**ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)**
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8**
(Ημερομηνία Παράδοσης: 11 Ιουνίου 2007)

**1.** Έστω $X$ ένας απειροδιάστατος χώρος Banach.
(α) Δείξτε ότι $\overline{S_X}^w = B_X$.
(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\| : (X, w) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $X$.

**2.** Στον $\ell_1$ θεωρούμε τη συνήθη βασική ακολουθία $\{e_n\}$. Δείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ αλλά δεν υπάρχει ακολουθία $(y_k)$ κυρτών συνδυασμών των $e_n$ με $\|y_k\|_1 \to 0$.

**3.** Έστω $(e_n)$ η συνήθης βάση του $\ell_2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{e_m + me_n : 1 \leq m < n,\, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι το 0 ανήκει στην $w$–κλειστή θήκη του $A$ αλλά δεν υπάρχει ακολουθία $(a_k)$ στο $A$ με $a_k \xrightarrow{w} 0$.

**4.** Έστω $X$ ένας χώρος Banach. Δείξτε ότι ο $X^*$ είναι $w^*$–*ακολουθιακά πλήρης*: αν $x_n^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(x_n^*(x))$ είναι ακολουθία Cauchy, τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$ ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

**5.** Σύμφωνα με το θεώρημα Mazur, αν $x_n \xrightarrow{w} 0$ στον χώρο Banach $X$, τότε υπάρχει ακολουθία $(y_k)$ κυρτών συνδυασμών των $x_n$ με $\|y_k\| \to 0$. Δεν είναι όμως σωστό ότι μπορούμε να πάρουμε $y_k = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k)$ στον παραπάνω ισχυρισμό.
(α) Ένα παράδειγμα είναι το εξής: Στον $L_2(-\pi, \pi)$ θεωρούμε την ακολουθία

$$x_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} e^{ikt}.$$

Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Βρείτε συγκεκριμένη ακολουθία $(y_k)$ κυρτών συνδυασμών των $x_n$ με $\|y_k\|_2 \to 0$. Δείξτε όμως ότι

$$\left\|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right\|_2 \not\to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

(β) Δείξτε ότι αν $f_n \in L_2(-\pi, \pi)$ και $f_n \xrightarrow{w} 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})$ της $(f_n)$ ώστε

$$\left\|\frac{f_{k_1} + \cdots + f_{k_n}}{n}\right\|_2 \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

**6.** Έστω $X$ ένας αυτοπαθής χώρος Banach, έστω $(x_n)$ μια φραγμένη ακολουθία στον $X$ και $x_0 \in X$. Ορίζουμε

$$K_n = \overline{\mathrm{conv}\{x_m : m \geq n\}}^{\|\cdot\|}.$$

Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} x_0$ αν και μόνο αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x_0\}$.

**7.** Έστω $(x_n)$ φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Banach $X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_k^*)$ στον $X^*$ με $X^* = \overline{\mathrm{span}}\{x_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^*(x_n) = 0$ για κάθε $k$. Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$.

**8.** Έστω $x_n \in c_0$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ ώστε

$$\left\|\frac{x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}}{n}\right\| \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$