ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

(Ημερομηνία Παράδοσης: 14 Μαΐου 2007)

1. Έστω X χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.

2. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα

$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και

$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in X.$$

[*Υπόδειξη:* Βρείτε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \to \mathbb{K}$ με $|\psi(x_1, x_2)| \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$ και $\psi(x, x) = f(x)$.]

3. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι $|\cdot|$ είναι μία άλλη νόρμα στον W που είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον W. Δείξτε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X που είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ στον X και ο περιορισμός της στον W είναι η $|\cdot|$.

4. Θεωρούμε τον χώρο $\ell_\infty(\mathbb{R})$ των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$,

$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n.$$

5. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Ο μηδενιστής του Y είναι το

$$N(Y) = \{f \in X^* : \ \forall y \in Y \ f(y) = 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/N(Y)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y^*. Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/N(Y) \to Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$.
(β) Δείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $N(Y)$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \to N(Y)$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \to X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.

6. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, δείξτε ότι $f \in X^*$.

7. Θεωρούμε τον $L^2[-1, 1]$ (το μέτρο είναι το Lebesgue). Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$E_a = \{f \in C[-1, 1] : f(0) = a\}.$$

Δείξτε ότι κάθε E_a είναι κυρτό και πυκνό στον $L^2[-1, 1]$. Αν $a \neq b$, δείξτε ότι τα E_a και E_b δεν διαχωρίζονται από κανένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $F : L^2[-1, 1] \to \mathbb{R}$.

8. Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και A, B μη κενά, ξένα, κυρτά υποσύνολα του X με την ιδιότητα

$$0 \notin \overline{A - B}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$