ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

(Ημερομηνία Παράδοσης: 3 Μαΐου 2007)

1. (α) Έστω H χώρος Hilbert και έστω x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H με την ιδιότητα $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(β) Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

2. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i\neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μια μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

3. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^{\perp}$.

4. Έστω H χώρος Hilbert και έστω W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

5. Στο χώρο $C[-1,1]$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

(α) Αν $F = \{f \in C[-1,1] : \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$, βρείτε τον $F^{\perp}$.

(β) Αν $G = \{f \in C[-1,1] : \int_{0}^{1} f(t)dt = 0\}$, βρείτε τον $G^{\perp}$ και αποδείξτε ότι $G^{\perp\perp} \neq G$.

6. Σε έναν χώρο Hilbert H δίνεται ένας γραμμικός τελεστής $T : H \to H$ με τις ιδιότητες: $T^2 = T$, $\|T\| \leq 1$. Αν $F = \mathrm{Ker}T$, δείξτε ότι:

(α) $T(H) \subseteq F^{\perp}$.

(β) Ο T είναι η ορθογώνια προβολή στον $F^{\perp}$.

7. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H, και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

8. Έστω H χώρος Hilbert και έστω (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Δείξτε ότι η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.