ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (2006–07)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

(Ημερομηνία Παράδοσης: 18 Ιουνίου 2007)

1. Θεωρούμε τον χώρο $X = L_\infty[0,1]$. Δείξτε ότι $f \in \mathrm{ex}(B_X)$ αν και μόνο αν $|f(t)| = 1$ λ–σχεδόν παντού και συμπεράνατε ότι $B_X \neq \mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_X))$.

2. Έστω X ένας χώρος Banach με την ιδιότητα το $\mathrm{ex}(B_X)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Αν $\dim(X) = \infty$, δείξτε ότι ο X δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με δυϊκό χώρο.

3. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Αν $E \subseteq K$, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $K = \overline{\mathrm{co}(E)}$.

(β) Για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\sup_{x\in K} f(x) = \sup_{x\in E} f(x).$$

4. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον X. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $x_n \xrightarrow{w} x$.

(β) $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in \overline{\mathrm{ex}(B_{X^*})}^{w^*}$.

5. Δείξτε ότι $B_{\ell_\infty} = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_{\ell_\infty}))}^{\|\cdot\|}$.

6. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Έχουμε δει ότι ο Y^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $X^*/N(Y)$ (δείτε τις ασκήσεις του Φυλλαδίου 5). Δείξτε ότι για κάθε $[x] \in \mathrm{ex}(B_{X^*/N(Y)})$ υπάρχει $x_1 \in [x]$ με $x_1 \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$.

7. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ κυρτή και άνω ημισυνεχής: για κάθε $s \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in K : f(x) < s\}$ είναι ανοικτό στο K. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathrm{ex}(K)$ ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in K$.

8. Έστω X, Y συμπαγείς μετρικοί χώροι. Δείξτε ότι για κάθε $f \in C(X \times Y)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in C(X)$ και $h_1, \ldots, h_n \in C(Y)$ ώστε

$$\left| f(x,y) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x)h_j(y) \right| < \varepsilon$$

για κάθε $(x,y) \in X \times Y$.