξιά, αριστερά, πάνω ή κάτω, με τον περιορισμό ότι δεν μπορεί να επιστρέψει στο κέντρο στο δεύτερο βήμα. Στο τελευταίο βήμα έχει τη δυνατότητα να παραμείνει στο κελί που έχει φτάσει ή να επιστρέψει στο κέντρο με διαγώνια κίνηση. Σε κάθε επίσκεψη του γίνονται 2 ερωτήσεις και για κάθε ερώτηση που απαντά σωστά παίρνει το ποσό που αναγράφεται στο αντίστοιχο κελί (της άφιξης). Εξαιρέση υπάρχει μόνο για το κεντρικό κελί που του γίνεται μία μόνο ερώτηση. Παρακάτω δίνονται τριάδες που αντιστοιχούν στο όνομα του κελιού, στην πιθανότητα σωστής απάντησης σε κάθε ερώτηση ανάλογα με το κελί που βρίσκεται ο παίχτης, και στο άμεσο κέρδος από κάθε σωστή απάντηση:

$$\begin{pmatrix} (7, 1/3, 20) & (3, 3/5, 10) & (6, 1/2, 15) \\ (4, 4/5, 5) & (1, 1/10, 140) & (2, 4/5, 5) \\ (8, 1/2, 15) & (5, 3/5, 10) & (9, 1/3, 20) \end{pmatrix}$$

Να ορίσετε ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα, να γράψετε τις εξισώσεις βελτιστότητας, και να καθορίσετε τη βέλτιστη διαδρομή κελιών έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το αναμενόμενο κέρδος από το παιχνίδι.

**Θέμα 2:** Ένας τζογαδόρος έχει αποφασίσει να ρισκάρει 3 εκατομμύρια ευρώ σε ένα παιχνίδι που εξελίσσεται το πολύ σε 3 φάσεις. Σε κάθε φάση του παιχνιδιού έχει το δικαίωμα να ποντάρει 1, 2 ή 3 εκ. ευρώ τα οποία και θα κερδίζει ή θα χάνει ισοπίθानα. Το στοίχημα θεωρείται κερδισμένο αν ο τζογαδόρος βρεθεί σε κάποια φάση του παιχνιδιού με κέρδος 3 εκ. ευρώ, διαφορετικά χάνει. Επιπλέον όροι του παιχνιδιού περιλαμβάνουν ότι το κέρδος του τζογαδόρου δεν μπορεί να υπερβεί τα 3 εκ. ευρώ σε καμία φάση του παιχνιδιού. Να μοντελοποιηθεί το παιχνίδι αυτό με στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό και να βρεθούν οι στρατηγικές πονταρίσματος του τζογαδόρου που μεγιστοποιούν την πιθανότητά του να κερδίσει το παιχνίδι.

**Θέμα 3:** Η τιμή μιας μετοχής κινείται ανοδικά ή πτωτικά κατά τη διάρκεια μιας μέρας στο χρηματιστήριο σύμφωνα με τους εξής κανόνες: αν σήμερα ήταν καθοδική, τότε αύριο παραμένει πτωτική με πιθαν.  $2/3$ . Αν όμως σήμερα ήταν σε άνοδο, τότε αύριο παραμένει ανοδική με πιθαν.  $1/2$  ή  $1/3$ , ανάλογα αν χθες κινήθηκε πτωτικά ή ανοδικά αντίστοιχα.

- Αποτελεί η μεταβολή της τιμής της μετοχής σε ημερήσια βάση μαρκοβιανή αλυσίδα; Αιτιολογήστε. Μοντελοποιήστε τη μεταβολή αυτή με μία κατάλληλη μαρκοβιανή διαδικασία και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  αυτής της αλυσίδας.
- Επαληθεύστε ότι η παραπάνω αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και βρείτε τη στάσιμη κατανομή της.
- Χωρίς να το υπολογίσετε, αποφανθείτε αν υπάρχει το  $\lim P^n$ , καθώς  $n \rightarrow \infty$ .
- Ποιό είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό (i) των ημερών και (ii) των διαδοχικών ημερών που η μετοχή παρουσιάζει άνοδο;

**Θέμα 4:** Έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι οι μεταβολές των πωλήσεων μιας πολυεθνικής εταιρείας κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας μπορούν να μοντελοποιηθούν ως μαρκοβιανή αλυσίδα (μ.α.). Δηλώνουμε την κατάσταση με  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , ανάλογα αν η εταιρεία κινήθηκε πτωτικά, σταθερά ή ανοδικά αντίστοιχα. Η εταιρεία μπορεί να παρεμβαίνει στη δυναμική των μεταβάσεων παίρνοντας την απόφαση να ελαττώνει, να σταθεροποιεί ή να αυξάνει τη διαφημιστική της καμπάνια. Δηλώνουμε την απόφαση αυτή με  $k \in \{-1, 0, 1\}$  αντίστοιχα. Οι πίνακες μετάβασης, αν η εταιρεία παίρνει πάντα

την ίδια απόφαση, ανεξάρτητα της κατάστασης στην οποία βρίσκεται δίνονται αντίστοιχα από:

$$P(-1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad P(1) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Αν η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να αλλάζει την απόφασή της  $k$ , ανάλογα με την κατάσταση  $i$  στην οποία βρίσκεται, τότε τίθεται ένα θέμα εύρεσης βέλτιστης πολιτικής στην παραπάνω μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (μ.δ.α.) στη βάση κάποιας συνάρτησης κόστους.

- (α) Περιγράψτε τις δυνατές πολιτικές  $R$  στην παραπάνω μ.δ.α. και βρείτε τα αναμενόμενα κόστη  $C_{i,k}$  όταν υποθέσουμε ότι παραμονή στην  $i$  κατάσταση επιφέρει μέσο κέρδος  $i$  μονάδων, ενώ απόφαση  $k$  επιφέρει μέσο κόστος  $k/2$  μονάδων. Ποιος είναι ο πίνακας μετάβασης που αντιστοιχεί στην πολιτική να παίρνεται πάντα απόφαση που συμβαδίζει (έχει κοινό πρόσημο) με τη μεταβολή των πωλήσεων;
- (β) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί στον πίνακα  $P(-1)$  και αντιστοιχεί στον πίνακα μετάβασης της πολιτικής σταθερής ελάττωσης της διαφημιστικής καμπάνιας. Ποιό είναι το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος κάτω από αυτήν την πολιτική;
- (γ) Ο διευθυντής της εταιρείας έχει την πεποίθηση ότι η παραπάνω πολιτική είναι βέλτιστη. Έχει δίκιο ή όχι; Εφαρμόστε τον Αλγόριθμο Βελτίωσης Πολιτικής για να το ελέγξετε.

**ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**