ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

Θέμα 1: Ένα τηλεπαιχνίδι παίζεται σε 3 βήματα ως εξής: κάθε παίχτης ξεκινάει απο το κέντρο ενός πίνακα 3×3 (9 κελιά) και μπορεί στα δύο πρώτα βήματα να κινηθεί εντός του πίνακα δεξιά, αριστερά, πάνω ή κάτω, με τον περιορισμό ότι δεν μπορεί να επιστρέψει στο κέντρο στο δεύτερο βήμα. Στο τελευταίο βήμα έχει τη δυνατότητα να παραμείνει στο κελί που έχει φτάσει ή να επιστρέψει στο κέντρο με διαγώνια κίνηση. Σε κάθε επίσκεψη του γίνονται 2 ερωτήσεις και για κάθε ερώτηση που απαντά σωστά παίρνει το ποσό που αναγράφεται στο αντίστοιχο κελί (της άφιξης). Εξαίρεση υπάρχει μόνο για το κεντρικό κελί που του γίνεται μία μόνο ερώτηση. Παρακάτω δίνονται τριάδες που αντιστοιχούν στο όνομα του κελιού, στην πιθανότητα σωστής απάντησης σε κάθε ερώτηση ανάλογα με το κελί που βρίσκεται ο παίχτης, και στο άμεσο κέρδος από κάθε σωστή απάντηση:

$$\begin{pmatrix} (7, 1/3, 20) & (3, 3/5, 10) & (6, 1/2, 15) \\ (4, 4/5, 5) & (1, 1/10, 140) & (2, 4/5, 5) \\ (8, 1/2, 15) & (5, 3/5, 10) & (9, 1/3, 20) \end{pmatrix}$$

Να ορίσετε ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα, να γράψετε τις εξισώσεις βελτιστότητας, και να καθορίσετε τη βέλτιστη διαδρομή κελιών έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το αναμενόμενο κέρδος απο το παιχνίδι.

Θέμα 2: Ένας τζογαδόρος έχει αποφασίσει να ρισκάρει 3 εκατομμύρια ευρώ σε ένα παιχνίδι που εξελίσσεται το πολύ σε 3 φάσεις. Σε κάθε φάση του παιχνιδιού έχει το δικαίωμα να ποντάρει 1, 2 ή 3 εκ. ευρώ τα οποία και θα κερδίζει ή θα χάνει ισοπίθανα. Το στοίχημα θεωρείται κερδισμένο αν ο τζογαδόρος βρεθεί σε κάποια φάση του παιχνιδιού με κέρδος 3 εκ. ευρώ, διαφορετικά χάνει. Επιπλέον όροι του παιχνιδιού περιλαμβάνουν ότι το κέρδος του τζογαδόρου δεν μπορεί να υπερβεί τα 3 εκ. ευρώ σε καμία φάση του παιχνιδιού. Να μοντελοποιηθεί το παιχνίδι αυτό με στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό και να βρεθούν οι στρατηγικές πονταρίσματος του τζογαδόρου που μεγιστοποιούν την πιθανότητά του να κερδίσει το παιχνίδι.

Θέμα 3: Η τιμή μιας μετοχής κινείται ανοδικά ή πτωτικά κατά τη διάρκεια μιας μέρας στο χρηματιστήριο σύμφωνα με τους εξής κανόνες: αν σήμερα ήταν καθοδική, τότε αύριο παραμένει πτωτική με πιθ. 2/3. Αν όμως σήμερα ήταν σε άνοδο, τότε αύριο παραμένει ανοδική με πιθ. 1/2 ή 1/3, ανάλογα αν χθες κινήθηκε πτωτικά ή ανοδικά αντίστοιχα.

(α) Αποτελεί η μεταβολή της τιμής της μετοχής σε ημερήσια βάση μαρκοβιανή αλυσίδα; Αιτιολογήστε. Μοντελοποιήστε τη μεταβολή αυτή με μία κατάλληλη μαρκοβιανή διαδικασία και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P αυτής της αλυσίδας.

(β) Επαληθεύστε ότι η παραπάνω αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και βρείτε τη στάσιμη κατανομή της.

(γ) Χωρίς να το υπολογίσετε, αποφανθείτε αν υπάρχει το $\lim P^n$, καθώς $n \to \infty$.

(δ) Ποιό είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό (i) των ημερών και (ii) των διαδοχικών ημερών που η μετοχή παρουσιάζει άνοδο;

Θέμα 4: Έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι οι μεταβολές των πωλήσεων μιας πολυεθνικής εταιρείας κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας μπορούν να μοντελοποιηθούν ως μαρκοβιανή αλυσίδα (μ.α.). Δηλώνουμε την κατάσταση με $i \in \{-1, 0, 1\}$, ανάλογα αν η εταιρεία κινηθεί πτωτικά, σταθερά ή ανοδικά αντίστοιχα. Η εταιρεία μπορεί να παρεμβαίνει στη δυναμική των μεταβάσεων παίρνοντας την απόφαση να ελαττώνει, να σταθεροποιεί ή να αυξάνει τη διαφημιστική της καμπάνια. Δηλώνουμε την απόφαση αυτή με $k \in \{-1, 0, 1\}$ αντίστοιχα. Οι πίνακες μετάβασης, αν η εταιρεία παίρνει πάντα την ίδια απόφαση, ανεξάρτητα της κατάστασης στην οποία βρίσκεται δίνονται αντίστοιχα από:

$$P(-1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad P(1) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Αν η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να αλλάζει την απόφασή της k, ανάλογα με την κατάσταση i στην οποία βρίσκεται, τότε τίθεται ένα θέμα εύρεσης βέλτιστης πολιτικής στην παραπάνω μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (μ.δ.α.) στη βάση κάποιας συνάρτησης κόστους.

(α) Περιγράψτε τις δυνατές πολιτικές R στην παραπάνω μ.δ.α. και βρείτε τα αναμενόμενα κόστη $C_{i,k}$ όταν υποθέσουμε ότι παραμονή στην i κατάσταση επιφέρει μέσο κέρδος i μονάδων, ενώ απόφαση k επιφέρει μέσο κόστος $k/2$ μονάδων. Ποιος είναι ο πίνακας μετάβασης που αντιστοιχεί στην πολιτική να παίρνεται πάντα απόφαση που συμβαδίζει (έχει κοινό πρόσημο) με τη μεταβολή των πωλήσεων;

(β) Υπολογίστε τη στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί στον πίνακα $P(-1)$ και αντιστοιχεί στον πίνακα μετάβασης της πολιτικής σταθερής ελάττωσης της διαφημιστικής καμπάνιας. Ποιό είναι το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος κάτω απο αυτήν την πολιτική;

(γ) Ο διευθυντής της εταιρείας έχει την πεποίθηση ότι η παραπάνω πολιτική είναι βέλτιστη. Έχει δίκιο ή όχι; Εφαρμόστε τον Αλγόριθμο Βελτίωσης Πολιτικής για να το ελέγξετε.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1 :

Βήμα n : n-οστή μετακίνηση , $n = 1, 2, 3$.

κατάσταση S_n : Το κελί που βρισκόμαστε πρίν τη n-οστή μετακίνηση.

απόφαση x_n : Το κελί που αποφασίζεται στη n-οστή μετακίνηση.

άμεσο κέρδος : η απόφαση x_n , μας οδηγεί σε αναμενόμενο κέρδος $r(x_n)$, που εξαρτάται μόνο απο το κελί που θα επισκεφτούμε.

κελί	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κέρδος	14	8	12	8	12	15	13,33	15	13,33

καθορίζεται απο $r(x_n) =$ # ερωτήσεων x αναμ. κέρδος ∀ ερώτηση

= # ερωτήσεων x πιθ. επιτυχίας x κέρδος σωστής απάντησης

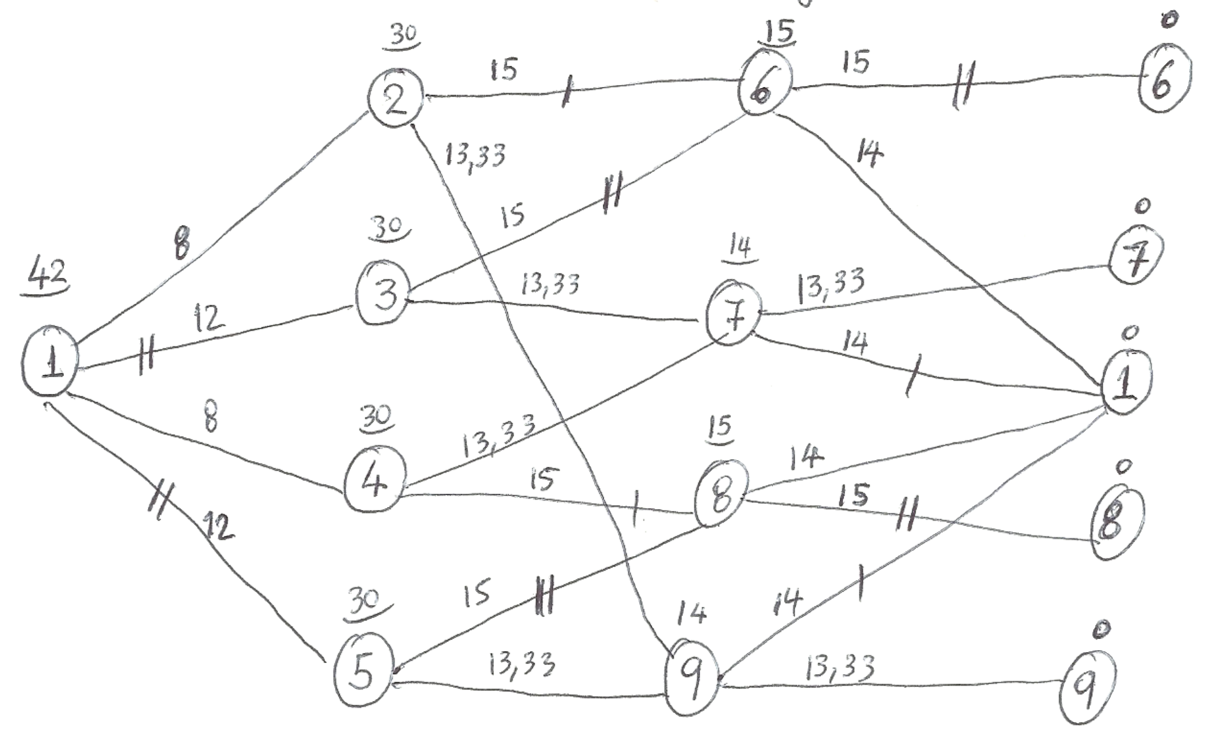
(δίνονται απο τον πίνακα στην εκφώνηση)

εξισώσεις βελτιστότητας (στόχος η μεγιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου κέρδους)

$$f_n^*(S_n) = \max_{\text{επιτρεπτά } x_n} \left\{ r(x_n) + f_{n+1}^*(S_{n+1}) \right\}, \quad \text{όπου}$$

$S_{n+1} = x_n$, $n = 1, 2, 3$, και $S_1 = 1$. Θέτουμε $f_4^*(S_4) = 0$.

Τα επιτρεπτά x_n και S_n καθορίζονται απο το παρακάτω διάγραμμα.



Παίρνουμε 2 βέλτιστες διαδρομές $1 \to 3 \to 6 \to 6$

και $1 \to 5 \to 8 \to 8$

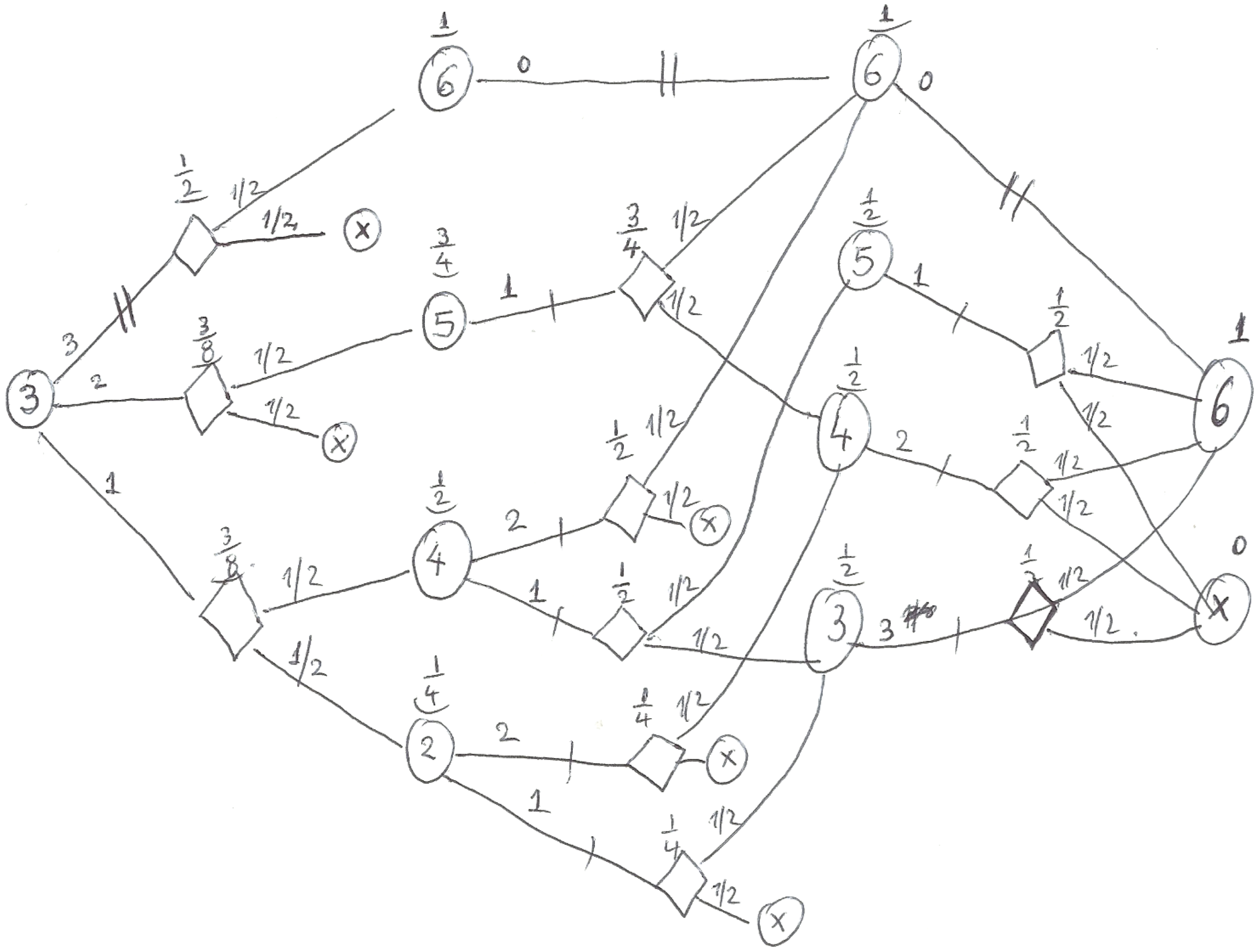
Θέμα 2:

Βήμα n : n-οστή φάση (ποντάρισμα)

Κατάσταση S_n : Το ποσό που έχει διαθέσιμο ο τζογαδόρος στη n-οστή φάση.

απόφαση x_n : το ποσό που στοιχηματίζει στη n-οστή φάση.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις οδηγούμαστε στο ακόλουθο διάγραμμα:
(καταστάσεων + κόμβων πιθανότητας)



$$f_n^*(S_n) = \max_{\substack{x_n:\\ 1 \le x_n \le \min\{S_n, 6-S_n\}}} \left\{ \frac{1}{2} f_{n+1}^*(S_n+x_n) + \frac{1}{2} f_{n+1}^*(S_n-x_n) \right\}.$$

Τελικά, να παίξει και τα 3 εκ. € στο 1ο ποντάρισμα είναι η καλύτερη στρατηγική με πιθ. επιτυχίας $\frac{1}{2}$.

Θέμα 3: Θέτουμε $(X_n)_{n\geq 0}$ τη στοχαστική διαδικασία

(α) της μεταβολής της τιμής σε ημερήσια βάση με $X_n \in \{0,1\}$, ανάλογα αν η μεταβολή είναι πτωτική ή ανοδική αντίστοιχα. Σύμφωνα με τις υποθέσεις:

$$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=0) = \frac{1}{2} \\ P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1, X_{n-1}=1) = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(X_n)_{n\geq 0} \text{ όχι μ.α.}}$$

- Μοντελοποίηση ως μ.α.

Ορίζουμε $(Y_n)_{n\geq 0}$ στοχ. διαδ. με $Y_n = (X_{n+1}, X_n)$.

Έχουμε $Y_n \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ και προκύπτει μ.α. με

$$P(Y_{n+1}=(0,0) \mid Y_n=(0,0)) = P(X_{n+2}=0, X_{n+1}=0 \mid X_{n+1}=0, X_n=0)$$

$$= P(X_{n+2}=0 \mid X_{n+1}=0, \cancel{X_n=0}) = \frac{2}{3}$$

$$P(Y_{n+1}=(0,1) \mid Y_n=(0,0)) = P(X_{n+2}=0, \underbrace{X_{n+1}=1 \mid X_{n+1}=0}_{\neq}, X_n=0) = 0$$

$$P(Y_{n+1}=(1,0) \mid Y_n=(0,0)) = P(X_{n+2}=1, X_{n+1}=0 \mid X_{n+1}=0, X_n=0) = \frac{1}{3}$$

και $P(Y_{n+1}=(1,1) \mid Y_n=(0,0)) = 0$.

Παρόμοια προκύπταν και τα υπόλοιπα και έχουμε ...

$$P = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

(β) <u>διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης</u>

$$\left.\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[loop above] \arrow[r] & (1,0) \arrow[d] \arrow[dl, shift left] \\
(0,1) \arrow[u] \arrow[ur, shift left] & (1,1) \arrow[l] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}\right\} \Rightarrow \ (Y_n) \text{ είναι αδιαχώριστη μ.α.}$$

Για ευκολία $(0,0) \leftrightarrow 0$, $(0,1) \leftrightarrow 1$, $(1,0) \leftrightarrow 2$, $(1,1) \leftrightarrow 3$.

<u>στάσιμη κατανομή</u>

Πρέπει $\pi P = \pi$ και $\sum_{i=0}^{3} \pi_i = 1$ $\quad\overset{\text{εξαιρούμε 1 εξίσωση}}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{array}{l|c|l}
\frac{2}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 = \pi_0 & & \pi_0 = 2\pi_2 \\
\frac{1}{2}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_1 & \Leftrightarrow \quad \pi_1 = \pi_2 & \Leftrightarrow \\
\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 = \pi_2 & \pi_3 = \frac{3}{4}\pi_2 & \\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 & \frac{19}{4}\pi_2 = 1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\pi_0 = \frac{8}{19} \\
\pi_1 = \frac{4}{19} \\
\pi_2 = \frac{4}{19} \\
\pi_3 = \frac{3}{19}
\end{array}$$

Άρα $\pi = \left(\frac{8}{19}, \frac{4}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19}\right)$

(γ) Βλέπουμε απ'ευθείας ότι $P_{(0,0),(0,0)} > 0$, άρα

η (Y_n) είναι αδιαχώριστη + <u>εργοδική</u> μ.α.

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} \leftarrow$$

block αναπαράσταση, όπου π όπως στο (β), το στάσιμο διάνυσμα.

(δ)

(i) μακροπρόθεσμο ποσοστό ημερών με άνοδο $= \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)} = \pi_{(1,0)} + \pi_{(1,1)} = \frac{7}{19}$

(ή $\pi_1 + \pi_3 = \pi_2 + \pi_3$)

μακροπρόθεσμο ποσοστό διαδοχικών ημερών με άνοδο $= \underset{\pi_3}{\underset{|||}{\pi_{(1,1)}}} = \frac{3}{19}$.

(α) • Μια πολιτική R καθορίζεται από ένα συνδυασμό αποφάσεων (5)
(d_{-1}, d_0, d_1) στις καταστάσεις -1, 0 και 1.

Χωρίς κανένα περιορισμό έχουμε $\boxed{d_i \in \{-1, 0, 1\}}$ που είναι οι δυνατές αποφάσεις k. Άρα έχουμε $3^3 = 27$ δυνατές πολιτικές.

• Από τις υποθέσεις είναι φανερό ότι

$$\boxed{C_{i,k} = -i + \frac{k}{2}} \quad , \forall\, i,k \in \{-1, 0, 1\}.$$

• Αν το πρόσημο της απόφασης συμβαδίζει με την πολιτική των πωλήσεων, τότε $R : (d_{-1}, d_0, d_1) = (-1, 0, 1)$

και από τις υποθέσεις

$$P(R) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(β) • στάσιμη κατανομή

Λύνουμε $\Pi P(-1) = \Pi$ και $\sum_{i=-1}^{1} \Pi_i = 1$. $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 0.1\,\Pi_{-1} + 0.2\,\Pi_0 + 0.2\,\Pi_1 &= \Pi_{-1} \\ \cancel{0.5\,\Pi_{-1} + 0.4\,\Pi_0 + 0.6\,\Pi_1} &= \cancel{\Pi_0} \\ 0.4\,\Pi_{-1} + 0.4\,\Pi_0 + 0.2\,\Pi_1 &= \Pi_1 \\ \Pi_{-1} + \Pi_0 + \Pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \Pi_{-1} + 2\Pi_0 + 2\Pi_1 &= 10\,\Pi_{-1} \\ 2\Pi_{-1} + 2\Pi_0 + \Pi_1 &= 5\Pi_1 \\ \Pi_{-1} + \Pi_0 + \Pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow$$

(διαγραφ. μια)

$$\left.\begin{aligned} 9\,\Pi_{-1} &= 2\Pi_0 + 2\Pi_1 \\ 2{,}\cancel{4}\,\Pi_1 &= \cancel{2}\Pi_{-1} + \cancel{2}\Pi_0 \\ \Pi_{-1} + \Pi_0 + \Pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2\Pi_0 + 2\Pi_1 &= 18\,\Pi_1 - 9\,\Pi_0 \\ 2\,\Pi_1 &= \Pi_{-1} + \Pi_0 \\ \Pi_{-1} + \Pi_0 + \Pi_1 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{11}{16}\Pi_0 \\ \Pi_{-1} &= \left(\frac{11}{8} - 1\right)\Pi_0 \\ \left(\frac{11}{16} + \frac{3}{8} + 1\right)\Pi_0 &= 1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \\ \Pi_{-1} &= \frac{6}{33} \\ \Pi_0 &= \frac{16}{33} \end{aligned} \Leftrightarrow \Pi = (\Pi_{-1}, \Pi_0, \Pi_1) = \left(\frac{6}{33}, \frac{16}{33}, \frac{11}{33}\right).$$

• <u>μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος</u>

$$E_{\pi(R)}(C) = \sum_{i=-1}^{1} \pi_i C_{i,-1} = \pi_{-1} C_{-1,-1} + \pi_0 C_{0,-1} + \pi_1 C_{1,-1}$$

$$= \frac{6}{33} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{33} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{33}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{43}{66}.$$

(γ) <u>Βήμα 1</u> (Βήμα Προσδιορισμού Τιμών).

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$g = C_{i,-1} + \sum_{j=-1}^{1} P_{ij}(-1)\, U_j - U_i, \quad \forall i \in \{-1, 0, 1\},$$

με $U_1 = 0$. Όμως από (β), $g = E_{\pi(R)}(C) = -\frac{43}{66}$.

Άρα γίνεται σύστημα 2x2 με αγνώστους τα U_{-1} και U_0.
(οι 2 τελευταίες, $i=0$ και $i=1$)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{43}{66} &= -\frac{1}{2} + 0.2\,U_{-1} + 0.4\,U_0 - U_0 \quad (1) \\ -\frac{43}{66} &= -\frac{3}{2} + 0.2\,U_{-1} + 0.6\,U_0 \quad (2) \end{aligned}\right| \iff$$

$$\left.\begin{aligned} (1)-(2):&\quad 0 = -12\,U_0 + 10 \\ (1)+(2):&\quad -\frac{430}{33} = 4\,U_{-1} - 20 \end{aligned}\right| \iff \boxed{\begin{aligned} U_0 &= \frac{5}{6} \\ U_{-1} &= \frac{115}{66} \end{aligned}}$$

<u>Βήμα 2</u> (Βήμα Βελτίωσης Πολιτικής). $\Rightarrow (-1, -1, 0)$ καλύτερη $\Downarrow$ $\boxed{\text{διευθυντής άδικο}}$

• <u>$i=-1$</u> $\min_k \left\{ C_{-1,k} + P^{(k)}_{-1,-1} U_{-1} + P^{(k)}_{-1,0} U_0 \right\}$

Άρα $\min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} + 0.1 \times \frac{115}{66} + 0.5 \times \frac{5}{6}}_{\simeq 1.09 \text{ (για } k=-1).\ \simeq},\ \underbrace{1 + 0.5 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times \frac{5}{6}}_{>},\ \underbrace{\frac{3}{2} + 0.3 \times \frac{115}{66} + 0.5 \times \frac{5}{6}}_{>} \right.$

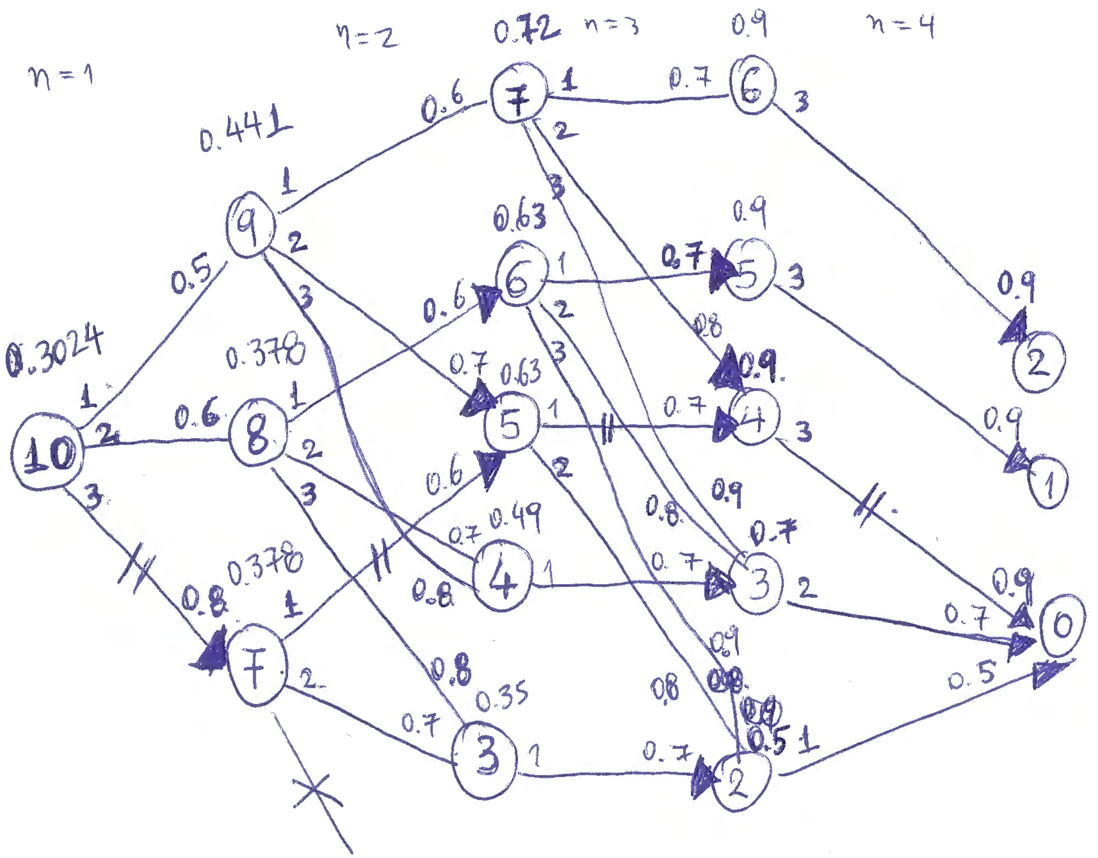
• <u>$i=0$</u> $\min_k \left\{ C_{0,k} + P_{0,-1}(k)\, U_{-1} + P_{0,0}(k)\, U_0 \right\}$

Άρα $\min_k \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2} + 0.2 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times \frac{5}{6}}_{\simeq 0.1819 \text{ (για } k=-1)},\ \underbrace{0 + 0.3 \times \frac{115}{66} + 0.5 \times \frac{5}{6}}_{>},\ \underbrace{\frac{1}{2} + 0.2 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times \frac{5}{6}}_{>} \right.$

• <u>$i=1$</u> $\min_k \left\{ C_{1,k} + P_{1,-1}(k)\, U_{-1} + P_{1,0}(k)\, U_0 \right\}$.

Άρα $\min_k \left\{ \underbrace{-\frac{3}{2} + 0.2 \times \frac{115}{66} + 0.6 \times \frac{5}{6}}_{-0.6514},\ \underbrace{-1 + 0.1 \times \frac{115}{66} + 0.2 \times \frac{5}{6}}_{-0.659\ (k=0)},\ \underbrace{-\frac{1}{2} + 0.1 \times \frac{115}{66} + 0.4 \times}_{>} \right.$

Παραλ. μονάδες	Τμήμα 1	Τμήμα 2	Τμήμα 3	Τμήμα 4
	πιθαν. λειτουργίας (κόστος εγκατάστασης)			
1	0.5 (1)	0.6 (2)	0.7 (1)	0.5 (2)
2	0.6 (2)	0.7 (4)	0.8 (3)	0.7 (3)
3	0.8 (3)	0.8 (5)	0.9 (4)	0.9 (4)



(2) $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (3, 1, 1, 3)$

πιθαν. = 30,24 %

πρόβλημα αξιοπιστίας μηχανής

Ένα ηλεκτρονικό σύστημα λειτουργεί, αν λειτουργήσουν και τα 4 τμήματα. Έχω δυνατότητα τοποθέτησης παράλληλων μονάδων σε κάθε τμήμα για να αυξηθεί η πιθαν. λειτουργίας του συστήματος. Έχω μόνο 1000 $ και τα κόστη τοποθέτησης i-παράλληλων μονάδων στο j-τμήμα (σε 100 $) δίνονται στον πίνακα μαζί με τις πιθανότητες να λειτουργήσουν ∀ δυνατή τοποθέτηση. Ποιά είναι η βέλτιστη τοποθέτηση?

Λύση

η πιθανότητα λειτουργίας όλου του συστήματος =

$P_1(x_1)\,P_2(x_2)\,P_3(x_3)\,P_4(x_4)$, όπου

x_i = # μονάδων που τοποθετούνται στο i-τμήμα.

Αναζητώ $\max_{x_1,x_2,x_3,x_4} P_1(x_1)\,P_2(x_2)\,P_3(x_3)\,P_4(x_4)$.

κάτω από περιορισμούς $C(x_1)+C(x_2)+C(x_3)+C(x_4) \le 10$

$x_i \geq 1$, $i=1,2,3,4$.

Εξισώσεις βελτιστότητας.

$$f_n^*(S_n) = \max_{x_n} \left\{ P_n(x_n)\, f_{n+1}^*(S_n - C(x_n)) \right\}$$

x_n: $C(x_n)$ εφικτά βάσει περιορισμών.

$$f_5^*(S_5) = 1$$

S_n = # χρηματικών μονάδων που έχω διαθέσιμες στην αρχή του n-οστού σταδίου.

$C(x_n)$: κόστος τοποθέτησης x_n μονάδων στο n-οστό τμήμα.