ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7
(Ημερομηνία Παράδοσης: 4 Ιουνίου 2007)

1. Έστω X χώρος Banach και (x_n) βάση Schauder του X. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Ακόμα ισχυρότερα, δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \notin \overline{\mathrm{span}\{x_m : m \neq n\}}.$$

2. Έστω (x_n) και (y_n) βάσεις Schauder των χώρων Banach X και Y. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει στον X αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ συγκλίνει στον Y.
(β) Υπάρχει $C > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$,

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n y_n\right\| \leq C\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right\|.$$

3. (α) Έστω X ένας χώρος Banach με βάση Schauder και έστω D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι ο X έχει βάση Schauder που αποτελείται από στοιχεία του D.
(β) Δείξτε ότι ο $C[0,1]$ έχει βάση Schauder που αποτελείται από πολυώνυμα.

4. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder την (x_n). Έστω (x_n^*) η διορθογώνια ακολουθία της (x_n).
(α) Δείξτε ότι η (x_n^*) είναι βασική ακολουθία στον X^*.
(β) Δείξτε ότι η (x_n^*) είναι βάση Schauder του X^* αν και μόνο αν, για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S_{X_n}} |x^*(x)| = 0,$$

όπου $X_n = \overline{\mathrm{span}}\{x_m : m \geq n\}$.

5. Ορίζουμε $x_n = e_1 + \cdots + e_n$ στον c_0. Εξετάστε αν η (x_n) είναι βάση Schauder για τον c_0. Προσδιορίστε την διορθογώνια ακολουθία (x_n^*) και εξετάστε αν είναι βάση Schauder του ℓ_1.

6. Έστω X ένας χώρος Banach και έστω (x_n) βάση Schauder για τον X με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n - x_{n-1})$ (όπου $x_0 = 0$) είναι επίσης βάση Schauder του X.

7. Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to 0$. Δείξτε ότι

$$y_n := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0.$$

8. Έστω X ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν είναι σχεδόν παντού ίσες). Ορίζουμε μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X παίρνοντας σαν βάση περιοχών του 0 την ακολουθία των συνόλων

$$B_n = \left\{ f \in X : \lambda(\{x : |f(x)| > 1/n\}) < \frac{1}{n} \right\}$$

και την $\{f + B_n : n \in \mathbb{N}\}$ σαν βάση περιοχών της $f \in X$. Δείξτε ότι:
(α) Ο X είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.
(β) Ο X δεν είναι τοπικά κυρτός (υπόδειξη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{conv}(B_n) = X$).
(γ) $X^* = \{0\}$.