ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

(Ημερομηνία Παράδοσης: 28 Μαΐου 2007)

1. Δείξτε ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

2. Θεωρούμε τον χώρο c των συγκλινουσών ακολουθιών με νόρμα την $\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την απεικόνιση $T : c \to c_0$ που ορίζεται ως εξής: αν $x = (a_n)$ με $a_n \to a$, τότε $T(x) = (a, a_1 - a, a_2 - a, \ldots)$.]

(β) Δείξτε ότι οι c και c_0 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $S : c_0 \to c$ είναι ισομετρία επί, παρατηρήστε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $S(e_n) \notin c_0$.]

(γ) Δείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(\mu)$, $1 < p < +\infty$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $g \in L_q(\mu)$, $\int_\Omega f_n g d\mu \to 0$.

(β) Ισχύει $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$ και για κάθε $E \in \mathcal{A}$, $\int_E f_n d\mu \to 0$.

4. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $y \in Y$ ο $T_y : X \to Z$ με $T_y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

5. Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L_1[0, 2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1[0, 1]$ υπάρχει $\tilde{f} \in X$ ώστε $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in L_1[0, 1]$, υπάρχει $\tilde{f} \in X$ με $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$ και $\|\tilde{f}\|_1 \leq M\|f\|_1$.

6. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X, με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^\infty |f(x_n)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$\sum_{n=1}^\infty |f(x_n)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

7. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ ισχύει $g \circ T \in X^*$.

8. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$ στον Y, δείξτε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.