ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

(Ημερομηνία Παράδοσης: 23 Απριλίου 2007)

1. Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με την ιδιότητα ο υπόχωρος $\mathrm{span}(A)$ να είναι πυκνός στον X. Δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

2. Δείξτε ότι, για κάθε $1 \leq p < \infty$, ο $L_p(\mathbb{R}^n)$ είναι διαχωρίσιμος.

3. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται *θ-δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, δείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

4. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon > 0$.
(α) Έστω $x_1, \ldots, x_k \in B_X$ με την ιδιότητα: $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$. Δείξτε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει ε-δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.
[*Υπόδειξη για το (α):* Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1 + \varepsilon/2)$ και έχουν ξένα εσωτερικά.]

5. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.
(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in B_X$ ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ να είναι ξένα.
(β) Δείξτε ότι *δεν* υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:
1. Το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x + A) = \mu(A)$ για κάθε Borel A και κάθε $x \in X$.
2. $\mu(A) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό $A \subseteq X$.
3. Υπάρχει μη κενό ανοιχτό $A_0 \subset X$ με $\mu(A_0) < +\infty$.

6. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν οι Y και X/Y είναι χώροι Banach, τότε ο X είναι χώρος Banach.

7. Έστω X χώρος Banach και έστω Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον Z. Είναι οι X/Y και X/Z ισόμορφοι; [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τους $X = \ell_2$, $Y = \{x \in \ell_2 : x_1 = 0\}$ και $Z = \{x \in \ell_2 : x_1 = x_2 = 0\}$.]

8. Έστω X γραμμικός χώρος και έστω Y υπόχωρος του X. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \to Y$. Θέτουμε $Z = \mathrm{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y,z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y,z) \in Y \times Z$.

(α) Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφος με τον X.

(β) Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z και ο X/Z είναι ισόμορφος με τον Y.