ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

(Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Απριλίου 2007)

1. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f_n, f \in L_p[0,1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ αν και μόνο αν $\|f_n - f\|_p \to 0$.

2. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f_n \in L^p[0,1]$ με $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $f \in L^p[0,1]$ και $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq [0,1]$ με $\lambda(A) < \delta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, να ισχύει

$$\int_A |f_n|^p d\lambda < \varepsilon.$$

3. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα: αν (x_n) ακολουθία στον X με $\|x_n\| \to 0$, τότε η $(T(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

4. Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X,X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με

$$S_y(x) = y + T(x).$$

Δείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

5. Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s) ds$$

για κάθε $t \in [0,1]$. [*Υπόδειξη:* Αν $M = \max\{|K(s,t)| : 0 \leq s, t \leq 1\}$ και $T : C[0,1] \to C[0,1]$ ο τελεστής που ορίζεται από την

$$(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t) f(s) ds,$$

δείξτε ότι $\|T^n\| \leq M^n/n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.]

6. Δείξτε ότι: για κάθε $1 \leq p < \infty$, ο ℓ_p είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $L_p[0,1]$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τον υπόχωρο του $L_p[0,1]$ που παράγεται από τις $f_n = (n(n+1))^{1/p} \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$.]

7. Στον c_{00} ορίστε νόρμα $\|\cdot\|$ με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$, αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $T : c_{00} \to c_{00}$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, η $\|x\| = \|Tx\|_\infty$ είναι νόρμα στον c_{00}.]

8. Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geq 0$ για κάθε i, j. Υποθέτουμε ακόμα ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε, για κάθε i, j,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \leq b p_j \text{ και } \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j \leq c p_i.$$

Δείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από την

$$T((\xi_i)_i) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a_{ij}\Big)_i$$

είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$.