Συναρτησιακή Ανάλυση

Σημειώσεις για μεταπτυχιακό μάθημα

Μ. Παπαδημητράκης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Άνοιξη 2004

Περιεχόμενα

Δύο λόγια

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μία πρώτη προσπάθεια και είναι, εμφανώς, ελλειπείς ως προς την επιλογή ύλης αλλά και ασκήσεων. Γράφτηκαν κατά τη διάρκεια ενός ακαδημαϊκού εξαμήνου για τις ανάγκες συγκεκριμένου μεταπτυχιακού μαθήματος στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης. Θα ήμουν ευγνώμων σε όσους, παίρνοντάς τες στα χέρια τους, τις προσέξουν και μου κάνουν παρατηρήσεις για τη βελτίωσή τους.

Για τις σημειώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν, κυρίως, τα εξής βιβλία:

1. Functional Analysis του K. Yosida.
2. Functional Analysis του P. Lax.
3. Introduction to Functional Analysis των A. Taylor και D. Lay.
4. Functional Analysis του W. Rudin.
5. Analyse Fonctionnelle του H. Brezis.

Μ. Παπαδημητράκης, 5 Ιουλίου 2004.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1 Διατάξεις

Ορισμός 1.1 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $\prec \subseteq A \times A$. Λέμε ότι το σύνολο $\prec$ είναι* ***σχέση διάταξης*** *ή* ***διάταξη στο*** *A, αν για κάθε $a, a_1, a_2, a_3 \in A$,*
(i) $(a, a) \in \prec$,
(ii) αν $(a_1, a_2) \in \prec$ και $(a_2, a_1) \in \prec$, τότε $a_1 = a_2$,
(iii) αν $(a_1, a_2) \in \prec$ και $(a_2, a_3) \in \prec$, τότε $(a_1, a_3) \in \prec$.
Τότε το σύνολο A ονομάζεται ***διατεταγμένο από την*** *$\prec$.*

Αν το $\prec$ είναι διάταξη στο A, γράφουμε $a \prec a'$ αντί $(a, a') \in \prec$.

Επομένως, οι σχέσεις του προηγούμενου ορισμού γράφονται
(i) $a \prec a$,
(ii) αν $a_1 \prec a_2$ και $a_2 \prec a_1$, τότε $a_1 = a_2$,
(iii) αν $a_1 \prec a_2$ και $a_2 \prec a_3$, τότε $a_1 \prec a_3$.

Παράδειγμα Το σύνολο $\mathbf{R}$ με τη συνηθισμένη διάταξη $\leq$.

Παράδειγμα Το σύνολο $\mathbf{N}$ με τη διάταξη της διαιρετότητας $/$. Δηλαδή, a/b αν το a διαιρεί το b.

Παράδειγμα Αν Q είναι οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο, θεωρούμε $A = \mathcal{P}(Q)$, το σύνολο του οποίου στοιχεία είναι όλα τα υποσύνολα του Q, και ως διάταξη θεωρούμε τον εγκλεισμό $\subseteq$.

Στο πρώτο παράδειγμα, για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ισχύει ότι είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Όμως, στο δεύτερο παράδειγμα δεν ισχύει ούτε $2/3$ ούτε $3/2$. Ομοίως, στο τρίτο παράδειγμα, αν το Q περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία q_1, q_2, τότε για τα στοιχεία $\{q_1\}, \{q_2\}$ του $\mathcal{P}(Q)$ δεν ισχύει ούτε $\{q_1\} \subseteq \{q_2\}$ ούτε $\{q_2\} \subseteq \{q_1\}$.

Ορισμός 1.2 *Έστω A σύνολο με διάταξη $\prec$. Ένα $B \subseteq A$ ονομάζεται* ***ολικά διατεταγμένο*** *αν για κάθε $b_1, b_2 \in B$ ισχύει ότι είτε $b_1 \prec b_2$ είτε $b_2 \prec b_1$.*

Ορισμός 1.3 *Έστω A σύνολο με διάταξη $\prec$, $B \subseteq A$ και $a \in A$. Το a ονομάζεται* ***άνω-φράγμα του*** *B, αν $b \prec a$ για κάθε $b \in B$.*

Ορισμός 1.4 *Έστω A σύνολο με διάταξη $\prec$ και $a \in A$. Το a ονομάζεται* ***maximal στοιχείο του*** *A, αν δεν υπάρχει $a' \in A$ με $a \prec a'$ και $a' \neq a$.*

Στη Θεωρία Συνόλων δεχόμαστε ως **Αξίωμα** το

Λήμμα του Zorn : Έστω A διατεταγμένο σύνολο. Αν κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του A έχει άνω-φράγμα στο A, τότε το A έχει τουλάχιστον ένα maximal στοιχείο

ή κάποια από τις ισοδύναμες με αυτό προτάσεις, όπως το Αξίωμα Επιλογής που θα συναντήσουμε παρακάτω.

1.2 Τοπολογικοί χώροι

1.2.1 Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Ορισμός 1.5 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{T}$ μία συλλογή υποσυνόλων του A με τις ιδιότητες*
(i) $\emptyset, A \in \mathcal{T}$
(ii) $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ για κάθε συλλογή $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$
(iii) $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ για κάθε πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$.
Η $\mathcal{T}$ ονομάζεται ***τοπολογία στο*** *A και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ ονομάζονται* ***ανοικτά (ως προς την $\mathcal{T}$) σύνολα του*** *A. Το A εφοδιασμένο με μία τοπολογία ονομάζεται* ***τοπολογικός χώρος****.*

Το (ii) λέει, με απλά λόγια, ότι η ένωση οποιασδήποτε συλλογής συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{T}$ είναι σύνολο που ανήκει στην $\mathcal{T}$. Το (iii) λέει ότι η τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης συλλογής συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{T}$ είναι σύνολο που ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Ορισμός 1.6 *Αν το A είναι τοπολογικός χώρος, τότε κάθε υποσύνολο του A του οποίου το συμπλήρωμα είναι ανοικτό ονομάζεται* ***κλειστό****.*

Πρόταση 1.1 *Έστω A τοπολογικός χώρος.*
(i) Τα $\emptyset, A$ είναι κλειστά σύνολα.
(ii) Το $\bigcap \mathcal{C}$ είναι κλειστό για κάθε συλλογή $\mathcal{C}$ κλειστών συνόλων.
(iii) Το $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ είναι κλειστό για κάθε πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{C}$ κλειστών συνόλων.

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στους ορισμούς και στους νόμους του de Morgan για τα συμπληρώματα και τις ενώσεις/τομές.

Ορισμός 1.7 *Έστω A τοπολογικός χώρος και $U \subseteq A$.*
(i) Το σύνολο $int(U) = \bigcup\{O | O$ είναι ανοικτό $\subseteq U\}$ ονομάζεται ***εσωτερικό του*** *U.*

(ii) Το σύνολο $cl(U) = \bigcap\{C|C$ είναι κλειστό $\supseteq U\}$ ονομάζεται ***κλειστή θήκη του*** *U.*

Πρόταση 1.2 *Έστω A τοπολογικός χώρος και $U \subseteq A$.*
(1) Το $int(U)$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του U.
(2) Το U είναι ανοικτό αν και μόνον αν $int(U) = U$.
(3) Το $cl(U)$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του U.
(4) Το U είναι κλειστό αν και μόνον αν $cl(U) = U$.

Απόδειξη: (1) Προφανές, βάσει των ορισμών.
(2) Αν το U είναι ανοικτό, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του U. Αντιστρόφως, αν $int(U) = U$, επειδή το $int(U)$ είναι ανοικτό, συνεπάγεται ότι το U είναι ανοικτό.
(3),(4) Άσκηση.

Ορισμός 1.8 *Έστω A τοπολογικός χώρος και $x \in A$. Κάθε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το x ονομάζεται* ***ανοικτή περιοχή του*** *x.*

Ορισμός 1.9 *Έστω A τοπολογικός χώρος και $U \subseteq A$.*
(i) Το $x \in U$ ονομάζεται ***εσωτερικό σημείο του*** *U αν υπάρχει ανοικτό σύνολο O ώστε $x \in O \subseteq U$.*
(ii) Το x ονομάζεται ***σημείο συσσώρευσης του*** *U αν κάθε ανοικτή περιοχή του x περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του U διαφορετικό από το x.*

Πρόταση 1.3 *Έστω A τοπολογικός χώρος και $U \subseteq A$.*
(1) $int(U) = \{x|x$ είναι εσωτερικό σημείο του $U\}$.
(2) $cl(U) = \{x|x \in U$ ή x είναι σημείο συσσώρευσης του $U\}$.

Απόδειξη: (1) Προφανές.
(2) Έστω $x \in cl(U)$ και $x \notin U$. Τότε το x ανήκει σε κάθε κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το U. Άρα, αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή O του x, επειδή το x δεν ανήκει στο κλειστό $X \setminus O$, συνεπάγεται ότι το σύνολο αυτό δεν περιέχει το U και, επομένως, η O έχει τουλάχιστον ένα σημείο κοινό με το U. Το σημείο αυτό δεν είναι το x, αφού $x \notin U$. Άρα το x είναι σημείο συσσώρευσης του U.

Αντιστρόφως, αν $x \in U$, τότε $x \in cl(U)$. Αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του U και θεωρήσουμε οποιοδήποτε κλειστό C το οποίο περιέχει το U, τότε $x \in C$. Διαφορετικά, το $X \setminus C$ θα ήταν ανοικτή περιοχή του x χωρίς να έχει κανένα σημείο κοινό με το U. Άρα το x ανήκει σε κάθε κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το U και, επομένως, $x \in cl(U)$.

1.2.2 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 1.10 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $d : A \times A \to \mathbf{R}_0^+$ με τις ιδιότητες*
(i) $d(x_1, x_2) = 0$ αν και μόνον αν $x_1 = x_2$.
(ii) $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
(iii) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in A$.
Η συνάρτηση d ονομάζεται ***μετρική στο*** *A και το A εφοδιασμένο με μία μετρική ονομάζεται* ***μετρικός χώρος****.*

Ορισμός 1.11 *Έστω A μετρικός χώρος με μετρική d.*
(i) Αν $x \in A$ και $r \in \mathbf{R}^+$, το σύνολο $B(x;r) = \{y \in A | d(y,x) < r\}$ ονομάζεται ***ανοικτή μπάλα με κέντρο*** *x* ***και ακτίνα*** *r.*
(ii) Ένα υποσύνολο O του A ονομάζεται ***ανοικτό (ως προς τη μετρική*** *d***)*** *αν για κάθε $x \in O$ υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x;r) \subseteq O$.*

Λήμμα 1.1 *Έστω A μετρικός χώρος με μετρική d, $x \in A$ και $r \in \mathbf{R}^+$. Η μπάλα $B(x;r)$ είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη: Αν πάρουμε τυχόν $y \in B(x;r)$, τότε, με $s = r - d(y,x) > 0$, ισχύει ότι $B(y;s) \subseteq B(x;r)$.

Πρόταση 1.4 *Έστω A ένας μετρικός χώρος με μετρική d. Τότε η συλλογή $\mathcal{T} = \{O | \text{το } O \text{ είναι ανοικτό ως προς τη } d\}$ αποτελεί τοπολογία στο A. Επομένως, κάθε μετρικός χώρος είναι τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 1.12 *(i) Έστω A μετρικός χώρος με μετρική d. Η τοπολογία $\mathcal{T}$ της προηγούμενης πρότασης λέμε ότι* ***επάγεται από την*** *d.*
(ii) Ένας τοπολογικός χώρος A με τοπολογία $\mathcal{T}$ ονομάζεται ***μετρικοποιήσιμος*** *αν υπάρχει μετρική d στο A ώστε η τοπολογία η οποία επάγεται από την d να ταυτίζεται με την $\mathcal{T}$. Τότε η $\mathcal{T}$ ονομάζεται* ***τοπολογία μετρικού χώρου****.*

Πρόταση 1.5 *Έστω A ένας μετρικός χώρος με μετρική d, έστω $x \in A$ και $U \subseteq A$.*
(1) Το x είναι εσωτερικό σημείο του U αν και μόνον αν υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x;r) \subseteq U$.
(2) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του U αν και μόνον αν για κάθε $r \in \mathbf{R}^+$ η $B(x;r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του U διαφορετικό από το x.

Απόδειξη: (1) Αν το x είναι εσωτερικό σημείο του U, τότε υπάρχει ανοικτό O ώστε $x \in O \subseteq U$. Άρα υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x;r) \subseteq O \subseteq U$. Αντιστρόφως, αν υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x;r) \subseteq U$, τότε, βάσει του Λήμματος 1.1, η $B(x;r)$ είναι ανοικτό σύνολο και, επομένως, το x είναι εσωτερικό σημείο του U.
(2) Αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του U, τότε, επειδή κάθε $B(x;r)$ είναι ανοικτό σύνολο, συνεπάγεται ότι κάθε $B(x;r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του U διαφορετικό από το x. Αντιστρόφως, αν πάρουμε τυχούσα ανοικτή περιοχή O του x, υπάρχει $B(x;r) \subseteq O$, οπότε η O περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του U διαφορετικό από το x. Άρα το x είναι σημείο συσσώρευσης του U.

1.2.3 Ακολουθίες

Ορισμός 1.13 *Έστω A ένας τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}$ και $\{x_n\}$ μία ακολουθία στο A. Λέμε ότι η $\{x_n\}$* ***συγκλίνει (ως προς την*** *$\mathcal{T}$***)*** *αν υπάρχει $x \in A$ ώστε κάθε περιοχή του x να περιέχει όλους τους όρους της $\{x_n\}$ από έναν δείκτη και πέρα. Τότε λέμε ότι το x είναι* ***όριο της ακολουθίας*** *και γράφουμε $x_n \to x$.*

Πρόταση 1.6 *Έστω A ένας μετρικός χώρος με μετρική d.*
(1) $x_n \to x$ στο A αν και μόνον αν για κάθε $r \in \mathbf{R}^+$ η $B(x;r)$ περιέχει όλους τους όρους της $\{x_n\}$ από έναν δείκτη και πέρα.
(2) Κάθε ακολουθία στο A έχει το πολύ ένα όριο.

Απόδειξη: (1) Άσκηση.
(2) Αν υποθέσουμε ότι η $\{x_n\}$ έχει δύο τουλάχιστον όρια z_1 και z_2, τότε $r = \frac{1}{2}\, d(z_1, z_2) > 0$ και οι μπάλες $B(z_1;r)$ και $B(z_2;r)$ είναι ξένες μεταξύ τους. Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό του ορίου.

Πρόταση 1.7 *Έστω A ένας μετρικός χώρος με μετρική d και $U \subseteq A$.*
(1) Ένα $x \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του U αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία στο U της οποίας όλοι οι όροι είναι διαφορετικοί από το x και έχει όριο x.
(2) Το U είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία στο U η οποία συγκλίνει ισχύει ότι το όριό της περιέχεται στο U.

Απόδειξη: (1) Αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του U, παίρνουμε ένα σημείο $x_n \in B(x; \frac{1}{n}) \cap U$ διαφορετικό απο το x και τότε η $\{x_n\}$ είναι στο U και έχει όριο x. Αντιστρόφως, έστω ότι κάποια $\{x_n\}$ με όλους τους όρους της διαφορετικούς απο το x είναι στο U και έχει όριο x. Τότε κάθε ανοικτή περιοχή του x περιέχει όρους της ακολουθίας και, επομένως, το x είναι σημείο συσσώρευσης του U.
(2) Άσκηση.

Η προηγούμενη πρόταση δίνει, για μετρικό χώρο, έναν χαρακτηρισμό των σημείων συσσώρευσης και των κλειστών συνόλων (και, κατ΄ επέκταση, των ανοικτών συνόλων) βάσει της σύγκλισης ακολουθιών. Επισημαίνεται ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό για τυχόντα τοπολογικό χώρο.

Παράδειγμα: Ο χώρος $\mathbf{R^n}$.
Με τον τύπο $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ για κάθε δύο στοιχεία $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R^n}$ ορίζεται η γνωστή ευκλείδια μετρική στον $\mathbf{R^n}$.

1.2.4 Συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 1.14 *Έστω A, B δύο τοπολογικοί χώροι με τοπολογίες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{S}$ αντιστοίχως και $M \subseteq A$.*
*(i) Μία συνάρτηση $f : M \to B$ λέμε ότι είναι **συνεχής στο** $x \in M$ αν για κάθε $N \in \mathcal{S}$ με $f(x) \in N$ υπάρχει $O \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in O \cap M \subseteq f^{-1}(N)$.*
*(ii) Η $f : M \to B$ λέμε ότι είναι **συνεχής στο** M αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in M$.*

Πρόταση 1.8 *Έστω A, B δύο τοπολογικοί χώροι με τοπολογίες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{S}$ αντιστοίχως, $M \subseteq A$ και συνάρτηση $f : M \to B$. Η f είναι συνεχής στο M αν και μόνον αν για κάθε $N \in \mathcal{S}$ υπάρχει $O \in \mathcal{T}$ ώστε $f^{-1}(N) = O \cap M$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στο M και έστω $N \in \mathcal{S}$. Για κάθε $x \in f^{-1}(N)$ υπάρχει $O_x \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in O_x \cap M \subseteq f^{-1}(N)$. Τότε το σύνολο $O = \bigcup\{O_x | x \in f^{-1}(N)\}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$ και $f^{-1}(N) = O \cap M$.

Αντιστρόφως, θεωρούμε τυχόν $x \in M$ και τυχόν $N \in \mathcal{S}$ με $f(x) \in N$. Τότε υπάρχει $O \in \mathcal{T}$ ώστε $f^{-1}(N) = O \cap M$, οπότε $x \in O \cap M \subseteq f^{-1}(N)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στο x.

Πρόταση 1.9 *Έστω A, B δύο μετρικοί χώροι, $M \subseteq A$ και $f : M \to B$. Η f είναι συνεχής στο $x \in M$ αν και μόνον αν $f(x_n) \to f(x)$ στο B για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ στο M με $x_n \to x$ στο A.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Ο χαρακτηρισμός της συνέχειας βάσει της σύγκλισης ακολουθιών που περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει για τυχόντες τοπολογικούς χώ-ρους.

Πρόταση 1.10 *(1) Έστω A, B, C τοπολογικοί χώροι, $M \subseteq A$, $N \subseteq B$, $f : M \to N$ και $g : N \to C$. Αν η f είναι συνεχής στο $x \in M$ και η g είναι συνεχής στο $f(x)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x.*
(2) Έστω τοπολογικός χώρος A, $M \subseteq A$, $f, g : M \to \mathbf{R^n}$ και $\kappa \in \mathbf{R}$. Αν ο $\mathbf{R^n}$ έχει την τοπολογία που επάγεται από την ευκλείδια μετρική και οι f, g είναι συνεχείς στο $x \in M$, τότε οι $f + g, \kappa f$ είναι συνεχείς στο x.

Απόδειξη: (1) Έστω L ανοικτό στον C ώστε $g \circ f(x) = g(f(x)) \in L$. Τότε υπάρχει V ανοικτό στον B ώστε $f(x) \in V \cap N \subseteq g^{-1}(L)$. Επίσης υπάρχει O ανοικτό στον A ώστε $x \in O \cap M \subseteq f^{-1}(V)$. Επομένως, $x \in O \cap M \subseteq f^{-1}(V \cap N) \subseteq f^{-1}\big(g^{-1}(L)\big) = (g \circ f)^{-1}(L)$.
(2) Έστω N ανοικτή περιοχή του $f(x)+g(x)$ στον $\mathbf{R^n}$, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(f(x) + g(x); r) \subseteq N$. Επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο x, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα O_1, O_2 του A ώστε $x \in O_1 \cap O_2$ και $f(O_1 \cap M) \subseteq B(f(x); \frac{1}{2}r)$, $g(O_2 \cap M) \subseteq B(g(x); \frac{1}{2}r)$. Τότε το $O = O_1 \cap O_2$ είναι ανοικτό υποσύνολο του A και $(f + g)(O \cap M) \subseteq B(f(x); \frac{1}{2}r) + B(g(x); \frac{1}{2}r) = B(f(x) + g(x); r) \subseteq N$. Άρα η $f + g$ είναι συνεχής στο x.
Η απόδειξη για την κf είναι παρόμοια.

1.2.5 Ομοιομορφισμοί

Ορισμός 1.15 *Έστω A, B δύο τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται* ***ομοιομορφισμός του** A **με τον** B* *αν είναι 1-1 και επί, η f είναι συνεχής στο A και η f^{-1} είναι συνεχής στο B. Τότε λέμε ότι ο A είναι* ***ομοιομορφικός*** *με τον B και γράφουμε $A \cong B$.*

Πρόταση 1.11 *Έστω τοπολογικοί χώροι A, B, C. Τότε,*
(1) $A \cong A$,
(2) αν $A \cong B$, τότε $B \cong A$,
(3) αν $A \cong B$ και $B \cong C$, τότε $A \cong C$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Αν A, B είναι δύο ομοιομορφικοί χώροι και $f : A \to B$ είναι ο ομοιομορφισμός τους, μπορούμε να *ταυτίσουμε* τους δύο χώρους. Δηλαδή, ταυτίζουμε κάθε σημείο $a \in A$ με το αντίστοιχο $b = f(a) \in B$ και, αντιστρόφως, κάθε $b \in B$ το ταυτίζουμε με το αντίστοιχο $a = f^{-1}(b) \in A$. Τότε κάθε *ανοικτό* υποσύνολο U του A ταυτίζεται με το *ανοικτό* υποσύνολο $V = f(U)$ του B και, αντιστρόφως, κάθε ανοικτό υποσύνολο V του B ταυτίζεται με το ανοικτό υποσύνολο $U = f^{-1}(V)$ του B.

Ορισμός 1.16 *Έστω μη-κενό σύνολο A και δύο μετρικές d_1, d_2 στο A. Λέμε ότι οι d_1, d_2 είναι* ***ισοδύναμες*** *αν η ταυτοτική απεικόνιση $I_A : A \to A$ είναι ομοιομορφισμός ανάμεσα στον A με την τοπολογία που επάγεται από την d_1 και στον A με την τοπολογία που επάγεται από την d_2 ή, ισοδύναμα, αν οι μετρικές d_1, d_2 ορίζουν τα ίδια ανοικτά υποσύνολα στον A.*

Παράδειγμα: Στον $\mathbf{R^n}$ ορίζουμε μετρική με τύπο $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$ για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$. Το ότι η d_1 είναι μετρική είναι απλό να αποδειχθεί, όπως, επίσης, είναι απλό να αποδειχθεί ότι, αν d_2 είναι η ευκλείδια μετρική στον $\mathbf{R^n}$, τότε ισχύει $d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \sqrt{n}\, d_2(x,y)$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R^n}$. Με βάση αυτές τις ανισότητες, εύκολα αποδεικνύεται ότι τα ανοικτά σύνολα που ορίζονται από την d_1 είναι τα ίδια με τα ανοικτά σύνολα που ορίζονται από την d_2. Δηλαδή, οι d_1, d_2 στον $\mathbf{R^n}$ είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.17 *Έστω μετρικοί χώροι A, B με μετρικές d, D αντιστοίχως. Μία συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται* ***ισομετρία του*** *A* ***με τον*** *B αν είναι 1-1 και επί και $D(f(x), f(y)) = d(x,y)$ για κάθε $x, y \in A$. Τότε λέμε ότι ο A είναι* ***ισομετρικά ομοιομορφικός*** *ή* ***ισομετρικός με τον*** *B και συμβολίζουμε $A \stackrel{iso}{=} B$.*

1.2.6 Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός 1.18 *Έστω A ένας μετρικός χώρος με μετρική d. Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στο A ονομάζεται* ***ακολουθία Cauchy*** *αν $d(x_n, x_m) \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$.*

Πρόταση 1.12 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε μετρικό χώρο είναι ακολουθία Cauchy .*

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 1.19 *Ένα υποσύνολο B μετρικού χώρου A ονομάζεται* ***πλήρες*** *αν κάθε ακολουθία Cauchy στο B συγκλίνει σε στοιχείο του B.*

Πρόταση 1.13 *Ο $\mathbf{R^n}$ με την ευκλείδια μετρική είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Έστω $\{x_k\}$ ακολουθία Cauchy στον $\mathbf{R^n}$ με $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$. Τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε $|x_{k,j} - x_{l,j}| \leq d(x_k, x_l) \to 0$ όταν $k, l \to +\infty$. Επειδή ο $\mathbf{R}$ είναι πλήρης, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x^{(j)} \in \mathbf{R}$ ώστε $x_{k,j} \to x^{(j)}$ όταν $k \to +\infty$. Αν θέσουμε $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, τότε $d(x_k, x)^2 = |x_{k,1} - x^{(1)}|^2 + \cdots + |x_{k,n} - x^{(n)}|^2 \to 0$. Άρα η $\{x_k\}$ συγκλίνει στο x.

Πρόταση 1.14 *Έστω μετρικός χώρος A.*
(1) Αν το $B \subseteq A$ είναι πλήρες τότε είναι κλειστό.
(2) Αν $B \subseteq C \subseteq A$, το C είναι πλήρες και το B είναι κλειστό, τότε το B είναι πλήρες.

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 1.20 *Έστω A ένας τοπολογικός χώρος. Ένα $B \subseteq A$ ονομάζεται **πυκνό** αν $cl(B) = A$.*

Ορισμός 1.21 *Έστω μετρικός χώρος A με μετρική d. Ονομάζουμε **διάμετρο** ενός μη-κενού $B \subseteq A$ το $diam(B) = \sup\{d(b_1, b_2) | b_1, b_2 \in B\}$.*

Λήμμα 1.2 *Έστω A ένας πλήρης μετρικός χώρος με μετρική d. Αν για κάθε $i \in \mathbf{N}$ το C_i είναι μη-κενό κλειστό υποσύνολο του A, $C_{i+1} \subseteq C_i$ για κάθε $i \in \mathbf{N}$ και $diam(C_i) \to 0$, τότε το σύνολο $\cap_{i=1}^{+\infty} C_i$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.*

Απόδειξη: Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο $x_i \in C_i$. Αν $k \leq l$, τότε $x_k, x_l \in C_k$, οπότε $d(x_k, x_l) \leq diam(C_k) \to 0$ όταν $k, l \to +\infty$. Επομένως, υπάρχει $x \in A$ ώστε $x_k \to x$. Επειδή, για κάθε i, η $\{x_k\}$ περιέχεται, από έναν δείκτη και πέρα, στο κλειστό C_i, συνεπάγεται από την Πρόταση 1.7(2) ότι $x \in C_i$. Άρα $x \in \cap_{i=1}^{+\infty} C_i$.

Αν το $\cap_{i=1}^{+\infty} C_i$ περιέχει και ένα y, τότε $d(x, y) \leq diam(C_i)$ για κάθε i και, επομένως, $d(x, y) = 0$. Άρα $x = y$.

Θεώρημα 1.1 *(Baire) Αν ο A είναι πλήρης μετρικός χώρος και για κάθε $i \in \mathbf{N}$ το O_i είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του A, τότε το $\cap_{i=1}^{+\infty} O_i$ είναι πυκνό.*

Απόδειξη: Θέτουμε $U = \cap_{i=1}^{+\infty} O_i$ και υποθέτουμε ότι το U δεν είναι πυκνό. Δηλαδή, υπάρχει $x \in A$ το οποίο δεν ανήκει στο $cl(U)$. Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(x; r) \cap U = \emptyset$.

Όμως το O_1 είναι πυκνό και, επομένως, υπάρχει $x_1 \in B(x; r) \cap O_1$. Επειδή το O_1 είναι ανοικτό, υπάρχει $r_1 > 0$ ώστε $r_1 \leq \frac{1}{2} r$ και $cl(B(x_1; r_1)) \subseteq B(x; r) \cap O_1$.

Το O_2 είναι πυκνό και, επομένως, υπάρχει $x_2 \in B(x_1; r_1) \cap O_2$. Επειδή το O_2 είναι ανοικτό, υπάρχει $r_2 > 0$ ώστε $r_2 \leq \frac{1}{2} r_1 \leq \frac{1}{2^2} r$ και $cl(B(x_2; r_2)) \subseteq B(x_1; r_1) \cap O_2$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε για κάθε $i \in \mathbf{N}$ μπάλα $B(x_i; r_i)$ ώστε $r_i \leq \frac{1}{2^i} r$ και $cl(B(x_{i+1}; r_{i+1})) \subseteq B(x_i; r_i) \cap O_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbf{N}$.

Εφαρμόζουμε, τώρα, το προηγούμενο λήμμα με τα σύνολα $C_i = cl(B(x_i; r_i))$ και βλέπουμε ότι υπάρχει $y \in \cap_{i=1}^{+\infty} C_i$. Αυτό συνεπάγεται ότι $y \in B(x; r) \cap U$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

1.2.7 Συμπάγεια

Ορισμός 1.22 *Έστω A τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}$. Ο A ονομάζεται **χώρος Hausdorff** αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ υπάρχουν ξένα μεταξύ τους $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ ώστε $x_1 \in O_1$ και $x_2 \in O_2$.*

Πρόταση 1.15 *Κάθε μετρικός χώρος είναι χώρος Hausdorff .*

Απόδειξη: Αν ο A έχει μετρική d και $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, παίρνουμε $r = \frac{1}{2} d(x_1, x_2) > 0$ και $O_1 = B(x_1; r)$, $O_2 = B(x_2; r)$.

Ορισμός 1.23 *Έστω A τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}$ και $K \subseteq A$. Λέμε ότι μία συλλογή ανοικτών συνόλων $\mathcal{C}$ αποτελεί* ***ανοικτή κάλυψη του*** *K αν ισχύει $K \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.*

Ορισμός 1.24 *Έστω A τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}$ και $K \subseteq A$. Το K ονομάζεται* ***συμπαγές (ως προς την $\mathcal{T}$)*** *αν για κάθε ανοικτή κάλυψη $\mathcal{C}$ του K υπάρχει πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ του K.*

Πρόταση 1.16 *Έστω A τοπολογικός χώρος.*
(1) Αν το $K \subseteq A$ είναι συμπαγές και ο A είναι χώρος Hausdorff , τότε το K είναι κλειστό.
(2) Αν το $K \subseteq A$ είναι συμπαγές και το $K' \subseteq K$ είναι κλειστό, τότε το K' είναι συμπαγές.

Απόδειξη: (1) Έστω $x \notin K$. Για κάθε $z \in K$ θεωρούμε ανοικτά σύνολα O_z, V_z ξένα μεταξύ τους ώστε $z \in O_z$ και $x \in V_z$. Τότε η συλλογή $\mathcal{C} = \{O_z | z \in K\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του K, οπότε υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $z_1, \ldots, z_n \in K$ ώστε $K \subseteq O_{z_1} \cup \cdots \cup O_{z_n}$. Βλέπουμε αμέσως ότι το ανοικτό σύνολο $V = V_{z_1} \cap \cdots \cap V_{z_n}$ είναι ξένο με το K και περιέχει το x. Άρα το $A \setminus K$ είναι ανοικτό, οπότε το K είναι κλειστό.
(2) Έστω ανοικτή κάλυψη $\mathcal{C}$ του K'. Τότε η $\mathcal{C} \cup \{A \setminus K'\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του K. Επομένως υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{C}$ ώστε $K \subseteq O_1 \cup \cdots \cup O_n \cup (A \setminus K')$. Άρα $K' \subseteq O_1 \cup \cdots \cup O_n$.

Πρόταση 1.17 *Έστω τοπολογικοί χώροι A, B, $M \subseteq A$ και συνεχής $f : M \to B$. Αν το $K \subseteq M$ είναι συμπαγές (ως προς την τοπολογία του A), το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του B.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 1.25 *Έστω A μετρικός χώρος. Ένα $K \subseteq A$ ονομάζεται* ***ολικά φραγμένο*** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in K$ ώστε $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i; \epsilon)$.*

Θεώρημα 1.2 *Έστω A μετρικός χώρος και $K \subseteq A$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*
(1) Το K είναι συμπαγές.
(2) Κάθε ακολουθία στο K έχει τουλάχιστον μία υπο-ακολουθία που συγκλίνει και το όριό της ανήκει στο K.
(3) Το K είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει το (1) και όχι το (2). Άρα υπάρχει $\{x_n\}$ στο K ώστε καμμία υπο-ακολουθία της δε συγκλίνει σε σημείο του K. Τότε για κάθε

$x \in K$ υπάρχει $B(x; r_x)$ η οποία περιέχει το πολύ πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$. Η συλλογή $\{B(x; r_x) | x \in K\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του K και, επομένως, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε $K \subseteq B(x_1; r_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_n; r_{x_n})$. Τότε, όμως, το K περιέχει το πολύ πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$ το οποίο είναι, προφανώς, άτοπο.

Έστω ότι ισχύει το (2). Θεωρούμε ακολουθία Cauchy $\{x_n\}$ στο K και έστω $\{x_{n_k}\}$ υπο-ακολουθία της η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$. Επειδή $n_k \geq k$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι $d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \to 0$ όταν $k \to +\infty$. Άρα το K είναι πλήρες. Έστω, τώρα, τυχόν $\epsilon > 0$ και έστω τυχόν $x_1 \in K$. Αν το K δεν περιέχεται στην $B(x_1; \epsilon)$, έστω τυχόν $x_2 \in K \setminus B(x_1; \epsilon)$. Αν το K δεν περιέχεται στην $B(x_1; \epsilon) \cup B(x_2; \epsilon)$, έστω τυχόν $x_3 \in K \setminus \big(B(x_1; \epsilon) \cup B(x_2; \epsilon)\big)$. Η διαδικασία αυτή πρέπει να σταματήσει, διότι, σε αντίθετη περίπτωση, θα σχηματισθεί η ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία δεν θα έχει καμμία συγκλίνουσα υπο-ακολουθία αφού, εκ κατασκευής, $d(x_k, x_l) \geq \epsilon$ για κάθε k, l με $k \neq l$.

Έστω ότι ισχύει το (3) και έστω ανοικτή κάλυψη $\mathcal{C}$ του K η οποία δεν έ-χει καμμία ανοικτή υπο-κάλυψη του K. Με $\epsilon = 1$ θεωρούμε $x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε $K \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i; 1)$. Τότε για τουλάχιστον ένα από τα $x_1, \dots, x_n$, το ο-ποίο ονομάζουμε y_1, η $K \cap B(y_1; 1)$, δεν καλύπτεται από καμμία πεπερασμέ-νη υπο-συλλογή της $\mathcal{C}$. Με $\epsilon = \frac{1}{2}$ θεωρούμε (νέα) $x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε $K \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i; \frac{1}{2})$. Τότε για τουλάχιστον ένα από τα $x_1, \dots, x_n$, το οποίο ονομά-ζουμε y_2, η $K \cap B(y_1; 1) \cap B(y_2; \frac{1}{2})$, δεν καλύπτεται από καμμία πεπερασμένη υπο-συλλογή της $\mathcal{C}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{y_n\}$ στο K ώστε, για κάθε n η $K \cap B(y_1; 1) \cap \dots \cap B(y_n; \frac{1}{2^{n-1}})$ δεν καλύπτεται α-πό καμμία πεπερασμένη υπο-συλλογή της $\mathcal{C}$. Αυτό, ειδικώτερα, συνεπάγεται ότι $B(y_n; \frac{1}{2^{n-1}}) \cap B(y_{n+1}; \frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$, οπότε $d(y_n, y_{n+1}) < \frac{3}{2^n}$ για κάθε n. Τότε για κά-θε k, l με $k \leq l$ ισχύει $d(y_k, y_l) \leq d(y_k, y_{k+1}) + \dots + d(y_{l-1}, y_l) < \frac{3}{2^k} + \dots + \frac{3}{2^{l-1}} < \frac{3}{2^{k-1}} \to 0$ όταν $k, l \to +\infty$. Δηλαδή, η $\{y_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο K και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιο $y \in K$.

Τότε το y ανήκει σε κάποιο $O \in \mathcal{C}$, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(y; r) \subseteq O$. Από την ανισότητα $d(y_k, y_l) < \frac{3}{2^{k-1}}$ παίρνουμε $d(y_k, y) \leq \frac{3}{2^{k-1}}$, οπότε $B(y_k; \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq B(y; \frac{1}{2^{k-3}})$. Αν, τώρα, επιλέξουμε k τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^{k-3}} \leq r$, τότε $K \cap B(y_1; 1) \cap \dots \cap B(y_k; \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq B(y_k; \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq B(y; r) \subseteq O$. Αυτό αντιφάσκει με την κατασκευή της $\{y_n\}$.

Πρόταση 1.18 *Στον χώρο $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ με την ευκλείδια μετρική ένα $K \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Αν το K είναι συμπαγές, βάσει των Προτάσεων 1.16(1) και 1.15, το K είναι κλειστό. Θεωρώντας την ανοικτή κάλυψη $\{B(x_0; n) | n \in \mathbf{N}\}$ του K, βλέπουμε ότι υπάρχει n ώστε $K \subseteq B(x_0; n)$ και, επομένως, το K είναι φραγμένο.

Έστω, τώρα, ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Ως κλειστό υποσύνολο του πλήρους χώρου $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ το K είναι πλήρες. Παίρνουμε έναν κύβο αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το K, και τον χωρίζουμε σε πεπερασμένου πλήθους κύβους διαμέτρου μικρότερης του ϵ. Αυτό, προφανώς, αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο οπότε, βάσει της τελευταίας πρότασης, είναι συμπαγές.

Πρόταση 1.19 *Έστω A τοπολογικός χώρος Hausdorff . Για κάθε δύο συμπαγή* *υποσύνολα K, L του A ξένα μεταξύ τους υπάρχουν ανοικτά σύνολα O, Q επίσης ξένα μεταξύ τους ώστε $K \subseteq O$ και $L \subseteq Q$.*

Απόδειξη: Στην απόδειξη της Πρότασης 1.16(1) αποδείξαμε ότι για κάθε $x \notin K$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο O_x (το $O_{z_1} \cup \cdots \cup O_{z_n}$ που εμφανίζεται εκεί) και ένα ανοικτό σύνολο V_x (το $V_{z_1} \cap \cdots \cap V_{z_n}$) τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους και περιέχουν το K και το x αντιστοίχως. Τότε η συλλογή $\{V_x | x \in L\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του L, οπότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in L$ ώστε $L \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$. Τότε, τα $O = O_{x_1} \cap \cdots \cap O_{x_m}$ και $Q = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$ είναι ανοικτά, ξένα μεταξύ τους και περιέχουν τα K, L αντιστοίχως.

1.2.8 Τοπολογία-υπόχωρου

Πρόταση 1.20 *Έστω τοπολογικός χώρος A με τοπολογία $\mathcal{T}$ και υποσύνολο B του A. Η συλλογή $\mathcal{S} = \{O \cap B | O \in \mathcal{T}\}$ αποτελεί τοπολογία του B.*

Απόδειξη: $\emptyset = \emptyset \cap B$ και $B = X \cap B$, οπότε τα $\emptyset, B$ ανήκουν στην $\mathcal{S}$.

Αν κάθε στοιχείο Q μιάς συλλογής $\mathcal{C}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$, δηλαδή γράφεται $Q = O_Q \cap B$ για κάποιο $O_Q \in \mathcal{T}$, τότε σχηματίζουμε την $\mathcal{D} = \{O_Q | Q \in \mathcal{C}\}$ και έχουμε ότι $\bigcup \mathcal{C} = (\bigcup \mathcal{D}) \cap B$. Άρα $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{S}$.

Αν τα $Q_1, \ldots, Q_n$ ανήκουν στην $\mathcal{S}$, δηλαδή $Q_i = O_i \cap B$ για κάποια $O_i \in \mathcal{T}$, τότε $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n = (O_1 \cap \cdots \cap O_n) \cap B$. Άρα $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \in \mathcal{S}$.

Ορισμός 1.26 *Έστω τοπολογικός χώρος A με τοπολογία $\mathcal{T}$ και υποσύνολο B του A. Η τοπολογία $\mathcal{S}$ του B που περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση ονομάζεται **τοπολογία-υπόχωρου για το B (ως προς το A)** ή **σχετική τοπολογία του B (ως προς το A)**.*

Όταν το $B \subseteq A$ έχει την τοπολογία-υπόχωρου ως προς το A, τα στοιχεία της τοπολογίας του A θα τα ονομάζουμε, απλώς, ανοικτά στο A ενώ τα στοιχεία της σχετικής τοπολογίας του B θα τα ονομάζουμε ανοικτά στο B.

Πρόταση 1.21 *Έστω τοπολογικός χώρος A και $B \subseteq A$ με την τοπολογία- υπόχωρου.*
(1) Το $Q \subseteq B$ είναι ανοικτό στο B αν και μόνον αν υπάρχει $O \subseteq A$ ανοικτό στο A ώστε $Q = O \cap B$.
(2) Το $D \subseteq B$ είναι κλειστό στο B αν και μόνον αν υπάρχει $C \subseteq A$ κλειστό στο A ώστε $D = C \cap B$.
(3) Αν $x \in B$ και $D \subseteq B$, τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του D ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B αν και μόνον αν είναι σημείο συσσώρευσης του D ως προς την τοπολογία του A.
(4) Αν $U \subseteq B$, τότε $int_A(U) \subseteq int_B(U)$ και $cl_B(U) = cl_A(U) \cap B$.

Απόδειξη: (1) Είναι ο ορισμός.
(2) Έστω $C \subseteq B$ κλειστό στο B. Τότε το $B \setminus C$ είναι ανοικτό στο B και, επομένως, $B \setminus C = O \cap B$ για κάποιο O ανοικτό στο A. Άρα $C = (A \setminus O) \cap B$ και το $A \setminus O$ είναι κλειστό στο A. Η απόδειξη του αντιστρόφου είναι παρόμοια.

(3) Έστω ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του D ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B. Αν O είναι ανοικτή περιοχή του x στην τοπολογία του A, τότε το $O \cap B$ είναι ανοικτή περιοχή του x στην τοπολογία-υπόχωρου του B και, επομένως, αυτή περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του D διαφορετικό από το x. Άρα και η O περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο (το ίδιο) του D διαφορετικό από το x και το x είναι σημείο συσσώρευσης του D ως προς την τοπολογία του A. Η απόδειξη του αντίστροφου είναι παρόμοια.
(4) Το $int_A(U)$ είναι ανοικτό στο A με $int_A(U) \subseteq U$. Τότε το $int_A(U) = int_A(U) \cap B$ είναι ανοικτό στο B, οπότε $int_A(U) \subseteq int_B(U)$.

Το $cl_A(U)$ είναι κλειστό στο A με $U \subseteq cl_A(U)$. Τότε το $cl_A(U) \cap B$ είναι κλειστό στο B και $U \subseteq cl_A(U) \cap B$. Άρα $cl_B(U) \subseteq cl_A(U) \cap B$. Αντιστρόφως, το $cl_B(U)$ είναι κλειστό στο B οπότε $cl_B(U) = C \cap B$ για κάποιο C κλειστό στο A. Άρα $cl_A(U) \cap B \subseteq C \cap B = cl_B(U)$.

Πρόταση 1.22 *Έστω μετρικός χώρος A με μετρική $d : A \times A \to \mathbf{R}_0^+$ και $B \subseteq A$.*
(1) Αν $x \in B$ και $r \in \mathbf{R}^+$, η ανοικτή μπάλα στον B με κέντρο x και ακτίνα r ισούται με $B(x; r) \cap B$.
(2) Αν το A έχει την τοπολογία που επάγεται από τη d, τότε η τοπολογία-υπόχωρου του B επάγεται από τον περιορισμό της d στο $B \times B \subseteq A \times A$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.23 *Έστω τοπολογικοί χώροι A, B, C όπου $B \subseteq A$ και ο B έχει την τοπολογία-υπόχωρου (ως προς τον A). Έστω $f : M \to C$ όπου $M \subseteq B$.*
(1) Αν $x \in M$, τότε η f είναι συνεχής στο x ως προς την τοπολογία του A αν και μόνον αν είναι συνεχής στο x ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B.
(2) Η f είναι συνεχής στο M ως προς την τοπολογία του A αν και μόνον αν είναι συνεχής στο M ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x ως προς την τοπολογία του A. Αν N είναι ανοικτό στο C και περιέχει το $f(x)$, τότε υπάρχει O ανοικτό στο A ώστε $x \in O \cap M \subseteq f^{-1}(N)$. Τότε το $Q = O \cap B$ είναι ανοικτό στο B και $x \in Q \cap M \subseteq f^{-1}(N)$. Άρα η f είναι συνεχής στο x ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι συνεχής στο x ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B. Αν N είναι ανοικτό στο C και περιέχει το $f(x)$, τότε υπάρχει Q ανοικτό στο B ώστε $x \in Q \cap M \subseteq f^{-1}(N)$. Επειδή $Q = O \cap B$ για κάποιο O ανοικτό στο A, συνεπάγεται ότι $x \in O \cap M \subseteq f^{-1}(N)$. Άρα η f είναι συνεχής στο x ως προς την τοπολογία του A.
(2) Άσκηση.

Πρόταση 1.24 *Έστω A μετρικός χώρος και $B \subseteq A$ με την τοπολογία-υπόχωρου. Αν $M \subseteq B$, τότε το M είναι πλήρες ως υποσύνολο του B αν και μόνον αν είναι πλήρες ως υποσύνολο του A.*

Απόδειξη: Επειδή η μετρική του B είναι, απλώς, ο περιορισμός της μετρικής του A στο B, συνεπάγεται ότι μία ακολουθία του B είναι ακολουθία Cauchy ως προς την τοπολογία του A αν και μόνον αν είναι ακολουθία Cauchy ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του B. Επίσης, μία ακολουθία του B συγκλίνει σε στοιχείο του B ως προς την τοπολογία-υπόχωρου αν και μόνον αν συγκλίνει στο ίδιο στοιχείο ως προς την τοπολογία του A.

Πρόταση 1.25 *Έστω τοπολογικοί χώροι A, B όπου $B \subseteq A$ και ο B έχει την τοπολογία-υπόχωρου. Αν $M \subseteq B$, τότε το M είναι συμπαγές ως υποσύνολο του B αν και μόνον αν είναι συμπαγές ως υποσύνολο του A.*

Απόδειξη: Έστω ότι το M είναι συμπαγές ως υποσύνολο του B. Παίρνουμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη $\mathcal{C}$ του M ως προς την τοπολογία του A. Η συλλογή $\mathcal{D} = \{O \cap B | O \in \mathcal{C}\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M ώς προς την τοπολογία-υπόχωρου, οπότε υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{C}$ ώστε $M \subseteq (O_1 \cap B) \cup \cdots \cup (O_n \cap B) = (O_1 \cup \cdots \cup O_n) \cap B$. Άρα $M \subseteq O_1 \cup \cdots \cup O_n$. Επομένως, το M είναι συμπαγές ως υποσύνολο του A.

Το αντίστροφο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

1.2.9 Πλήρωση μετρικού χώρου

Θεώρημα 1.3 *Αν A, B μετρικοί χώροι με μετρικές d, D αντιστοίχως, B είναι πλήρης, K πυκνό υποσύνολο του A, $f : K \to B$ και $C > 0$ με $D(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ για κάθε $x, y \in K$, τότε υπάρχει μοναδική επέκταση $F : A \to B$ της f, συνεχής στο A. Επίσης, $D(F(x), F(y)) \leq Cd(x, y)$ για κάθε $x, y \in A$ και, αν η αρχική ανισότητα για την f είναι ισότητα, τότε και για την F ισχύει ισότητα.*

Απόδειξη: Έστω τυχόν $x \in A$. Επειδή το K είναι πυκνό στον A, υπάρχει $\{x_n\}$ στο K ώστε $x_n \to x$ στον A. Άρα $D(f(x_k), f(x_l)) \leq Cd(x_k, k_l) \to 0$ και, επομένως, η $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει στον B. Αν υπάρχει και άλλη $\{x'_n\}$ στο K ώστε $x'_n \to x$, τότε $D(f(x'_n), f(x_n)) \leq Cd(x'_n, x_n) \to 0$, οπότε $\lim f(x'_n) = \lim f(x_n)$. Άρα ορίζεται καλώς συνάρτηση $F : A \to B$ με τύπο $F(x) = \lim f(x_n) \in B$ για κάθε $x \in A$, όπου $\{x_n\}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο K με $x_n \to x$.

Αν για οποιοδήποτε $x \in K$ θεωρήσουμε τη σταθερή ακολουθία $\{x\}$ στο K, τότε αυτή συγκλίνει στο x και, επομένως, $F(x) = \lim f(x) = f(x)$. Άρα η F είναι επέκταση της f.

Για οποιαδήποτε $x, y \in A$ παίρνουμε $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ στο K ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Τότε για κάθε n, $D(F(x), F(y)) \leq D(F(x), f(x_n)) + D(f(x_n), f(y_n)) + D(f(y_n), F(y)) \leq D(F(x), f(x_n)) + Cd(x_n, y_n) + D(f(y_n), F(y)) \leq$
$D(F(x), f(x_n)) + Cd(x_n, x) + Cd(x, y) + Cd(y, y_n) + D(f(y_n), F(y))$. Οπότε, με $n \to +\infty$, παίρνουμε $D(F(x), F(y)) \leq Cd(x, y)$.

Αν η $F_1 : A \to B$ είναι επέκταση της f συνεχής στο A, τότε για κάθε $x \in A$ παίρνουμε $\{x_n\}$ στο K με $x_n \to x$ και έχουμε $F_1(x) = \lim F_1(x_n) = \lim f(x_n) = \lim F(x_n) = F(x)$.

Θεώρημα 1.4 *Έστω A μετρικός χώρος με μετρική d. Υπάρχει πλήρης μετρικός χώρος $\widetilde{A}$ με μετρική $\widetilde{d}$, ώστε $A \subseteq \widetilde{A}$, η d είναι ο περιορισμός της $\widetilde{d}$ στο A και A είναι πυκνό στον $\widetilde{A}$.*

Αν $\widehat{A}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος με μετρική $\widehat{d}$, ώστε $A \subseteq \widehat{A}$, η d είναι ο περιορισμός της $\widehat{d}$ στο A και A είναι πυκνό στον $\widehat{A}$, τότε υπάρχει ισομετρία $\phi : \widetilde{A} \to \widehat{A}$ ώστε $\phi(x) = x$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο X με στοιχεία όλες τις ακολουθίες Cauchy του A. Στο X ορίζουμε μία σχέση $\equiv$ ως εξής: γράφουμε $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$ για δύο ακολουθίες Cauchy του A αν $d(x_n, y_n) \to 0$. Είναι προφανές ότι η $\equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X και, επομένως, ορίζεται το σύνολο $\widetilde{X}$ με στοιχεία όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας $[\{x_n\}]$ των στοιχείων του X.

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι, $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$ για κάθε $x,y,z,w \in A$ και, με βάση αυτό, ότι η $\{d(x_n,y_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $[0,+\infty)$ για κάθε δύο ακολουθίες Cauchy $\{x_n\},\{y_n\}$ στο A. Άρα το όριο $\lim d(x_n,y_n)$ υπάρχει και είναι μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός για κάθε δύο ακολουθίες Cauchy $\{x_n\},\{y_n\}$ στο A. Αν $\{x_n\} \equiv \{x'_n\}$ και $\{y_n\} \equiv \{y'_n\}$, τότε, με βάση την ίδια ανισότητα, αποδεικνύεται ότι $\lim d(x_n,y_n) = \lim d(x'_n,y'_n)$. Επομένως, ορίζεται καλώς η συνάρτηση $\widetilde{D} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο $\widetilde{D}([\{x_n\}],[\{y_n\}])$ $= \lim d(x_n,y_n)$. Και πάλι είναι προφανές ότι η $\widetilde{D}$ είναι μετρική στον $\widetilde{X}$.

Αν με $\{x\}$ συμβολίσουμε τη σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους ίσους με x, τότε ορίζουμε $i : A \to \widetilde{X}$ με τύπο $i(x) = [\{x\}]$ για κάθε $x \in A$.

Για κάθε $x,y \in A$ έχουμε $\widetilde{D}(i(x),i(y)) = \lim d(x,y) = d(x,y)$ και θα αποδείξουμε ότι το $i(A)$ είναι πυκνό στον $\widetilde{Q}$. Παίρνουμε τυχόν $[\{x_n\}]$ στον $\widetilde{Q}$ και τυχόν $r > 0$. Επειδή η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy , υπάρχει N ώστε $|x_k - x_l| < \frac{1}{2}r$ για κάθε $k,l \geq N$. Άρα, $|x_k - x_N| < \frac{1}{2}r$ για κάθε $k \geq N$. Θεωρούμε τη *σταθερή* ακολουθία $\{x_N\}$ και την κλάση ισοδυναμίας της, $i(x_N) = [\{x_N\}] \in i(A)$. Τότε, $\widetilde{D}([\{x_N\}],[\{x_n\}]) = \lim d(x_N,x_n) \leq \frac{1}{2}r < r$ και, επομένως, $[\{x_N\}] \in B([\{x_n\}];r)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $i(A)$ είναι πυκνό στον $\widetilde{X}$.

Τέλος, ο $\widetilde{X}$ είναι πλήρης. Για να το αποδείξουμε παίρνουμε μία ακολουθία Cauchy $\{q_m\}$ στο $\widetilde{X}$. Επειδή το $i(A)$ είναι πυκνό στον $\widetilde{X}$, για κάθε m υπάρχει $i(x_m) \in i(A)$ ώστε $\widetilde{D}(q_m, i(x_m)) < \frac{1}{m} \to 0$ όταν $m \to +\infty$. Αφού $\widetilde{D}(q_k,q_l) \to 0$, συνεπάγεται εύκολα ότι $d(x_k,x_l) = \widetilde{D}(i(x_k),i(x_l)) \to 0$, οπότε η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο A και, επομένως το $q = [\{x_n\}]$ είναι στοιχείο του $\widetilde{X}$. Τότε $\widetilde{D}(q_m,q) \leq \widetilde{D}(q_m,i(x_m)) + \widetilde{D}(i(x_m),q) = \widetilde{D}(q_m,i(x_m)) + \widetilde{D}([\{x_m\}],[\{x_n\}]) =$ $\widetilde{D}(q_m,i(x_m)) + \lim d(x_m,x_n) \to 0$ όταν $m \to +\infty$. (Το $\lim d(x_m,x_n)$ σημαίνει όριο ως προς n.)

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει πλήρης μετρικός χώρος $\widetilde{X}$ με μετρική $\widetilde{D}$ και $i : A \to \widetilde{X}$ ώστε $\widetilde{D}(i(x),i(y)) = d(x,y)$ για κάθε $x,y \in A$ και το $i(A)$ είναι πυκνό στον $\widetilde{X}$.

Ορίζουμε $\widetilde{A} = A \cup (\widetilde{X} \setminus i(A))$ (δηλαδή, αντικαθιστούμε το $i(A)$ με το A) και τη συνάρτηση $\pi : \widetilde{A} \to \widetilde{X}$ με τύπο $\pi(x) = i(x)$ για κάθε $x \in A$ και $\pi(x) = x$ για κάθε $x \in \widetilde{X} \setminus i(A)$. Επίσης, ορίζουμε $\widetilde{d} : \widetilde{A} \times \widetilde{A} \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο $\widetilde{d}(x,y) = \widetilde{D}(\pi(x),\pi(y))$ για κάθε $x,y \in \widetilde{A}$. Επειδή η π είναι 1-1 και επί, είναι προφανές ότι η $\widetilde{d}$ είναι μετρική στον $\widetilde{A}$ και ότι ο $\widetilde{A}$ με τη μετρική $\widetilde{d}$ είναι ισομετρικός με τον $\widetilde{X}$ με τη μετρική $\widetilde{D}$. Επομένως, είναι προφανές ότι ο $\widetilde{A}$ είναι πλήρης και, αφού το $\pi(A) = i(A)$

είναι πυκνό στον $\widetilde{X}$, είναι και το A πυκνό στον $\widetilde{A}$. Τέλος, αν $x, y \in A$, τότε $\widetilde{d}(x,y) = \widetilde{D}(i(x), i(y)) = d(x,y)$ και, επομένως, η d είναι ο περιορισμός της $\widetilde{d}$ στο A.

Έστω, τώρα, πλήρης μετρικός χώρος $\widehat{A}$ με μετρική $\widehat{d}$ ώστε $A \subseteq \widehat{A}$, η d είναι ο περιορισμός της $\widehat{d}$ στο A και το A είναι πυκνό στον $\widehat{A}$.

Θεωρούμε την ταυτοτική συνάρτηση $I_A : A \to A$, οπότε $\widehat{d}(I_A(x), I_A(y)) = \widehat{d}(x,y) = d(x,y) = \widetilde{d}(x,y)$ για κάθε $x, y \in A$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μοναδική επέκταση $\phi : \widetilde{A} \to \widehat{A}$ της I_A συνεχής στο $\widetilde{A}$ και, μάλιστα, $\widehat{d}(\phi(z), \phi(w)) = \widetilde{d}(z,w)$ για κάθε $z, w \in \widetilde{A}$. Αυτό, προφανώς, συνεπάγεται ότι η ϕ είναι 1-1. Έστω $\{z_n\} \in \widetilde{A}$ με $\phi(z_n) \to q$ για κάποιο $q \in \widehat{A}$. Τότε, $\widetilde{d}(z_k, z_l) = \widehat{d}(\phi(z_k), \phi(z_l)) \to 0$, οπότε $z_k \to z$ για κάποιο $z \in \widetilde{A}$. Επομένως, $q = \lim \phi(z_n) = \phi(z)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το σύνολο τιμών της ϕ είναι κλειστό στον $\widehat{A}$. Επειδή το σύνολο τιμών της ϕ περιέχει το A και αυτό είναι πυκνό στον $\widehat{A}$, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της ϕ ισούται με τον $\widehat{A}$. Άρα η ϕ είναι επί και, επομένως, ισομετρία του $\widetilde{A}$ με τον $\widehat{A}$.

Ορισμός 1.27 *Έστω μετρικός χώρος A με μετρική d. Οποιοσδήποτε πλήρης μετρικός χώρος $\widehat{A}$ με μετρική $\widehat{d}$ ο οποίος περιέχει τον A ώστε η d να είναι ο περιορισμός της $\widehat{d}$ στο A και ώστε το A να είναι πυκνό στον $\widehat{A}$ ονομάζεται* ***πλήρωση του** A.*

Το τελευταίο θεώρημα απέδειξε ότι υπάρχει πλήρωση οποιουδήποτε μετρικού χώρου A και ότι οποιεσδήποτε δύο πληρώσεις του ίδιου μετρικού χώρου A είναι ισομετρικοί μετρικοί χώροι (και η ισομετρία, περιορισμένη στον A, είναι η ταυτοτική απεικόνιση του A). Λόγω της φυσιολογικής ταύτισης ισομετρικών μετρικών χώρων, αναφερόμαστε συνήθως **στην** πλήρωση ενός μετρικού χώρου.

1.2.10 Τοπολογία-γινόμενο

Ορισμός 1.28 *Έστω I ένα σύνολο το οποίο θα ονομάζεται* ***σύνολο δεικτών*** *και μία συλλογή συνόλων $\{A_i | i \in I\}$. Ορίζουμε το σύνολο $\prod_{i \in I} A_i = \{x | x : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ με $x(i) \in A_i$ για κάθε $i \in I\}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται* ***καρτεσιανό γινόμενο της*** *$\{A_i | i \in I\}$.*

Θεώρημα 1.5 *(Αξίωμα Επιλογής) Αν το I είναι μη-κενό και για κάθε $i \in I$ το A_i είναι μη-κενό, τότε το καρτεσιανό γινόμενο της $\{A_i | i \in I\}$ είναι μη-κενό.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C}$ στοιχεία του οποίου είναι όλες οι συναρτήσεις $x : J \to \bigcup_{i \in I} A_i$, όπου J είναι τυχόν μη-κενό υποσύνολο του I και $x(i) \in A_i$ για κάθε $i \in J$.

Επιλέγοντας τυχόν $i_0 \in I$ και τυχόν $a_0 \in A_{i_0}$ όρίζουμε τη συνάρτηση $x_0 : \{i_0\} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ με τύπο $x(i_0) = a_0$. Προφανώς, $x_0 \in \mathcal{C}$.

Θεωρούμε διάταξη στο $\mathcal{C}$ ως εξής. Αν $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$, γράφουμε $x_1 \prec x_2$ αν η x_2 είναι επέκταση της x_1. Δηλαδή, αν το πεδίο ορισμού της x_2 περιέχει το πεδίο ορισμού της x_1 και οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στο πεδίο ορισμού της x_1. Είναι προφανές ότι η $\prec$ είναι σχέση διάταξης στο $\mathcal{C}$.

Έστω $\mathcal{D}$ ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο της $\mathcal{C}$. Δηλαδή, αν $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, τότε είτε η x_2 είναι επέκταση της x_1 είτε η x_1 είναι επέκταση της x_2. Θεωρούμε το $J_0 = \bigcup\{J | \text{το } J \text{ είναι πεδίο ορισμού κάποιας } x \in \mathcal{D}\} \subseteq I$. Αν $i \in J_0$, τότε υπάρχει $x \in \mathcal{D}$ με το i να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της. Αν $x' \in \mathcal{D}$ είναι οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση με το i να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της, τότε, επειδή κάποια από τις x, x' είναι επέκταση της άλλης, συνεπάγεται ότι $x(i) = x'(i)$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $x_0 : J_0 \to \bigcup_{i\in I} A_i$ με τύπο $x_0(i) = x(i) \in A_i$ όπου $x \in \mathcal{D}$ έχει το i στο πεδίο ορισμού της. Είναι προφανές ότι η x_0 είναι επέκταση όλων των $x \in \mathcal{D}$ και ότι είναι στοιχείο της $\mathcal{C}$. Άρα η x_0 είναι άνω-φράγμα της $\mathcal{D}$ στο $\mathcal{C}$.

Συνεπάγεται από το Λήμμα του Zorn ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα maximal στοιχείο x της $\mathcal{C}$. Η x είναι στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου $\prod_{i\in I} A_i$, αρκεί να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της είναι το I. Έστω, λοιπόν, ότι $x : J \to \bigcup_{i\in I} A_i$ και $J \neq I$. Παίρνουμε $i_0 \in I\setminus J$ και $a_0 \in A_{i_0}$ και ορίζουμε $x_0 : J \cup \{i_0\} \to \bigcup_{i\in I} A_i$ ώστε να ταυτίζεται με την x στο J και $x(i_0) = a_0$. Προφανώς, η x_0 είναι γνήσια επέκταση της x και ανήκει στην $\mathcal{C}$. Άτοπο.

Όπως με τις ακολουθίες, μία βολική γραφή των στοιχείων x του καρτεσιανού γινομένου $\prod_{i\in I} A_i$ είναι η $x = (x_i)_{i\in I}$, όπου την τιμή $x(i) \in A_i$ τη γράφουμε x_i και την ονομάζουμε i-**συντεταγμένη του** x. Αν το σύνολο δεικτών είναι το πεπερασμένο $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο γράφεται $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ή $A_1 \times \cdots \times A_n$ και τα στοιχεία του $x = (x_i)_{i=1}^{n}$ ή $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Ομοίως, αν το σύνολο δεικτών είναι το αριθμήσιμο $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο γράφεται $\prod_{i=1}^{+\infty} A_i$ ή $A_1 \times A_2 \times \cdots$ και τα στοιχεία του $x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}$ ή $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Ορισμός 1.29 *Για κάθε $j \in I$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ με τύπο $\pi(x) = x_j$ για κάθε $x = (x_i)_{i\in I}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται j-**προβολή**.*

Πρόταση 1.26 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $\mathbf{D}$ μία συλλογή τοπολογιών του A. Τότε η $\bigcap \mathbf{D}$ αποτελεί τοπολογία του A.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.27 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{C}$ μία μη-κενή συλλογή υποσυνόλων του A. Η συλλογή $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{S} | \text{η } \mathcal{S} \text{ είναι τοπολογία του } A \text{ και } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}\}$ αποτελεί τη μικρότερη τοπολογία του A η οποία περιέχει την $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη: Άμεση από την προηγούμενη πρόταση.

Ορισμός 1.30 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{C}$ μία μη-κενή συλλογή υποσυνόλων του A. Η μικρότερη τοπολογία του A η οποία περιέχει την $\mathcal{C}$ (και περιγράφτηκε στην προηγούμενη πρόταση) λέμε ότι είναι **η τοπολογία που παράγεται από την** $\mathcal{C}$.*

Πρόταση 1.28 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{C}$ μία μη-κενή συλλογή υποσυνόλων του A.*
(1) Το $O \subseteq A$ είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{C}$ αν και μόνον αν το O γράφεται ως ένωση (αυθαίρετου πλήθους) συνόλων το καθένα εκ των οποίων είναι τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{C}$.
(2) Το $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του $U \subseteq A$ αν και μόνον αν υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ ώστε $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_n \subseteq U$.

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{T}$ στοιχεία της οποίας είναι όλα τα σύνολα O τα οποία περιγράφονται στη διατύπωση της πρότασης. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία του A και ότι περιέχει όλα τα στοιχεία της $\mathcal{C}$. Άρα η τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{C}$ είναι υποσύνολο της $\mathcal{T}$.

Αντιστρόφως, αν $\mathcal{S}$ είναι οποιαδήποτε τοπολογία του A η οποία περιέχει την $\mathcal{C}$, είναι προφανές ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{T}$ ανήκει σ' αυτήν. Άρα η $\mathcal{T}$ είναι υποσύνολο της $\mathcal{S}$ και, επομένως, η $\mathcal{T}$ είναι υποσύνολο της τοπολογίας που παράγεται από την $\mathcal{C}$.
(2) Αν υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ ώστε $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_n \subseteq U$, τότε, σύμφωνα με το (1), το σύνολο αυτό είναι ανοικτό στην παραγόμενη από την $\mathcal{C}$ τοπολογία και το x είναι εσωτερικό σημείο του U. Αντιστρόφως, αν το x είναι εσωτερικό σημείο του U, τότε υπάρχει σύνολο O όπως στη διατύπωση του (1) ώστε $x \in O \subseteq U$. Άρα το x περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα η ένωση των οποίων είναι το O.

Ορισμός 1.31 *Έστω I ένα μη-κενό σύνολο δεικτών και για κάθε $i \in I$ ένας τοπολογικός χώρος A_i με τοπολογία $\mathcal{T}_i$. Θεωρούμε όλα τα υποσύνολα C του $\prod_{i \in I} A_i$ τα οποία είναι της μορφής $C = \prod_{i \in I} O_i$, όπου $O_i \in \mathcal{T}_i$ για κάθε $i \in I$ και $O_i = A_i$ για όλους εκτός από το πολύ πεπερασμένου πλήθους δείκτες $i \in I$. Αν $\mathcal{C}$ είναι η συλλογή όλων αυτών των υποσυνόλων, τότε την τοπολογία η οποία παράγεται από την $\mathcal{C}$ την ονομάζουμε* ***τοπολογία-γινόμενο των*** *$\mathcal{T}_i, i \in I$, για το καρτεσιανό γινόμενο.*

Πρόταση 1.29 *Έστω I ένα μη-κενό σύνολο δεικτών και για κάθε $i \in I$ ένας τοπολογικός χώρος A_i με τοπολογία $\mathcal{T}_i$.*
(1) Ένα $O \subseteq \prod_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία-γινόμενο αν και μόνον αν το O είναι ένωση (αυθαίρετου πλήθους) συνόλων C από αυτά που περιγράφονται στον προηγούμενο ορισμό.
(2) Ένα $x = (x_i)_{i \in I}$ είναι εσωτερικό σημείο του $U \subseteq \prod_{i \in I} A_i$ αν και μόνον αν υπάρχει σύνολο C από αυτά που περιγράφονται στον προηγούμενο ορισμό ώστε $x \in C \in U$.

Απόδειξη: Προφανής βάσει της Πρότασης 1.28.

Ορισμός 1.32 *Έστω τοπολογικοί χώροι A, B και $f : A \to B$. Η f ονομάζεται* ***ανοικτή*** *αν το $f(O)$ είναι ανοικτό στον B για κάθε O ανοικτό στον A.*

Πρόταση 1.30 *Έστω I ένα μη-κενό σύνολο δεικτών και για κάθε $i \in I$ ένας τοπολογικός χώρος A_i με τοπολογία $\mathcal{T}_i$. Έστω ότι το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} A_i$ έχει την τοπολογία-γινόμενο. Τότε κάθε συνάρτηση-προβολή $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \to A_j$ είναι συνεχής και ανοικτή στο $\prod_{i \in I} A_i$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιοδήποτε O_j ανοικτό υποσύνολο του A_j και παρατηρούμε ότι $\pi_j^{-1}(O_j) = \prod_{i\in I} Q_i$, όπου $Q_i = A_i$ για κάθε $i \neq j$ και $Q_j = O_j$. Άρα το $\pi_j^{-1}(O_j)$ είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία-γινόμενο.

Έστω, τώρα, οποιοδήποτε σύνολο $C = \prod_{i\in I} O_i$, όπου κάθε O_i είναι ανοικτό στον A_i και $O_i = A_i$ για όλα εκτός από το πολύ πεπερασμένου πλήθους $i \in I$. Τότε, για κάθε $j \in I$, το $\pi_j(C)$ είτε είναι ίσο με $\emptyset$, αν $C = \emptyset$, είτε είναι ίσο με το O_j, αν $C \neq \emptyset$. Σε κάθε περίπτωση το $\pi_j(C)$ είναι ανοικτό στο A_j. Το τυχόν ανοικτό σύνολο O στο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι ένωση τέτοιων συνόλων C και, επειδή η εικόνα (μέσω οποιασδήποτε συνάρτησης) μιάς ένωσης ισούται με την ένωση των εικόνων, συνεπάγεται ότι το $\pi_j(O)$ είναι ανοικτό στο A_j.

Ορισμός 1.33 *Έστω μη-κενό σύνολο A και συλλογή $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του A. Λέμε ότι η $\mathcal{C}$* ***έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τομής*** *αν για κάθε πεπερασμένη $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ η τομή $\bigcap \mathcal{C}'$ είναι μη-κενή.*

Πρόταση 1.31 *Έστω τοπολογικός χώρος A. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε συλλογή $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του A που έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τομής ισχύει ότι η $\bigcap\{cl(F)|F \in \mathcal{F}\}$ είναι μη-κενή.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Θεώρημα 1.6 *(Tychonov) Έστω I ένα μη-κενό σύνολο και για κάθε $i \in I$ ένας τοπολογικός χώρος A_i με τοπολογία $\mathcal{T}_i$. Αν κάθε A_i είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_i$, τότε το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία-γινόμενο.*

Απόδειξη: Θα θεωρήσουμε τυχούσα συλλογή $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του $\prod_{i\in I} A_i$ με την ιδιότητα πεπερασμένης τομής και θα αποδείξουμε ότι η $\bigcap\{cl(F)|F \in \mathcal{F}\}$ είναι μη-κενή.

Ορίζουμε τη συλλογή $\mathbf{P}$ της οποίας στοιχεία είναι όλες οι συλλογές $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ υποσυνόλων του $\prod_{i\in I} A_i$ με την ιδιότητα πεπερασμένης τομής. Στην $\mathbf{P}$ χρησιμοποιούμε τη σχέση διάταξης του εγκλεισμού και παίρνουμε οποιαδήποτε ολικά διατεταγμένη $\mathbf{P_0} \subseteq \mathbf{P}$. Κατόπιν, ορίζουμε την $\mathcal{F}_0 = \bigcup \mathbf{P_0}$. Αυτή είναι συλλογή υποσυνόλων του $\prod_{i\in I} A_i$ με την ιδιότητα πεπερασμένης τομής. Πράγματι, αν πάρουμε οποιαδήποτε $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}_0$, τότε $C_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, C_n \in \mathcal{G}_n$ για κάποια $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n \in \mathbf{P_0}$. Επειδή η $\mathbf{P_0}$ είναι ολικά διατεταγμένη, υπάρχει κάποια από τις $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ η οποία περιέχει όλες τις άλλες. Άρα τα $C_1, \ldots, C_n$ ανήκουν όλα σε μία από τις $\mathcal{G} \in \mathbf{P_0}$ και, επομένως, έχουν μη-κενή τομή. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η $\mathcal{F}_0$ είναι άνω-φράγμα της $\mathbf{P_0}$ στην $\mathbf{P}$.

Σύμφωνα με το Λήμμα του Zorn , η $\mathbf{P}$ έχει τουλάχιστον ένα maximal στοιχείο. Δηλαδή υπάρχει συλλογή $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ υποσυνόλων του $\prod_{i\in I} A_i$ με την ιδιότητα πεπερασμένης τομής και δεν υπάρχει καμμία γνησίως μεγαλύτερη συλλογή με την ίδια ιδιότητα.

Αυτό συνεπάγεται, ειδικώτερα, ότι κάθε τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων της $\mathcal{G}$ ανήκει στην $\mathcal{G}$. Πράγματι, αν το G είναι τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων της $\mathcal{G}$ και δεν ανήκει στην $\mathcal{G}$, τότε η $\mathcal{G} \cup \{G\}$ είναι γνησίως μεγαλύτερη από την $\mathcal{G}$ και έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τομής.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\bigcap\{cl(G)|G \in \mathcal{G}\}$ είναι μη-κενή, αφού $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$.

Θεωρούμε για κάθε $j \in I$ τη συλλογή $\mathcal{G}_j = \{\pi_j(G)|G \in \mathcal{G}\}$ υποσυνόλων του A_j. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{G}_j$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Πράγματι, αν πάρουμε τυχόντα $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$, τότε υπάρχει $x \in G_1 \cap \cdots \cap G_n$, οπότε $x_j = \pi_j(x) \in \pi_j(G_1) \cap \cdots \cap \pi_j(G_n) \subseteq cl(\pi_j(G_1)) \cap \cdots \cap cl(\pi_j(G_n))$. Τώρα, επειδή ο A_j είναι συμπαγής, συνεπάγεται ότι $\bigcap\{cl(\pi_j(G))|G \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset$. Παίρνουμε ένα $x_j \in \bigcap\{cl(\pi_j(G))|G \in \mathcal{G}\}$ για κάθε $j \in I$ και σχηματίζουμε το $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Θα αποδείξουμε ότι $x \in \bigcap\{cl(G)|G \in \mathcal{G}\}$.

Επειδή $x_j \in \bigcap\{cl(\pi_j(G))|G \in \mathcal{G}\}$, κάθε ανοικτή περιοχή O_j του x_j στον A_j έχει μη-κενή τομή με το $\pi_j(G)$ για κάθε $G \in \mathcal{G}$. Επομένως, το ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{i \in I} A_i$, $O^{(j)} = \prod_{i \in I} Q_i$, όπου $Q_i = A_i$ για κάθε $i \neq j$ και $Q_j = O_j$, έχει μη-κενή τομή με το G για κάθε $G \in \mathcal{G}$. Επομένως, η συλλογή $\mathcal{G} \cup \{O^{(j)}\}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τομής, οπότε $O^{(j)} \in \mathcal{G}$. Μπορούμε, τώρα, να δείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, κάθε $j_i, \ldots, j_n \in I$ και κάθε $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ ανοικτές περιοχές των $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ στους $A_{j_1}, \ldots, A_{j_n}$ η τομή $O^{(j_1)} \cap \cdots \cap O^{(j_n)}$ έχει μη-κενή τομή με το G για κάθε $G \in \mathcal{G}$. Όμως, κάθε ανοικτή περιοχή του x στον $\prod_{i \in I} A_i$ περιέχει ένα σύνολο της μορφής $O^{(j_1)} \cap \cdots \cap O^{(j_n)}$ και, επομένως, κάθε ανοικτή περιοχή του x έχει μη-κενή τομή με το G για κάθε $G \in \mathcal{G}$. Άρα $x \in cl(G)$ για κάθε $G \in \mathcal{G}$ και, επομένως, $x \in \bigcap\{cl(G)|G \in \mathcal{G}\}$.

1.2.11 Ασθενής τοπολογία

Ορισμός 1.34 *Έστω ένα μη-κενό σύνολο A και μία μη-κενή συλλογή $\mathbf{T}$ τοπολογικών χώρων. Δηλαδή, κάθε στοιχείο B της $\mathbf{T}$ είναι τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}_B$. Έστω για κάθε $B \in \mathbf{T}$ μία συνάρτηση $f_B : A \to B$.*

Θεωρούμε τη συλλογή όλων των τοπολογιών $\mathcal{S}$ του A με την ιδιότητα: αν το A έχει την τοπολογία $\mathcal{S}$, τότε για κάθε $B \in \mathbf{T}$ η $f_B : A \to B$ είναι συνεχής στο A .

Αν $\mathcal{T}$ είναι η τομή της συλλογής αυτής, τότε, βάσει της Πρότασης 1.26, η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία του A με την (ίδια) ιδιότητα: αν το A έχει την τοπολογία $\mathcal{T}$, τότε για κάθε $B \in \mathbf{T}$ η $f_B : A \to B$ είναι συνεχής στο A .

*Η $\mathcal{T}$ ονομάζεται **η ασθενής τοπολογία του** A **η οποία επάγεται από τη συλλογή των συναρτήσεων** $\{f_B|B \in \mathbf{T}\}$. Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ ονομάζονται **ασθενώς ανοικτά**.*

Πρόταση 1.32 *Έστω ένα μη-κενό σύνολο A και μία μη-κενή συλλογή $\mathbf{T}$ τοπολογικών χώρων. Έστω για κάθε $B \in \mathbf{T}$ μία συνάρτηση $f_B : A \to B$.*

Θεωρούμε τη συλλογή υποσυνόλων του A: $\mathcal{C} = \{f_B^{-1}(O_B)|B \in \mathbf{T}$ και O_B ανοικτό στο $B\}$.

(1) Τότε η ασθενής τοπολογία $\mathcal{T}$ του A η οποία επάγεται από τη συλλογή των συναρτήσεων $\{f_B|B \in \mathbf{T}\}$ ταυτίζεται με την τοπολογία του A η οποία παράγεται από την $\mathcal{C}$.

(2) Ένα $O \subseteq A$ είναι ασθενώς ανοικτό αν και μόνον αν γράφεται ως ένωση (αυθαίρετου πλήθους) συνόλων το καθένα εκ των οποίων είναι τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{C}$.

(3) Το $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του $U \subseteq A$ αν και μόνον αν υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathbf{T}$ και $O_1, \ldots, O_n$ ανοικτά στους $B_1, \ldots, B_n$, αντιστοίχως, ώστε $x \in f_{B_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{B_n}^{-1}(O_n) \subseteq U$.

Απόδειξη:(1) Για να είναι όλες οι συναρτήσεις $f_B : A \to B$, $B \in \mathcal{T}$, συνεχείς στο A για κάποια τοπολογία του A, πρέπει και αρκεί η τοπολογία αυτή του A να περιέχει όλα τα σύνολα $f_B^{-1}(O_B)$ όπου $B \in \mathcal{T}$ και O_B ανοικτό στο B, δηλαδή τα στοιχεία της $\mathcal{C}$. Επομένως, η ελάχιστη τοπολογία $\mathcal{T}$ του A με αυτήν την ιδιότητα ταυτίζεται με την ελάχιστη τοπολογία η οποία περιέχει όλα αυτά τα υποσύνολα του A. Άρα η $\mathcal{T}$ ταυτίζεται με την τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{C}$.
(2),(3) Άμεση από το (1) και την Πρόταση 1.28.

Πρόταση 1.33 *Έστω ένα μη-κενό σύνολο A, μία μη-κενή συλλογή $\mathbf{T}$ τοπολογικών χώρων και για κάθε $B \in \mathbf{T}$ μία συνάρτηση $f_B : A \to B$. Έστω $\mathcal{T}$ η ασθενής τοπολογία του A η οποία επάγεται από τη συλλογή των συναρτήσεων $\{f_B | B \in \mathbf{T}\}$.*

Για κάθε τοπολογικό χώρο C με τοπολογία $\mathcal{R}$ και κάθε συνάρτηση $f : C \to A$ ισχύει ότι: η f είναι συνεχής στον C αν και μόνον αν για κάθε $B \in \mathbf{T}$ η $f_B \circ f : C \to B$ είναι συνεχής στον C.

Απόδειξη: Αν η f είναι συνεχής στον C, τότε, προφανώς, η $f_B \circ f : C \to B$ είναι συνεχής στον C για κάθε $B \in \mathbf{T}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $f_B \circ f : C \to B$ είναι συνεχής στο C για κάθε $B \in \mathbf{T}$. Παίρνουμε τυχόν $x \in C$ και τυχόν ασθενώς ανοικτό σύνολο O στο A με $f(x) \in O$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.32(3), υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathbf{T}$ και $O_1, \ldots, O_n$ ανοικτά στους $B_1, \ldots, B_n$, αντιστοίχως, ώστε $f(x) \in f_{B_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{B_n}^{-1}(O_n) \subseteq O$. Επομένως, $x \in f^{-1}\big(f_{B_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{B_n}^{-1}(O_n)\big) \subseteq f^{-1}(O)$ και αυτό γράφεται $x \in (f_{B_1} \circ f)^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap (f_{B_n} \circ f)^{-1}(O_n) \subseteq f^{-1}(O)$. Το σύνολο $(f_{B_1} \circ f)^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap (f_{B_n} \circ f)^{-1}(O_n)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του C και, επομένως η f είναι συνεχής.

Οι επόμενες δύο προτάσεις αποδεικνύουν ότι η τοπολογία-υπόχωρου και η τοπολογία-γινόμενο είναι ειδικές περιπτώσεις τοπολογιών που επάγονται σε ένα σύνολο από συλλογή συναρτήσεων.

Πρόταση 1.34 *Έστω A τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}$ και $B \subseteq A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση-**εμφύτευση** $i : B \to A$ με τύπο $i(x) = x$ για κάθε $x \in B$. Η τοπολογία-υπόχωρου στο B ταυτίζεται με την ασθενή τοπολογία του B που επάγεται από τη (μία) συνάρτηση i.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Πρόταση 1.32(1), η ασθενής τοπολογία του B που επάγεται από τη συνάρτηση i ταυτίζεται με την τοπολογία που παράγεται από τη συλλογή $\mathcal{C} = \{i^{-1}(O) | \text{το } O \text{ είναι ανοικτό στο } A\} = \{O \cap B | \text{το } O \text{ είναι ανοικτό στο } A\}$. Όμως, η συλλογή αυτή *είναι* η τοπολογία-υπόχωρου του B.

Πρόταση 1.35 *Έστω I μη-κενό σύνολο δεικτών και για κάθε $i \in I$ ένας τοπολογικός χώρος A_i με τοπολογία $\mathcal{T}_i$. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $A = \prod_{i \in I} A_i$*

και τις συναρτήσεις-προβολές $\pi_i : A \to A_i$. *Η τοπολογία-γινόμενο του* A *ταυτίζεται με την ασθενή τοπολογία του* A *που επάγεται από τη συλλογή συναρτήσεων* $\{\pi_i | i \in I\}$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Πρόταση 1.32(1), η τοπολογία του $\prod_{i\in I} A_i$ που επάγεται από τη συλλογή $\{\pi_i | i \in I\}$ ταυτίζεται με την τοπολογία που παράγεται από τη συλλογή $\mathcal{C} = \{\pi_j^{-1}(O_j) | j \in I$ και O_j είναι ανοικτό στο $A_j\}$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε σύνολο $\pi_j^{-1}(O_j)$ γράφεται ως $\prod_{i\in I} Q_i$, όπου $Q_i = A_i$ για κάθε $i \neq j$ και $Q_j = O_j$, για να συμπεράνουμε ότι τομές πεπερασμένου πλήθους τέτοιων συνόλων γράφονται ως $\prod_{i\in I} Q_i$, όπου $Q_i = A_i$ για όλους εκτός από το πολύ πεπερασμένου πλήθους δείκτες $i \in I$. Αυτά είναι τα σύνολα που εμφανίζονται στη διατύπωση του Ορισμού 1.27.

1.3 Γραμμικοί Χώροι

1.3.1 Πράξεις

Θεωρούμε $F = \mathbf{R}$ ή $F = \mathbf{C}$.

Ορισμός 1.35 *Το μη-κενό σύνολο* X *ονομάζεται* ***γραμμικός χώρος επί του*** F *αν στο* X *είναι ορισμένη μία (εσωτερική) πράξη* $+$ *η οποία σε κάθε* $(x, y) \in X \times X$ *αντιστοιχίζει το* ***άθροισμα*** $x + y \in X$ *ώστε*
(i) $x + y = y + x$ *για κάθε* $x, y \in X$
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$
(iii) *υπάρχει στοιχείο* $0 \in X$ *ώστε* $x + 0 = x$ *για κάθε* $x \in X$
(iv) *για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει στοιχείο* $-x \in X$ *ώστε* $x + (-x) = 0$
και μία (εξωτερική) πράξη $\cdot$ *η οποία σε κάθε* $(\kappa, x) \in F \times X$ *αντιστοιχίζει το* ***γινόμενο*** $\kappa x \in X$ *ώστε*
(v) $\kappa(x + y) = \kappa x + \kappa y$ *για κάθε* $\kappa \in F$ *και κάθε* $x, y \in X$
(vi) $(\kappa + \lambda)x = \kappa x + \lambda x$ *για κάθε* $\kappa, \lambda \in F$ *και κάθε* $x \in X$
(vii) $(\kappa\lambda)x = \kappa(\lambda x)$ *για κάθε* $\kappa, \lambda \in F$ *και κάθε* $x \in X$
$(viii)$ $1x = x$ *για κάθε* $x \in X$, *όπου* 1 *είναι το μοναδιαίο στοιχείο του* F.

Είναι προφανές ότι, αν ο X είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$, τότε είναι γραμμικός χώρος και επί του $\mathbf{R}$.

Όταν γράφουμε $x - y$ εννοούμε το $x + (-y)$.

Πρόταση 1.36 *Έστω γραμμικός χώρος* X *επί του* F.
(1) Το $0 \in X$ *με την ιδιότητα* (iii) *του ορισμού είναι μοναδικό.*
(2) Για κάθε $x \in X$ *το* $-x \in X$ *με την ιδιότητα* (iv) *του ορισμού είναι μοναδικό.*
(3) $(-1)x = -x$ *για κάθε* $x \in X$.
(4) $0x = 0$ *για κάθε* $x \in X$.
(5) $\kappa 0 = 0$ *για κάθε* $\kappa \in F$.
(6) Αν $\kappa \in F$, $x \in X$ *και* $\kappa x = 0$, *τότε είτε* $\kappa = 0$ *είτε* $x = 0$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 1.36 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F.*
*(i) Αν $b \in X$, η 1-1 και επί απεικόνιση $x \mapsto x + b$ ονομάζεται **μεταφορά στον X κατά b**.*
*(ii) Αν $\kappa \in F \setminus \{0\}$, η 1-1 και επί απεικόνιση $x \mapsto \kappa x$ ονομάζεται **ομοιοθεσία στον X με λόγο κ**.*

Ορισμός 1.37 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F.*
(i) Αν $\kappa \in F$ και $A \subseteq X$, ορίζουμε $\kappa A = \{\kappa a | a \in A\}$.
(ii) Αν $A, B \subseteq X$, ορίζουμε $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.
(iii) Αν $A \subseteq X$, ορίζουμε $-A = \{-a | a \in A\}$.
(iv) Αν $x \in X$ και $A \subseteq X$, ορίζουμε $x + A = \{x + a | a \in A\}$.

1.3.2 Γραμμικοί υπόχωροι

Ορισμός 1.38 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και μη-κενό $Y \subseteq X$. Το Y ονομάζεται **γραμμικός υπόχωρος του X** αν*
(i) $x + y \in Y$ για κάθε $x, y \in Y$ και
(ii) $\kappa x \in Y$ για κάθε $\kappa \in F$ και κάθε $x \in Y$.

Το $\{0\}$ και το X αποτελούν, προφανώς, γραμμικούς υπόχωρους του X.

Πρόταση 1.37 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε το Y με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ του X περιορισμένες στο Y αποτελεί γραμμικό χώρο επί του F.*

Απόδειξη: Αν δείξουμε ότι $0 \in Y$ και ότι $-y \in Y$ για κάθε $y \in Y$, τότε όλες οι άλλες ιδιότητες γραμμικού χώρου ισχύουν για τα στοιχεία του Y αφού ισχύουν για όλα τα στοιχεία του X.

Όμως, το Y δεν είναι κενό και, αν $y_0 \in Y$, τότε $0 = 0y_0 \in Y$. Ομοίως, αν $y \in Y$, τότε $-y = (-1)y \in Y$.

Πρόταση 1.38 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F.*
(1) Αν οι Y, Z είναι γραμμικοί υπόχωροι του X, τότε το $Y + Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.
(2) Αν τα στοιχεία του μη-κενού $\mathcal{Y}$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του X, τότε το $\bigcap \mathcal{Y}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Απόδειξη: (1) Άσκηση.
(2) Έστω $x, y \in \bigcap \mathcal{Y}$. Τότε $x, y \in Y$ για κάθε $Y \in \mathcal{Y}$ και, επειδή κάθε τέτοιο Y είναι γραμμικός υπόχωρος, $x + y \in Y$ για κάθε $Y \in \mathcal{Y}$. Άρα $x + y \in \bigcap \mathcal{Y}$. Ομοίως δείχνουμε ότι, αν $x \in \bigcap \mathcal{Y}$ και $\kappa \in F$ τότε $\kappa x \in \bigcap \mathcal{Y}$.

Ορισμός 1.39 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $A \subseteq X$. Ορίζουμε τη **γραμμική θήκη του A***
$< A >= \bigcap \{Y | Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X και $A \subseteq Y\}$.

Πρόταση 1.39 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $A \subseteq X$.*
(1) Το $< A >$ είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του X ο οποίος περιέχει το A.
(2) $< A >= \{\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n | n \in \mathbf{N}, \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F, a_1, \ldots, a_n \in A\}$.

Απόδειξη: (1) Προφανές λογω της Πρότασης 1.38(2).
(2) Ονομάζουμε B το σύνολο στη δεξιά μεριά της ισότητας. Κάθε στοιχείο $\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n$ περιέχεται σε κάθε γραμμικό υπόχωρο ο οποίος περιέχει το A. Άρα κάθε τέτοιο στοιχείο περιέχεται στο $< A >$ και, επομένως, $B \subseteq < A >$.

Είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι το σύνολο B είναι γραμμικός υπόχωρος και ότι περιέχει το A. Άρα $< A > \subseteq B$.

Ορισμός 1.40 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $x, a_1, \ldots, a_n \in X$. Το x ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός των** $a_1, \ldots, a_n$ αν υπάρχουν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ ώστε $x = \kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n$.*

Η Πρόταση 1.39(2) λέει ότι το $< A >$ αποτελείται ακριβώς από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των (οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους) στοιχείων του A.

1.3.3 Βάσεις και διάσταση

Ορισμός 1.41 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $A \subseteq X$.*
*(i) Το A ονομάζεται **γραμμικά ανεξάρτητο**, αν για κάθε $n \in \mathbf{N}$, κάθε $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ και κάθε $a_1, \ldots, a_n \in A$ η ισότητα $\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n = 0$ συνεπάγεται ότι $\kappa_1 = \ldots = \kappa_n = 0$.*
*(ii) Λέμε ότι το A **παράγει τον** X, αν $< A >= X$ ή, ισοδύναμα, κάθε στοιχείο του X είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A.*
*(iii) Το A ονομάζεται **βάση** ή **βάση Hamel** του X, αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον X.*

Θεώρημα 1.7 *Κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει βάση.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}$ στοιχεία του οποίου είναι όλα τα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του X. Το $\mathcal{B}$ δεν είναι κενό, αφού για κάθε $a \neq 0$ το $\{a\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω $\mathcal{C}$ οποιοδήποτε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ με τη διάταξη του εγκλεισμού. Δηλαδή, αν $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$, τότε είτε $B_1 \subseteq B_2$ είτε $B_2 \subseteq B_1$. Ορίζουμε το σύνολο $B = \bigcup \mathcal{C}$. Έστω $b_1, \ldots, b_n \in B$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ και $\kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n = 0$. Τότε $b_1 \in B_1, \ldots, b_n \in B_n$ για κάποια $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{C}$. Επειδή κάποιο από τα $B_1, \ldots, B_n$ περιέχει τα υπόλοιπα, συνεπάγεται ότι $b_1, \ldots, b_n \in B_j$ για κάποιο $B_j \in \mathcal{C}$. Το B_j είναι γραμμικά ανεξάρτητο, οπότε $\kappa_1 = \ldots = \kappa_n = 0$. Άρα το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο και, επομένως, ανήκει στο $\mathcal{B}$. Επίσης, είναι προφανές ότι το B είναι άνω-φράγμα του $\mathcal{C}$.

Αποδείξαμε ότι κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ με τη διάταξη του εγκλεισμού έχει άνω-φράγμα στο $\mathcal{B}$. Από το λήμμα του Zorn συνεπάγεται ότι το $\mathcal{B}$ έχει τουλάχιστον ένα maximal στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο B το οποίο δεν περιέχεται σε κανένα γνησίως μεγαλύτερο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θα αποδείξουμε ότι το B παράγει τον X.

Έστω ότι το B δεν παράγει τον X, οπότε υπάρχει $x \in X$ το οποίο δεν είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B. Προφανώς, $x \notin B$, οπότε το $B \cup \{x\}$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα υπάρχουν $b_1, \ldots, b_n \in B$, $\kappa, \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$, όχι όλα μηδέν, ώστε $\kappa x + \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n = 0$. Αν $\kappa \neq 0$, τότε το x είναι γραμμικός συνδυασμός των $b_1, \ldots, b_n$, ενώ, αν $\kappa = 0$, τότε τα $b_1, \ldots, b_n$ είναι γραμμικά εξηρτημένα. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο.

Λήμμα 1.3 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, A γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X, B το οποίο παράγει τον X και $C = A \cap B$. Αν $C \neq A$, υπάρχει $a_0 \in A \setminus C$ και $b_0 \in B \setminus C$ ώστε το σύνολο $(A \setminus \{a_0\}) \cup \{b_0\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς v στοιχείων του A οι οποίοι περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο του $A \setminus C$ με μη-μηδενικό συντελεστή. Επειδή το B παράγει τον X, κάθε τέτοιος v έχει μία δεύτερη γραφή ως γραμμικός συνδυασμός (με μη-μηδενικούς συντελεστές) στοιχείων του B. Σ' αυτή τη γραφή, αν τα στοιχεία του B είναι όλα στο C, τότε, εξισώνοντας τους δύο συνδυασμούς, προκύπτει γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A ίσος με 0 χωρίς να είναι όλοι οι συντελεστές ίσοι με 0. Αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα στη δεύτερη γραφή του v υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $B \setminus C$.

Επιλέγουμε γραμμικό συνδυασμό v_0 στοιχείων του $A \setminus C$ ο οποίος περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $A \setminus C$ με μη-μηδενικό συντελεστή ώστε η δεύτερη γραφή του ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B να περιέχει τον ελάχιστο αριθμό $n \in \mathbf{N}$ στοιχείων του $B \setminus C$ (με μη-μηδενικούς συντελεστές). Παίρνουμε ένα $a_0 \in A \setminus C$ στην πρώτη γραφή του v_0 και ένα στοιχείο $b_0 \in B \setminus C$ στη δεύτερη γραφή του v_0.

Αν το $(A \setminus \{a_0\}) \cup \{b_0\}$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε υπάρχει γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του ίσος με 0 χωρίς να είναι όλοι οι συντελεστές 0. Επειδή το $A \setminus \{a_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, ο συντελεστής του b_0 στον συνδυασμό αυτό δεν είναι 0. Άρα το b_0 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $A \setminus \{a_0\}$. Αντικαθιστώντας το b_0 στη δεύτερη γραφή του v_0 και εξισώνοντας τις δύο γραφές προκύπτει γραμμικός συνδυασμός v στοιχείων του A, έχοντας το a_0 με τον ίδιο συντελεστή όπως και ο v_0, ίσος με γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του B αλλά με το πολύ $n-1$ στοιχεία του $B \setminus C$. Αυτό αντιφάσκει με την επιλογή του v_0.

Άρα το $(A \setminus \{a_0\}) \cup \{b_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεώρημα 1.8 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $A, B \subseteq X$.*
(1) Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το B παράγει τον X, τότε $card(A) \leq card(B)$.
(2) Αν A, A' είναι βάσεις του X, τότε $card(A) = card(A')$.

Απόδειξη: (1) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $f : A \to B$ η οποία είναι 1-1. Αν $C = A \cap B$ και $C = A$, τότε αρκεί να θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση $i : C \to C$ με τύπο $i(c) = c$ για κάθε $c \in C$. Άρα, έστω $A \neq C$.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}$ του οποίου στοιχεία είναι όλες οι 1-1 συναρτήσεις f οι οποίες είναι επεκτάσεις της i με πεδίο ορισμού $D(f)$ ώστε $C \subseteq D(f) \subseteq A$, σύνολο τιμών $R(f)$ ώστε $C \subseteq R(f) \subseteq B$ και το σύνολο $(A \setminus D(f)) \cup R(f)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Στο σύνολο $\mathcal{F}$ ορίζουμε τη διάταξη $f_1 \prec f_2$ να σημαίνει ότι η f_2 είναι επέκταση της f_1. Δηλαδή, $D(f_1) \subseteq D(f_2)$ και $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in D(f_1)$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3, υπάρχει $a_0 \in A \setminus C$ και $b_0 \in B \setminus C$ ώστε το $(A \setminus \{a_0\}) \cup \{b_0\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Ορίζουμε $f : C \cup \{a_0\} \to C \cup \{b_0\}$ ώστε να είναι επέκταση της i με $f(a_0) = b_0$. Προφανώς, $f \in \mathcal{F}$, οπότε το $\mathcal{F}$ δεν είναι κενό.

Έστω τυχόν ολικά διατεταγμένο $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Αν $x \in \bigcup\{D(f) | f \in \mathcal{G}\}$, τότε $x \in D(f)$ για κάποια $f \in \mathcal{G}$. Αν $x \in D(f')$ για κάποια ακόμη $f' \in \mathcal{G}$, τότε μία από τις f, f' είναι επέκταση της άλλης και, επομένως, $f(x) = f'(x)$. Άρα ορίζεται καλώς συνάρτηση $F : \bigcup\{D(f) | f \in \mathcal{G}\} \to B$ με τύπο $F(x) = f(x)$ για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{G}$ με $x \in D(f)$.

Προφανώς, $C \subseteq D(F) = \bigcup\{D(f) | f \in \mathcal{G}\} \subseteq A$ και $C \subseteq R(F) = \bigcup\{R(f) | f \in \mathcal{G}\} \subseteq B$ και η F είναι επέκταση όλων των $f \in \mathcal{G}$.

Αν $F(x_1) = F(x_2)$ για κάποια $x_1, x_2 \in \bigcup\{D(f) | f \in \mathcal{G}\}$, τότε $x_1 \in D(f_1)$, $x_2 \in D(f_2)$ για κάποιες $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$ και, επειδή μία από τις f_1, f_2, έστω η f_2, είναι επέκταση της άλλης, συνεπάγεται $f_2(x_1) = f_2(x_2)$, οπότε $x_1 = x_2$. Άρα η F είναι 1-1.

Έστω ότι το $(A \setminus D(F)) \cup R(F)$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in A \setminus D(F)$, $b_1, \ldots, b_m \in R(F)$ και $\kappa_1, \ldots, \kappa_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, όχι όλα μηδέν, ώστε $\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$. Υπάρχουν $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{G}$ ώστε $b_1 \in R(f_1), \ldots, b_m \in R(f_m)$ και, επειδή κάποια από τις $f_1, \ldots, f_m$, έστω η f_m, είναι επέκταση όλων των άλλων, συνεπάγεται ότι $b_1, \ldots, b_m \in R(f_m)$. Τότε, προφανώς, $a_1, \ldots, a_n \in A \setminus D(f_m)$, $b_1, \ldots, b_m \in R(f_m)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα $F \in \mathcal{F}$ και είναι άνω-φράγμα του $\mathcal{G}$. Από το Λήμμα του Zorn συνεπάγεται ότι υπάρχει maximal συνάρτηση $f \in \mathcal{F}$. Δηλαδή η f είναι 1-1 με $C \subseteq D(f) \subseteq A$, $C \subseteq R(f) \subseteq B$, το $(A \setminus D(f)) \cup R(f)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και δεν υπάρχει καμμία γνήσια επέκτασή της με τις ίδιες ιδιότητες. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $D(f) = A$.

Αν $D(f) \neq A$, θέτουμε $A_1 = (A \setminus D(f)) \cup R(f)$ και παρατηρούμε ότι $A_1 \cap B = R(f)$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1.3 στα A_1, B και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $a_0 \in A \setminus D(f)$ και $b_0 \in B \setminus R(f)$ ώστε το $\big(A \setminus (D(f) \cup \{a_0\})\big) \cup (R(f) \cup \{b_0\})$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Κατόπιν ορίζουμε συνάρτηση $F : D(f) \cup \{a_0\} \to R(f) \cup \{b_0\}$ με τύπο $F(a) = f(a)$ για κάθε $a \in D(f)$ και $F(a_0) = b_0$. Είναι προφανές ότι η F είναι γνήσια επέκταση της f και στοιχείο του $\mathcal{F}$. Αυτό είναι άτοπο.

(2) Αν τα A, A' είναι βάσεις του X, τότε, σύμφωνα με το (1) ισχύει $card(A) \leq card(A')$ και $card(A') \leq card(A)$ και, από το Θεώρημα Schröder-Bernstein , συμπεραίνουμε ότι $card(A) = card(A')$.

Βάσει των δύο τελευταίων προτάσεων δικαιολογείται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 1.42 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και A οποιαδήποτε βάση του X. Αν $X \neq \{0\}$, ορίζουμε τη* ***διάσταση*** *του X ως τον πληθάριθμο της A: $dim(X) = card(A)$. Αν $X = \{0\}$ ορίζουμε $dim(X) = 0$.*

Πρόταση 1.40 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F.*
(1) Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X, υπάρχει βάση B του X ώστε $A \subseteq B$, οπότε $card(A) \leq dim(X)$.

(2) Αν το B παράγει τον X, υπάρχει βάση A του X ώστε $A \subseteq B$, οπότε $dim(X) \leq card(B)$.
(3) Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε $dim(Y) \leq dim(X)$.
(4) Αν $dim(X) < +\infty$, το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X και $card(A) = dim(X)$, το A είναι βάση του X.
(5) Αν $dim(X) < +\infty$, το A παράγει τον X και $card(A) = dim(X)$, το A είναι βάση του X.

Απόδειξη: (1) Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη ύπαρξης βάσης του X θεωρώντας, τώρα, το σύνολο $\mathcal{B}$ με στοιχεία όλα τα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του X τα οποία περιέχουν το A.
(2) Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη ύπαρξης βάσης του X θεωρώντας το σύνολο $\mathcal{B}$ με στοιχεία όλα τα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του X τα οποία περιέχονται στο B.
(3) Παίρνουμε μία βάση A του Y και, βάσει του (1), την επεκτείνουμε σε βάση B του X.
(4) και (5) Προφανή, βάσει των (1) και (2) αντιστοίχως.

Πρόταση 1.41 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{C}$. Αν οι διαστάσεις του X ως γραμμικού χώρου επί του $\mathbf{C}$ και επί του $\mathbf{R}$ είναι $dim_{\mathbf{C}}(X)$ και $dim_{\mathbf{R}}(X)$, αντιστοίχως, τότε $dim_{\mathbf{R}}(X) = 2\ dim_{\mathbf{C}}(X)$.*

Απόδειξη: Αν B είναι βάση του X θεωρούμενου ως γραμμικού χώρου επί του $\mathbf{C}$, τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{b, ib | b \in B\}$ είναι βάση του X θεωρούμενου ως γραμμικού χώρου επί του $\mathbf{R}$.

1.3.4 Χώρος-πηλίκο

Ορισμός 1.43 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, Y γραμμικός υπόχωρος του X και $x_1, x_2 \in X$. Λέμε ότι **το x_1 είναι ισοδύναμο mod Y με το x_2** και γράφουμε $x_1 \equiv x_2\ modY$, αν $x_1 - x_2 \in Y$.*

Πρόταση 1.42 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και Y γραμμικός υπόχωρος του X.*
(1) $x \equiv x\ modY$ για κάθε $x \in X$.
(2) Αν $x_1 \equiv x_2\ modY$, τότε $x_2 \equiv x_1\ modY$.
(3) Αν $x_1 \equiv x_2\ modY$ και $x_2 \equiv x_3\ modY$, τότε $x_1 \equiv x_3\ modY$.
(4) Αν $x_1 \equiv x_2\ modY$ και $z_1 \equiv z_2\ modY$, τότε $x_1 + z_1 \equiv x_2 + z_2\ modY$.
(5) Αν $x_1 \equiv x_2\ modY$ και $\kappa \in F$, τότε $\kappa x_1 \equiv \kappa x_2\ modY$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 1.44 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, Y γραμμικός υπόχωρος του X και $x \in X$. Το σύνολο $[x]_Y = \{z \in X | z \equiv x\ modY\}$ ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας mod Y με αντιπρόσωπο** x.*

Πρόταση 1.43 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Για κάθε $x \in X$ ισχύει $[x]_Y = x + Y$.*

Απόδειξη: Αν $z \in [x]_Y$, τότε $z \equiv x \; modY$, οπότε $z-x \in Y$. Άρα $z = x+(z-x) \in x+Y$. Αντιστρόφως, αν $z \in x+Y$, τότε $z-x \in Y$, οπότε $z \equiv x \; modY$. Άρα $z \in [x]_Y$.

Λήμμα 1.4 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, Y γραμμικός υπόχωρος του X και $x, z \in X$.*
(1) $x \in [x]_Y$.
(2) Αν $z \in [x]_Y$, τότε $[z]_Y = [x]_Y$.
(3) $[x]_Y = [z]_Y$ αν και μόνον αν $x \equiv z \; modY$.
(4) Αν $[x]_Y \cap [z]_Y \neq \emptyset$, τότε $[x]_Y = [z]_Y$.

Απόδειξη: (1) Διότι $x \equiv x \; modY$.
(2) $z \in [x]_Y$ συνεπάγεται ότι $z \equiv x \; modY$. Βάσει της Πρότασης 1.42, $w \in [z]_Y$ αν και μόνον αν $w \equiv z \; modY$ αν και μόνον αν $w \equiv x \; modY$ αν και μόνον αν $w \in [x]_Y$.
(3) Αν $[x]_Y = [z]_Y$, τότε, επειδή $x \in [x]_Y$, συνεπάγεται ότι $x \in [z]_Y$, οπότε $x \equiv z \; modY$. Αντιστρόφως, αν $x \equiv z \; modY$, τότε $w \in [x]_Y$ αν και μόνον αν $w \equiv x \; modY$ αν και μόνον αν $w \equiv z \; modY$ αν και μόνον αν $w \in [z]_Y$.
(4) Αν $w \in [x]_Y \cap [z]_Y$, τότε, βάσει του (2), $[x]_Y = [w]_Y = [z]_Y$.

Ορισμός 1.45 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, Y γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε το* ***χώρο-πηλίκο του*** *$X \; modY$ ως το σύνολο*
$X/Y = \{\xi | \text{υπάρχει } x \in X \text{ ώστε } \xi = [x]_Y\}$.

Πρόταση 1.44 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Τα στοιχεία του X/Y είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του X και η ένωσή τους ισούται με το X. Δηλαδή το X/Y αποτελεί διαμέριση του X.*

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1.4.

Πρόταση 1.45 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και Y γραμμικός υπόχωρος του X.*
(1) Αν $\xi, \eta \in X/Y$, τότε $\xi + \eta \in X/Y$. Πιο συγκεκριμένα, αν $\xi = [x]_Y$ και $\eta = [z]_Y$, τότε $\xi + \eta = [x+z]_Y$.
(2) Αν $\xi \in X/Y$ και $\kappa \in F$, τότε $\kappa\xi \in X/Y$. Πιο συγκεκριμένα, αν $\xi = [x]_Y$, τότε $\kappa\xi = [\kappa x]_Y$.

Απόδειξη: (1) Έστω $\xi = [x]_Y$ και $\eta = [z]_Y$. Αν $w \in \xi + \eta = [x]_Y + [z]_Y$, τότε υπάρχουν $x' \in [x]_Y$ και $z' \in [z]_Y$ ώστε $w = x' + z' \equiv x + z \; modY$. Άρα $w \in [x+z]_Y$. Αντιστρόφως, αν $w \in [x+z]_Y$, τότε $w - (x+z) \in Y$, οπότε $w = x + \{z + \big(w - (x+z)\big)\} \in [x]_Y + [z]_Y = \xi + \eta$.
(2) Άσκηση.

Βάσει της Πρότασης 1.43 οι ισότητες της τελευταίας πρότασης γράφονται

$$(x+Y) + (z+Y) = (x+z) + Y \qquad \text{και} \qquad \kappa(x+Y) = (\kappa x) + Y.$$

Πρόταση 1.46 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Τότε το σύνολο X/Y με τις πράξεις $(\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$ και $(\kappa, \xi) \mapsto \kappa\xi$ αποτελεί γραμμικό χώρο επί του F.*

Απόδειξη: Το μηδενικό στοιχείο του X/Y είναι το $[0]_Y = 0 + Y = Y$. Το αντίθετο του $[x]_Y$ είναι το $[-x]_Y$. Ο έλεγχος των ιδιοτήτων είναι απλός.

Ορισμός 1.46 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, Y γραμμικός υπόχωρος του X. Η διάσταση του γραμμικού χώρου X/Y ονομάζεται **συνδιάσταση του Y (ως προς τον X)** και συμβολίζεται $codim(Y) = dim(X/Y)$.*

Πρόταση 1.47 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Τότε $dim(Y) + codim(Y) = dim(X)$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε μία βάση A του Y και την επεκτείνουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.40(1), σε βάση B του X. Ορίζουμε το σύνολο $C = \{[b]_Y | b \in B \setminus A\}$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι το C είναι βάση του X/Y.

Έστω $b_1, \ldots, b_n \in B \setminus A$ και $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ με $\kappa_1[b_1]_Y + \cdots + \kappa_n[b_n]_Y = [0]_Y$. Συνεπάγεται $[\kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n]_Y = [0]_Y$, οπότε $\kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n \in Y$. Άρα, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in A$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ ώστε $\kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$. Άρα $\kappa_1 = \ldots = \kappa_n (= \lambda_1 = \ldots = \lambda_m) = 0$. Επομένως, το C είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Έστω $[x]_Y \in X/Y$. Τότε $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n$ για κάποια $a_1, \ldots, a_m \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B \setminus A$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$. Επομένως, $[x]_Y = \lambda_1[a_1]_Y + \cdots + \lambda_m[a_m]_Y + \kappa_1[b_1]_Y + \cdots + \kappa_n[b_n]_Y = \kappa_1[b_1]_Y + \cdots + \kappa_n[b_n]_Y$. Άρα το C παράγει τον X/Y.

1.3.5 Γραμμικοί Τελεστές

Ορισμός 1.47 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επι του F. Μία συνάρτηση $T : X \to Y$ ονομάζεται **γραμμικός τελεστής** ή **γραμμικός μετασχηματισμός** ή **γραμμική απεικόνιση (από τον X στον Y)** αν*
(i) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$
(ii) $T(\kappa x) = \kappa T(x)$ για κάθε $\kappa \in F$ και κάθε $x \in X$.

Πολλές φορές θα γράφουμε Tx αντί για $T(x)$.

Για παράδειγμα, ο μηδενικός τελεστής O με τύπο $O(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης, ο ταυτοτικός τελεστής $I_X : X \to X$ με τύπο $I_X(x) = x$ για κάθε $x \in X$ είναι γραμμικός τελεστής.

Ορισμός 1.48 *Συμβολίζουμε με $R(T)$ το σύνολο τιμών $T(X) = \{Tx | x \in X\}$ του γραμμικού τελεστή $T : X \to Y$. Επίσης, συμβολίζουμε με $N(T)$ το σύνολο $T^{-1}(\{0\}) = \{x \in X | Tx = 0\}$. Το $N(T)$ ονομάζεται **μηδενόχωρος** ή **πυρήνας** του T.*

Πρόταση 1.48 *Έστω γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$.*
(1) Αν X_1 είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε η εικόνα του μέσω του T, $T(X_1)$, είναι γραμμικός υπόχωρος του Y.
(2) Αν Y_1 είναι γραμμικός υπόχωρος του Y, τότε η αντίστροφη εικόνα του μέσω του T, $T^{-1}(Y_1)$, είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.49 *Έστω γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Ο $R(T)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του Y και ο $N(T)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.50 *Έστω γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$.*
(1) Ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν $N(T) = \{0\}$.
(2) Ο T είναι επί αν και μόνον αν $R(T) = Y$.

Απόδειξη:(1) Αν ο T είναι 1-1 και $x \in N(T)$, τότε $Tx = 0 = T0$, οπότε $x = 0$. Άρα $N(T) \subseteq \{0\}$, οπότε $N(T) = \{0\}$. Αντιστρόφως, έστω $N(T) = \{0\}$. Αν $Tx_1 = Tx_2$, τότε $T(x_1 - x_2) = 0$, οπότε $x_1 - x_2 = 0$.
(2) Προφανές.

Ορισμός 1.49 *Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι επί του F, συμβολίζουμε*
(i) $\mathcal{L}(X,Y) = \{T | T$ είναι γραμμικός τελεστής από τον X στον $Y\}$
(ii) $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$
(iii) $X' = \mathcal{L}(X,F)$
Τα στοιχεία του $\mathcal{L}(X)$ ονομάζονται ***γραμμικοί τελεστές του*** *X. Τα στοιχεία του X' ονομάζονται* ***γραμμικά συναρτησοειδή του*** *X.*

Αν θέλουμε να τονίσουμε το συγκεκριμένο F που χρησιμοποιούμε, γράφουμε $\mathbf{R}$-γραμμικός τελεστής ή $\mathbf{C}$-γραμμικός τελεστής και $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές ή $\mathbf{C}$-γραμμικό συναρτησοειδές.

Ορισμός 1.50 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του F.*
(i) Αν $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$, ορίζουμε $T + S : X \to Y$ με τύπο: $(T+S)x = Tx + Sx$ για κάθε $x \in X$.
(ii) Αν $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\kappa \in F$, ορίζουμε $\kappa T : X \to Y$ με τύπο: $(\kappa T)x = \kappa Tx$ για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 1.51 *Αν $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\kappa \in F$, τότε $T + S, \kappa T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.52 *Ο $\mathcal{L}(X,Y)$ με τις πράξεις που ορίσθηκαν στον Ορισμό 1.45 αποτελεί γραμμικό χώρο επί του F.*

Απόδειξη: Το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι ο μηδενικός τελεστής $O : X \to Y$ με τύπο $O(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Το αντίθετο στοιχείο του $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ είναι ο $-T : X \to Y$ με τύπο $(-T)(x) = -Tx$ για κάθε $x \in X$. Ο έλεγχος των ιδιοτήτων γραμμικού χώρου είναι εύκολος.

Συχνά χρησιμοποιούμε το σύμβολο ST για τη σύνθεση $S \circ T$.

Πρόταση 1.53 *Αν $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, τότε $ST \in \mathcal{L}(X,Z)$.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.54 *(1) Αν* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *και* $R \in \mathcal{L}(Z,W)$, *τότε* $(RS)T = R(ST)$.
(2) Αν $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ *και* $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$, *τότε* $R(T+S) = RT + RS$.
(3) Αν $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *και* $R, S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, *τότε* $(R+S)T = RT + ST$.
(4) Αν ο $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *είναι 1-1 και επί, τότε* $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.
(5) Αν οι $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *είναι 1-1 και επί, τότε* $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Απόδειξη: (1)-(3) και (5) Άσκηση.
(4) Αν $y_1, y_2 \in Y$, παίρνουμε τα (μοναδικά) $x_1, x_2 \in X$ ώστε $Tx_1 = y_1$ και $Tx_2 = y_2$. Τότε $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 = y_1 + y_2$, οπότε $T^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $T^{-1}(\kappa y) = \kappa T^{-1}y$.

Πρόταση 1.55 *Έστω* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *και* A *βάση του* X.
(1) Ο T *είναι 1-1 αν και μόνον αν ο* T *περιορισμένος στο* A *είναι 1-1 και το* $T(A)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του* Y.
(2) Ο T *είναι επί αν και μόνον αν το* $T(A)$ *παράγει τον* Y.
(3) Ο T *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο* T *περιορισμένος στο* A *είναι 1-1 και το* $T(A)$ *είναι βάση του* Y.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι ο T είναι 1-1. Αν $Ta_1, \ldots, Ta_n \in T(A)$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ και $\kappa_1 Ta_1 + \cdots + \kappa_n Ta_n = 0$, τότε $T(\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n) = 0 = T0$, οπότε $\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n = 0$. Άρα $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0$. Αντιστρόφως, έστω ότι το $T(A)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Y και έστω $Tx_1 = Tx_2$. Γράφουμε $x_1 - x_2 = \kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n$ για κάποια (διαφορετικά μεταξύ τους) $a_1, \ldots, a_n \in A$ και κάποια $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$, οπότε $0 = T(x_1 - x_2) = \kappa_1 Ta_1 + \cdots + \kappa_n Ta_n$. Επειδή τα $Ta_1, \ldots, Ta_n$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, συνεπάγεται $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0$. Άρα $x_1 - x_2 = 0$.
(2) Άσκηση.
(3) Συνδυασμός των (1),(2).

Η επόμενη πρόταση λέει ότι ένας γραμμικός τελεστής καθορίζεται μοναδικά από τη δράση του σε μία βάση.

Πρόταση 1.56 *Έστω* X, Y *γραμμικοί χώροι επί του* F *και* A *βάση του* X. *Για κάθε συνάρτηση* $f : A \to Y$ *υπάρχει μοναδικός* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *ώστε* $T(a) = f(a)$ *για κάθε* $a \in A$.

Απόδειξη: Έστω $x \in X$. Γράφουμε $x = \kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n$ για κάποια (μοναδικά) $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$. Ορίζουμε $Tx = \kappa_1 f(a_1) + \cdots + \kappa_n f(a_n) \in Y$.

Τότε, για κάθε $a \in A$, επειδή $a = 1a$, συνεπάγεται $Ta = 1f(a) = f(a)$.

Επίσης, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής.

Αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής με $T(a) = f(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε για κάθε $x = \kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n$ έχουμε $Tx = \kappa_1 Ta_1 + \cdots + \kappa_n Ta_n = \kappa_1 f(a_1) + \cdots + \kappa_n f(a_n)$. Επομένως, οι εικόνες του T είναι μοναδικά καθορισμένες.

1.3.6 Ισομορφισμοί

Ορισμός 1.51 *(i) Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του F και $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Αν ο T είναι αντιστρέψιμος, ονομάζεται* ***ισομορφισμός του X με τον Y****.*
(ii) Αν υπάρχει ισομορφισμός του X με τον Y, λέμε ότι ο X είναι ***ισομορφικός*** *με τον Y και γράφουμε $X \cong Y$.*

Πρόταση 1.57 *Για κάθε γραμμικούς χώρους X, Y, Z ισχύει ότι:*
(1) $X \cong X$
(2) Αν $X \cong Y$, τότε $Y \cong X$
(3) Αν $X \cong Y$ και $Y \cong Z$, τότε $X \cong Z$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 1.58 *Για κάθε γραμμικούς χώρους X, Y ισχύει ότι: ο X είναι ισομορφικός με τον Y αν και μόνον αν $dim(X) = dim(Y)$.*

Απόδειξη: Έστω ισομορφισμός $T : X \to Y$. Αν A είναι βάση του X, από την Πρόταση 1.55(3) συνεπάγεται ότι το $T(A)$ είναι βάση του Y. Επειδή ο T είναι 1-1, $dim(X) = card(A) = card(T(A)) = dim(Y)$.

Αντιστρόφως, έστω $dim(X) = dim(Y)$. Θεωρούμε βάση A του X και βάση B του Y, οπότε $card(A) = card(B)$. Άρα υπάρχει $f : A \to B$ 1-1 και επί. Βάσει της Πρότασης 1.56 υπάρχει $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ώστε $Ta = f(a)$ για κάθε $a \in A$. Από την Πρόταση 1.55(3) συνεπάγεται ότι ο T είναι αντιστρέψιμος.

Πρόταση 1.59 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F με $dim(X) < +\infty$ και $T \in \mathcal{L}(X)$. Ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν είναι επί.*

Απόδειξη: Παίρνουμε μία βάση A του X και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 1.55 και 1.40(4)(5).

Λήμμα 1.5 *Έστω $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $x, z \in X$. $Tx = Tz$ αν και μόνον αν $x \equiv z \; modN(T)$.*

Απόδειξη: $Tx = Tz$ αν και μόνον αν $T(x-z) = 0$ αν και μόνον αν $x - z \in N(T)$ αν και μόνον αν $x \equiv z \; modN(T)$.

Βάσει του Λήμματος ο επόμενος ορισμός είναι καλός.

Ορισμός 1.52 *Αν $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, ορίζουμε συνάρτηση $\tilde{T} : X/N(T) \to Y$ με τύπο $\tilde{T}\xi = Tx$ για οποιοδήποτε $x \in X$ με $\xi = [x]_{N(T)}$.*

Πρόταση 1.60 *Έστω $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\tilde{T} : X/N(T) \to Y$ η συνάρτηση που μόλις ορίσθηκε.*
(1) $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X/N(T), Y)$.
(2) $R(\tilde{T}) = R(T)$.
(3) Ο $\tilde{T}$ είναι 1-1.
(4) $X/N(T) \cong R(T)$.
(5) $dim(X) = dim(N(T)) + dim(R(T))$.

Απόδειξη: (1) Αν $\xi = [x]_{N(T)}$ και $\eta = [z]_{N(T)}$, τότε $\tilde{T}(\xi+\eta) = \tilde{T}([x]_{N(T)} + [z]_{N(T)}) = \tilde{T}([x+z]_{N(T)}) = T(x+z) = Tx + Tz = \tilde{T}\xi + \tilde{T}\eta$. Ομοίως, $\tilde{T}(\kappa\xi) = \kappa\tilde{T}\xi$.
(2) Προφανές.
(3) Αν $\xi = [x]_{N(T)}$ και $\eta = [z]_{N(T)}$, τότε: $\tilde{T}\xi = \tilde{T}\eta$ αν και μόνον αν $Tx = Tz$ αν και μόνον αν $T(x-z) = 0$ αν και μόνον αν $x - z \in N(T)$ αν και μόνον αν $[x]_{N(T)} = [z]_{N(T)}$ αν και μόνον αν $\xi = \eta$.
(4) Από τα (1)-(3).
(5) Από τις Προτάσεις 1.47 και 1.58.

1.3.7 Υπερεπίπεδα και ημιχώροι

Ορισμός 1.53 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και γραμμικός υπόχωρος Y. Αν $codim(Y) = 1$, τότε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $x + Y$ ονομάζεται* ***υπερεπίπεδο στον*** *X.*

Δύο υπερεπίπεδα L και M στον X ονομάζονται ***παράλληλα*** *αν υπάρχει γραμμικός υπόχωρος Y με $codim(Y) = 1$ ώστε $L = x + Y$ και $M = z + Y$ για κάποια $x, z \in X$.*

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αν ένα υπερεπίπεδο L στον X γράφεται $L = x + Y$ και $L = x' + Y'$ για κάποια $x, x' \in X$ και κάποιους γραμμικούς υπόχωρους Y, Y' του X συνδιάστασης 1, τότε $Y = Y'$ και $x - x' \in Y$.

Η επόμενη πρόταση αντιστοιχίζει (μη-μηδενικά) γραμμικά συναρτησοειδή με γραμμικούς υπόχωρους συνδιάστασης 1.

Πρόταση 1.61 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F.*
(1) Αν $x' \in X' \setminus \{0\}$, ο $N(x')$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X συνδιάστασης 1.
(2) Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X συνδιάστασης 1, υπάρχει $x' \in X' \setminus \{0\}$ ώστε $Y = N(x')$.

Απόδειξη: (1) Είναι γνωστό ότι ο $N(x')$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Έστω $x_0 \in X$ με $x'(x_0) \neq 0$. Παίρνουμε τυχόν $x \in X$ και έχουμε $x'\big(x - \frac{x'(x)}{x'(x_0)}\, x_0\big) = x'(x) - \frac{x'(x)}{x'(x_0)}\, x'(x_0) = 0$. Άρα $x - \frac{x'(x)}{x'(x_0)}\, x_0 \in N(x')$. Αυτό συνεπάγεται ότι $[x]_{N(x')} = \frac{x'(x)}{x'(x_0)}\, [x_0]_{N(x')}$. Επομένως, κάθε στοιχείο του $X/N(x')$ είναι πολλαπλάσιο του $[x_0]_{N(x')}$ και, επειδή το $[x_0]_{N(x')}$ δεν είναι το μηδενικό στοιχείο του $X/N(x')$, συνεπάγεται ότι το $\{[x_0]_{N(x')}\}$ αποτελεί βάση του $X/N(x')$. Άρα $codim(N(x')) = 1$.
(2) Έστω $x_0 \in X$ ώστε το $\{[x_0]_Y\}$ να αποτελεί βάση του X/Y. Θεωρούμε τυχόν $x \in X$, οπότε υπάρχει (μοναδικό) $\kappa \in F$ ώστε $[x]_Y = \kappa[x_0]_Y$. Ορίζουμε $x' : X \to F$ με τύπο $x'(x) = \kappa$.

Αν $[x_1]_Y = \kappa_1[x_0]_Y$, $[x_2]_Y = \kappa_2[x_0]_Y$ και $\kappa \in F$, τότε $[x_1 + x_2]_Y = (\kappa_1 + \kappa_2)[x_0]_Y$ και $[\kappa x_1]_Y = \kappa\kappa_1[x_0]_Y$. Επομένως, $x'(x_1 + x_2) = \kappa_1 + \kappa_2 = x'(x_1) + x'(x_2)$ και $x'(\kappa x_1) = \kappa\kappa_1 = \kappa x'(x_1)$. Άρα $x' \in X'$.

Τώρα, $x'(x) = 0$ αν και μόνον αν $\kappa = 0$ αν και μόνον αν $[x]_Y$ είναι το μηδενικό στοιχείο του X/Y αν και μόνον αν $x \in Y$. Άρα $N(x') = Y$.

Πρόταση 1.62 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F.*
(1) Για κάθε $x' \in X' \setminus \{0\}$ τα σύνολα $\{x \in X | x'(x) = 0\} = N(x')$ και $\{x \in X | x'(x) = 1\}$ είναι υπερεπίπεδα στον X. Το πρώτο είναι γραμμικός υπόχωρος, ενώ το δεύτερο δεν είναι γραμμικός υπόχωρος.
(2) Για κάθε υπερεπίπεδο L στον X υπάρχει $x' \in X' \setminus \{0\}$ ώστε είτε $L = \{x \in X | x'(x) = 0\} = N(x')$, αν το L είναι γραμμικός υπόχωρος, είτε $L = \{x \in X | x'(x) = 1\}$, αν το L δεν είναι γραμμικός υπόχωρος. Στη δεύτερη περίπτωση το x' είναι μοναδικό ενώ στην πρώτη περίπτωση, αν $L = N(x'_1) = N(x'_2)$ τότε τα x'_1, x'_2 είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου.

Απόδειξη: (1) Το $N(x')$ είναι γραμμικός υπόχωρος συνδιάστασης 1 οπότε και υπερεπίπεδο. Το δεύτερο σύνολο δεν είναι γραμμικός υπόχωρος διότι δεν περιέχει το 0. Αν $x'(x_0) = 1$, τότε αποδεικνύουμε εύκολα ότι $\{x \in X | x'(x) = 1\} = x_0 + N(x')$.
(2) Αν $L = Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος συνδιάστασης 1, βάσει της Πρότασης 1.61(2), υπάρχει $x' \in X' \setminus \{0\}$ ώστε $L = N(x')$.

Αν $L = a + Y$, όπου ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος συνδιάστασης 1 και $a \notin Y$, υπάρχει $x'_0 \in X' \setminus \{0\}$ ώστε $Y = N(x'_0)$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι $L = \{x \in X | x'_0(x) = x'_0(a)\}$. Αν θέσουμε $x' = \frac{1}{x'_0(a)} x'_0$, τότε $x' \in X' \setminus \{0\}$ και $L = \{x \in X | x'(x) = 1\}$.

Έστω $x'_1, x'_2 \in X' \setminus \{0\}$ με $\{x \in X | x'_1(x) = 1\} = \{x \in X | x'_2(x) = 1\}$. Τότε για κάθε $\kappa \in F \setminus \{0\}$ ισχύει ότι $x'_1(x) = \kappa$ αν και μόνον αν $x'_1(\frac{1}{\kappa} x) = 1$ αν και μόνον αν $x'_2(\frac{1}{\kappa} x) = 1$ αν και μόνον αν $x'_2(x) = \kappa$. Άρα $x'_1 = x'_2$.

Αν $N(x'_1) = N(x'_2)$ και πάρουμε x_0 ώστε $x'_1(x_0) = 1$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $x'_2 = x'_2(x_0)\, x'_1$.

Ορισμός 1.54 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{R}$ και L ένα υπερεπίπεδο στον X. Αν $x' \in X' \setminus \{0\}$ ώστε $L = \{x | x'(x) = \lambda\}$, όπου $\lambda = 0$ ή 1, τότε τα σύνολα $\{x | x'(x) < \lambda\}$ και $\{x | x'(x) > \lambda\}$ ονομάζονται* ***οι ανοικτοί ημιχώροι που καθορίζονται από το*** *L και τα σύνολα $\{x | x'(x) \leq \lambda\}$ και $\{x | x'(x) \geq \lambda\}$ ονομάζονται* ***οι κλειστοί ημιχώροι που καθορίζονται από το*** *L.*

1.3.8 Κυρτά σύνολα

Ορισμός 1.55 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Αν $x, y \in X$, το σύνολο $[x, y] = \{tx + (1-t)y | 0 \leq t \leq 1\}$ ονομάζεται* ***ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα*** *x, y.*

Ορισμός 1.56 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Ένα $A \subseteq X$ ονομάζεται* ***κυρτό*** *αν $[x, y] \subseteq A$ για κάθε $x, y \in A$.*

Παραδείγματα Το $\emptyset$, ο X, κάθε μονοσύνολο, κάθε ευθύγραμμο τμήμα, κάθε γραμμικός υπόχωρος και κάθε υπερεπίπεδο είναι κυρτά σύνολα.

Πρόταση 1.63 *Έστω γραμμικοί χώροι X, Y επί του F και $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
(1) Αν τα A, B είναι κυρτά υποσύνολα του X, $\kappa \in F$ και $a \in X$, τότε τα $A + B$, κA και $a + A$ είναι κυρτά.

(2) Αν κάθε στοιχείο της συλλογής $\mathcal{C}$ είναι κυρτό υποσύνολο του X, τότε το $\bigcap \mathcal{C}$ είναι κυρτό.
(3) Αν το A είναι κυρτό υποσύνολο του X, τότε το $T(A)$ είναι κυρτό υποσύνολο του Y.
(4) Αν το B είναι κυρτό υποσύνολο του Y, τότε το $T^{-1}(B)$ είναι κυρτό υποσύνολο του X.

Απόδειξη: Άσκηση.

Λήμμα 1.6 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Αν το A είναι κυρτό υποσύνολο του X, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, κάθε $a_1, \dots, a_n \in A$ και κάθε $t_1, \dots, t_n \geq 0$ με $t_1 + \dots + t_n = 1$ ισχύει $t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \in A$.*

Απόδειξη: Με επαγωγή ως πρός το n. Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n-1$. Αν $t_n = 1$, το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αν $0 \leq t_n < 1$, τότε $t_1 a_1 + \dots + t_n a_n = (1-t_n)\big(\frac{t_1}{1-t_n} a_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} a_{n-1}\big) + t_n a_n \in A$ διότι $\frac{t_1}{1-t_n} + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} = 1$.

Ορισμός 1.57 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Αν $A \subseteq X$, το σύνολο $co(A) = \bigcap \{B | \text{το } B \subseteq X \text{ είναι κυρτό } \supseteq A\}$ ονομάζεται* ***κυρτή θήκη του*** *A.*

Πρόταση 1.64 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $A \subseteq X$.*
(1) Το $co(A)$ είναι το μικρότερο κυρτό υποσύνολο του X το οποίο περιέχει το A.
(2) $co(A) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n | n \in \mathbf{N}, a_1, \dots, a_n \in A, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ και $t_1 + \dots + t_n = 1\}$.

Απόδειξη: (1) Προφανές, βάσει της Πρότασης 1.63(2).
(2) Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $B = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n | n \in \mathbf{N}, a_1, \dots, a_n \in A, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0 \text{ και } t_1 + \dots + t_n = 1\}$ είναι κυρτό και περιέχει το A και, επομένως $co(A) \subseteq B$. Βάσει του Λήμματος 1.6, κάθε στοιχείο του B ανήκει σε κάθε κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το A. Άρα το B περιέχεται σε κάθε κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το A και, επομένως, $B \subseteq co(A)$.

1.3.9 Ευθύ άθροισμα

Ορισμός 1.58 *Έστω γραμμικοί χώροι Y, Z επί του F. Ορίζουμε πράξεις στο $Y \times Z$*

$$(y_1, z_1) + (y_2, z_2) = (y_1 + y_2, z_1 + z_2) \qquad \kappa(y, z) = (\kappa y, \kappa z)$$

για κάθε $(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y, z) \in Y \times Z$ και κάθε $\kappa \in F$. Το $Y \times Z$ με τις πράξεις αυτές συμβολίζεται $Y \oplus Z$ και ονομάζεται ***ευθύ άθροισμα*** *των Y, Z.*

Πρόταση 1.65 *Έστω γραμμικοί χώροι Y, Z επί του F.*
(1) Ο $Y \oplus Z$ είναι γραμμικός χώρος επί του F.
(2) Υπάρχουν γραμμικοί υπόχωροι Y', Z' του $Y \oplus Z$ ισομορφικοί με τους Y, Z, αντιστοίχως, ώστε $Y' + Z' = Y \oplus Z$ και $Y' \cap Z' = \{(0,0)\}$.

Απόδειξη: (1) Άσκηση.
(2) Αν $Y' = \{(y, 0) | y \in Y\}$ και $Z' = \{(0, z) | z \in Z\}$, τότε οι απεικονίσεις $y \mapsto (y, 0)$ και $z \mapsto (0, z)$ είναι ισομορφισμοί από το Y στο Y' και από το Z στο Z', αντιστοίχως.

Πρόταση 1.66 *Έστω γραμμικοί χώροι Y, Z επί του F. Τότε $dim(Y \oplus Z) = dim(Y) + dim(Z)$.*

Απόδειξη: Αν B είναι βάση του Y και C είναι βάση του Z, τότε το σύνολο $\{(b,0)|b \in B\} \cup \{(0,c)|c \in C\}$ αποτελεί βάση του $Y \oplus Z$. Άρα $dim(Y \oplus Z) = card(B) + card(C) = dim(Y) + dim(Z)$.

Πρόταση 1.67 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και γραμμικοί υπόχωροι Y, Z του X ώστε $Y + Z = X$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Τότε $X \cong Y \oplus Z$.*

Απόδειξη: Η απεικόνιση $T : Y \oplus Z \to X$ με τύπο $T(y,z) = y + z$ είναι ισομορφισμός του $Y \oplus Z$ με τον X.

Πρόταση 1.68 *Έστω $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Τότε $X \cong X/N(T) \oplus N(T)$.*

Απόδειξη: $dim(X) = dim(N(T)) + codim(N(T)) = dim(N(T)) + dim(X/N(T)) = dim(X/N(T) \oplus N(T))$. Άρα $X \cong X/N(T) \oplus N(T)$.

1.4 Παραδείγματα γραμμικών χώρων

1.4.1 Ο χώρος F^n.

Αν $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in F^n$ και $\kappa \in F$, ορίζουμε

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \kappa x = (\kappa x_1, \ldots, \kappa x_n).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι, με επιλογή $0 = (0, \ldots, 0)$ και $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, ο F^n είναι γραμμικός χώρος επί του F.

Αν ορίσουμε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ το $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ με όλες τις συντεταγμένες ίσες με 0 εκτός από τη συντεταγμένη στη θέση j η οποία είναι ίση με 1, τότε το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ αποτελεί βάση του F^n. Επομένως, $dim(F^n) = n$.

Αν πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία του $\mathbf{C^n}$ με πραγματικούς αριθμούς, αντί για μιγαδικούς, δηλαδή θεωρήσουμε σαν F το $\mathbf{R}$, αντί για το $\mathbf{C}$, τότε ο $\mathbf{C^n}$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{R}$ και η διάστασή του είναι ίση με $2n$. Βάση, τώρα, αποτελεί το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$, όπου τα e_j είναι όπως προηγουμένως και $f_j = (0, \ldots, 0, i, 0, \ldots, 0)$ με όλες τις συντεταγμένες ίσες με 0 εκτός από τη συντεταγμένη στη θέση j η οποία είναι ίση με i, τη φανταστική μονάδα.

1.4.2 Χώροι ακολουθιών.

Ορίζουμε τους εξής χώρους ακολουθιών:

$$\begin{aligned}
s &= \{(x_1, x_2, \ldots)|x_j \in F, j \in \mathbf{N}\} \\
c &= \{(x_1, x_2, \ldots)|x_j \in F, j \in \mathbf{N}, \text{ και η } \{x_j\} \text{ συγκλίνει}\} \\
c_0 &= \{(x_1, x_2, \ldots)|x_j \in F, j \in \mathbf{N}, \text{ και } x_j \to 0\} \\
l^\infty &= \{(x_1, x_2, \ldots)|x_j \in F, j \in \mathbf{N}, \text{ και } \{x_j\} \text{ είναι φραγμένη ακολουθία}\} \\
l^p &= \{(x_1, x_2, \ldots)|x_j \in F, j \in \mathbf{N}, \text{ και } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty\}, \qquad 1 \le p < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Οι πράξεις στους χώρους αυτούς ορίζονται *κατά συντεταγμένες*, όπως στον F^n. Δηλαδή, για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots)$ και κάθε $\kappa \in F$ ορίζουμε

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \qquad \kappa x = (\kappa x_1, \kappa x_2, \ldots).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι πράξεις αυτές ορίζονται στους παραπάνω χώρους, αν σκεφτούμε ότι, αν οι ακολουθίες x, y συγκλίνουν ή συγκλίνουν στο 0 ή είναι φραγμένες, τότε και οι ακολουθίες $x + y$ και κx συγκλίνουν ή συγκλίνουν στο 0 ή είναι φραγμένες, αντιστοίχως. Όσον αφορά στον τελευταίο χώρο, κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι, αν $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty$, τότε και

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\kappa x_j|^p = |\kappa|^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty.$$

Επίσης, αν $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty$ και $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p < +\infty$, τότε

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \leq 2^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p + 2^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty.$$

Αυτά αποδεικνύουν ότι, αν $x, y \in l^p$ και $\kappa \in F$, τότε $x + y, \kappa x \in l^p$.

Για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε τη στοιχειώδη ανισότητα

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \qquad \text{για κάθε } a, b \geq 0 \text{ και } 1 \leq p < +\infty.$$

Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται θεωρώντας τη συνάρτηση $f : \mathbf{R}_\mathbf{0}^+ \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(t) = 2^{p-1}t^p - (t+1)^p + 2^{p-1}$. Μελετώντας την παράγωγό της βλέπουμε εύκολα ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα $f(t) \geq f(1) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Αν $a > 0$, θέτουμε $t = \frac{b}{a}$ και, πολλαπλασιάζοντας κατόπιν με a^p, παίρνουμε την επιδιωκόμενη ανισότητα. Αν $a = 0$, η αρχική ανισότητα είναι προφανής.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι χώροι αυτοί είναι γραμμικοί χώροι επί του F. Το μηδενικό στοιχείο σε όλους είναι το $0 = (0, 0, \ldots)$ και $-x = (-x_1, -x_2, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Γνωρίζοντας ότι, αν μία σειρά συγκλίνει, τότε ο γενικός όρος της συγκλίνει στο 0 και ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, βλέπουμε ότι οι χώροι αυτοί έχουν τη διάταξη εγκλεισμού

$$l^p \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l^\infty \subseteq s.$$

Επίσης, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$l^p \subseteq l^q\,, \qquad \text{αν } 1 \leq p < q < +\infty\,.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$. Τότε $\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p < +\infty$, οπότε $|x_j| \to 0$. Επομένως, υπάρχει j_0 ώστε $|x_j| \leq 1$ για κάθε $j \geq j_0$. Τότε,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^q = \sum_{j=1}^{j_0-1} |x_j|^q + \sum_{j=j_0}^{+\infty} |x_j|^q \leq \sum_{j=1}^{j_0-1} |x_j|^q + \sum_{j=j_0}^{+\infty} |x_j|^p < +\infty.$$

Άρα $x \in l^q$.

Αν για κάθε $j \in \mathbf{N}$ ορίσουμε $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ με όλες τις συντεταγμένες ίσες με 0 εκτός της συντεταγμένης στη θέση j που είναι ίση με 1, τότε το σύνολο $\{e_j | j \in \mathbf{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο όλων των χώρων αλλά *δεν* παράγει κανέναν από αυτούς.

1.4.3 Χώροι συναρτήσεων.

1. Θεωρούμε το χώρο
$$F^A = \{f | f : A \to F\}$$
για τυχόν σύνολο A. Αν $f, g : A \to F$ και $\kappa \in F$ ορίζουμε $f + g : A \to F$ με τύπο $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ για κάθε $a \in A$ και $\kappa f : A \to F$ με τύπο $(\kappa f)(a) = \kappa f(a)$ για κάθε $a \in A$.

Είναι προφανές ότι ο χώρος F^A με αυτές τις πράξεις αποτελεί γραμμικό χώρο επί του F. Το μηδενικό στοιχείο είναι η συνάρτηση $0 : A \to F$ με τύπο $0(a) = 0$ για κάθε $a \in A$ και το αντίθετο στοιχείο του $f \in F^A$ είναι η $-f : A \to F$ με τύπο $(-f)(a) = -f(a)$ για κάθε $a \in A$.

2. Θεωρούμε το χώρο
$$B(A) = \{f | f : A \to F \text{ και η } f \text{ είναι φραγμένη στο } A\}$$
των φραγμένων συναρτήσεων από το A στο F. Αν οι f, g είναι φραγμένες στο A και $\kappa \in F$, τότε οι $f + g, \kappa f$ είναι φραγμένες στο A. Άρα ο $B(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του F^A και, επομένως, είναι γραμμικός χώρος επί του F.

3. Αν υποθέσουμε ότι το σύνολο A είναι τοπολογικός χώρος και θεωρήσουμε το F εφοδιασμένο με τη συνηθισμένη ευκλείδια μετρική του, ορίζουμε το χώρο
$$C(A) = \{f | f : A \to F \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } A\}$$
των συνεχών συναρτήσεων από το A στο F. Ο $C(A)$ είναι υποσύνολο του F^A και, επειδή το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και το γινόμενο αριθμού και συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση, συνεπάγεται ότι ο $C(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του F^A και, επομένως, γραμμικός χώρος επί του F.

4. Αν, πάλι, το A είναι τοπολογικός χώρος, ορίζουμε
$$BC(A) = B(A) \cap C(A)$$
το χώρο των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων από το A στο F. Προφανώς, ο $BC(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος των $B(A)$ και $C(A)$.

5. Έστω (Ω, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος. Δηλαδή, ένα μη κενό σύνολο Ω και μία σ-άλγεβρα Σ υποσυνόλων του Ω. Ορίζουμε το
$$\mathcal{M}(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega, \Sigma) = \{f | f : \Omega \to F \text{ και } f \text{ είναι μετρήσιμη ως προς την } \Sigma\}.$$

Επειδή το άθροισμα μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση και το γινόμενο αριθμού και μετρήσιμης συνάρτησης είναι μετρήσιμη συνάρτηση,

συνε-πάγεται ότι ο $\mathcal{M}(\Omega)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του F^{Ω}.
6. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Για κάθε p με $1 \leq p < +\infty$ ορίζουμε

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) | \int_{\Omega} |f|^p d\mu < +\infty\}.$$

Επίσης, ορίζουμε

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega) = \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) | \ |f(a)| \leq M_f \text{ για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } a \in \Omega\}.$$

Αν η $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ έχει όλες τις τιμές της στο $\mathbf{R}$, τότε ορίζουμε

$$ess.sup_{\Omega} f = \inf\{M \in \mathbf{R} | f(a) \leq M \text{ για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } a \in \Omega\}$$

και

$$ess.inf_{\Omega} f = \sup\{m \in \mathbf{R} | m \leq f(a) \text{ για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } a \in \Omega\},$$

οπότε ισχύει ότι

$$ess.inf_{\Omega} f \leq f(a) \leq ess.sup_{\Omega} f$$

για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$.

Ολοκληρώνοντας την ανισότητα $|f(a) + g(a)|^p \leq 2^{p-1}|f(a)|^p + 2^{p-1}|g(a)|^p$ βλέπουμε αμέσως ότι, αν $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, τότε

$$\int_{\Omega} |f + g|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu + 2^{p-1} \int_{\Omega} |g|^p \, d\mu < +\infty$$

και, επομένως, $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Επίσης, αν $|f(a)| \leq M_f$ για μ-σχεδόν κάθε a και $|g(a)| \leq M_g$ για μ-σχεδόν κάθε a, τότε $|f(a) + g(a)| \leq M_f + M_g$ για μ-σχεδόν κάθε a. Άρα, αν $f, g \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$, τότε $f + g \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$.

Ομοίως, αν $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ και $\kappa \in F$, τότε

$$\int_{\Omega} |\kappa f|^p \, d\mu = |\kappa|^p \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < +\infty,$$

οπότε $\kappa f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Επίσης, αν $|f(a)| \leq M_f$ για μ-σχεδόν κάθε a, τότε $|\kappa f(a)| \leq |\kappa| M_f$ για μ-σχεδόν κάθε a, οπότε, αν $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$, τότε $\kappa f \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$.

Άρα οι χώροι $\mathcal{L}^p(\Omega)$, με $1 \leq p \leq +\infty$, είναι γραμμικοί υπόχωροι του $\mathcal{M}(\Omega)$.
7. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R^n}$ και $f : U \to F$. Κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N_0^n}$ ονομάζεται πολυδείκτης και ορίζουμε $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ το μήκος του πολυδείκτη α. Τότε, με $D^{\alpha} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$ συμβολίζουμε τη (μικτή) παράγωγο της f τάξης $|\alpha|$ στο x, α_1 φορές ως προς το $x_1, \ldots, \alpha_n$ φορές ως προς το x_n.

Για κάθε $k \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ ορίζουμε

$$C^k(U) = \{f | f : U \to F, \text{ η } f \text{ έχει κάθε παράγωγο τάξης } \leq k \text{ σε κάθε } x \in U\}.$$

Επίσης, ορίζουμε $C^0(U) = C(U)$.

Είναι προφανές ότι οι χώροι $C^k(U)$ είναι γραμμικοί χώροι επί του F και

$$C^\infty(U) \subseteq C^k(U) \subseteq C^l(U) \subseteq C(U), \qquad \text{για κάθε } k, l \in \mathbf{N}_0 \text{ με } k \geq l.$$

8. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{C}$. Ορίζουμε

$$H(U) = \{f | f : U \to \mathbf{C}, \text{ η } f \text{ είναι ολόμορφη στο } U\}.$$

Επειδή το άθροισμα ολόμορφων συναρτήσεων είναι ολόμορφη συνάρτηση και το γινόμενο αριθμού με ολόμορφη συνάρτηση είναι ολόμορφη συνάρτηση, συνεπάγεται ότι ο $H(U)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$.

1.4.4 Χώροι πραγματικών ή μιγαδικών μέτρων

1. Έστω ένα μη-κενό σύνολο Ω και Σ μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Μία συνάρτηση $\mu : \Sigma \to F$ ονομάζεται **πραγματικό**, αν $F = \mathbf{R}$, ή **μιγαδικό**, αν $F = \mathbf{C}$, **μέτρο ως προς την** Σ αν $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(\cup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j)$ για κάθε επιλογή $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbf{N}$, ξένων ανά δύο συνόλων. (Συνεπάγεται, ειδικότερα, ότι η σειρά στην τελευταία ισότητα συγκλίνει.)

Ορίζουμε

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) = \{\mu | \, \mu \text{ είναι πραγματικό ή μιγαδικό μέτρο ως προς την } \Sigma\}.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, αν $\mu, \nu \in \mathcal{A}(\Omega)$ και $\kappa \in F$, τότε $\mu + \nu \in \mathcal{A}(\Omega)$ και $\kappa\mu \in \mathcal{A}(\Omega)$. Άρα ο χώρος $\mathcal{A}(\Omega)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του F^Σ και, επομένως, είναι γραμμικός χώρος επί του F.

Αν ένα πραγματικό ή μιγαδικό μέτρο μ έχει την ιδιότητα $\mu(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \Sigma$, τότε το μ ονομάζεται **μη-αρνητικό πραγματικό μέτρο** και είναι ειδική περίπτωση μέτρου, όπως μαθαίνουμε την έννοια αυτή στα πρώτα μαθήματα θεωρίας μέτρου (ένα μέτρο μπορεί να έχει ως τιμή το $+\infty$): ένα μέτρο μ είναι μη-αρνητικό πραγματικό μέτρο αν και μόνον αν $\mu(\Omega) < +\infty$.

2. Ειδική περίπτωση είναι όταν το Ω είναι τοπολογικός χώρος και η σ-άλγεβρα που θεωρούμε είναι η σ-άλγεβρα η οποία παράγεται από τη συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του Ω. Αυτή η σ-άλγεβρα συμβολίζεται $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$ και ονομάζεται **σ-άλγεβρα των Borel-συνόλων του** Ω. Δηλαδή

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigcap \{\Sigma | \text{η } \Sigma \text{ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει κάθε ανοικτό υποσύνολο του } \Omega\}.$$

Το ότι η $\mathcal{B}(\Omega)$ είναι σ-άλγεβρα φαίνεται αμέσως αν θυμηθούμε ότι η τομή οποιασδήποτε συλλογής σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα. Επίσης, είναι αμέσως φανερό ότι η $\mathcal{B}(\Omega)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στο Ω η οποία περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Ω. Επειδή είναι σ-άλγεβρα, περιέχει επίσης όλα τα κλειστά σύνολα καθώς και όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών και τις αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}(\Omega)$ ονομάζονται **Borel-σύνολα του** Ω. Κάθε πραγματικό ή μιγαδικό μέτρο στο Ω ώς προς την $\mathcal{B}(\Omega)$ ονομάζεται **πραγματικό ή μιγαδικό Borel-μέτρο στο** Ω.

Ένα μέτρο μ στο Ω ώς προς την $\mathcal{B}(\Omega)$ ονομάζεται **Borel-μέτρο στο** Ω αν $\mu(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$.

1.5 Ασκήσεις

1. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και γραμμικοί υπόχωροι Y, Z του X. Αποδείξτε ότι $Y + Z = < Y \cup Z >$.

2. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και γραμμικοί υπόχωροι Y, Z του X.
(1) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $Y + Z \to Z/Y \cap Z$ με τύπο $x \to [z]_{Y\cap Z}$ για κάθε $x = y + z \in Y + Z$ είναι καλώς ορισμένη και ότι είναι γραμμικός τελεστής.
(2) Αποδείξτε ότι $Y + Z/Y \cong Z/Y \cap Z$.

3. Έστω X, Z γραμμικοί χώροι επί του F, γραμμικός υπόχωρος Y του X και $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ ο οποίος είναι επέκταση του T.

4. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και $x \in X$. Αν $x'(x) = 0$ για κάθε $x' \in X'$, αποδείξτε ότι $x = 0$.

5. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και γραμμικός υπόχωρος Y του X με $Y \neq X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικός υπόχωρος Z του X ώστε $Y + Z = X$ και $Y \cap Z = \emptyset$.

6. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F με $dim(X) = n \in \mathbf{N}$ και βάση $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ του X.
(1) Αποδείξτε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $x = \kappa_1 e_1 + \cdots + \kappa_n e_n$ με $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$.
(2) Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ορίζουμε $e'_j : X \to F$ με τύπο $e'_j(x) = \kappa_j$ για κάθε $x \in X$, όπου τα κ_j καθορίζονται από το (1). Αποδείξτε ότι $e'_j \in X'$ και ότι το $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ είναι βάση του X'.

Ορισμός: *Έστω X γραμμικός χώρος επί του F με $dim(X) = n \in \mathbf{N}$ και $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ βάση του X. Η βάση B' του X' που ορίζεται στην προηγούμενη άσκηση ονομάζεται* ***βάση δυική της*** *B.*

7. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $Jx : X' \to F$ με τύπο $Jx(x') = x'(x)$ για κάθε $x' \in X'$.
(1) Αποδείξτε ότι $Jx \in X''$.
(2) Αποδείξτε ότι η $J : X \to X''$ είναι 1-1 γραμμικός τελεστής από τον X στον X''.

Ορισμός: *Έστω X γραμμικός χώρος επί του F. Ο X ονομάζεται* ***αλγεβρικά αυτοπαθής*** *αν η απεικόνιση J της προηγούμενης άσκησης είναι επί, οπότε, ειδικότερα, $X \cong X''$.*

8. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F με $dim(X) = n \in \mathbf{N}$ και βάση $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ του X.
(1) Αν B' είναι η βάση του X' η δυική της B και B'' είναι η βάση του X'' η δυική της B', αποδείξτε ότι $B'' = \{Je_1, \ldots, Je_n\}$.
(2) Αποδείξτε ότι ο X είναι αλγεβρικά αυτοπαθής.

9. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F με άπειρη διάσταση. Αποδείξτε ότι ο X δεν είναι αλγεβρικά αυτοπαθής.

Ορισμός: *Έστω X γραμμικός χώρος επί του F.*
(i). *Αν $A \subseteq X$, ορίζουμε $A^{\perp} = \{x' \in X' | x'(a) = 0$ για κάθε $a \in A\}$.*
(ii). *Αν $B \subseteq X'$, ορίζουμε ${}^{\perp}B = \{x \in X | b'(x) = 0$ για κάθε $b' \in B\}$.*

10. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και $x', x'_1, \ldots, x'_n \in X'$. Αποδείξτε ότι $N(x'_1) \cap \cdots \cap N(x'_n) \subseteq N(x')$ αν και μόνον αν υπάρχουν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ ώστε $x' = \kappa_1 x'_1 + \cdots + \kappa_n x'_n$.

11. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F.
(1) Αποδείξτε ότι $X^{\perp} = \{0\}$, ${}^{\perp}(X') = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = X'$, ${}^{\perp}\{0\} = X$.
(2) Για κάθε $A \subseteq X$ και για κάθε $B \subseteq X'$, αποδείξτε ότι το $A^{\perp}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X' και το ${}^{\perp}B$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.
(3) Αποδείξτε ότι, αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, τότε $A_2^{\perp} \subseteq A_1^{\perp}$ και ότι, αν $B_1 \subseteq B_2 \subseteq X'$, τότε ${}^{\perp}B_2 \subseteq {}^{\perp}B_1$.
(4) Για κάθε $A \subseteq X$ και για κάθε $B \subseteq X'$, αποδείξτε ότι $< A >= {}^{\perp}(A^{\perp})$ και $< B > \subseteq ({}^{\perp}B)^{\perp}$.

12. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και γραμμικός υπόχωρος Y του X.
(1) Για κάθε $x' \in Y^{\perp}$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση $Px' : X/Y \to F$ με τύπο $Px'([x]_Y) = x'(x)$ είναι καλώς ορισμένη και ότι $Px' \in (X/Y)'$.
(2) Αποδείξτε ότι $(X/Y)' \cong Y^{\perp}$,
(3) Για κάθε $x' \in X'$ θεωρείστε την $Qx' : Y \to F$ να είναι ο περιορισμός του x' στον Y, οπότε $Qx' \in Y'$.
(4) Αποδείξτε ότι $X'/Y^{\perp} \cong Y'$.

13. Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του F και $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Θεωρείστε για κάθε $y' \in Y'$ συνάρτηση $T^t y' : X \to F$ με τύπο $T^t y'(x) = y'(Tx)$ για κάθε $x \in X$.
(1) Αποδείξτε ότι $T^t y' \in X'$.
(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $T^t : Y' \to X'$ είναι γραμμικός τελεστής από τον Y' στον X'.
(3) Αποδείξτε ότι $R(T)^{\perp} = N(T^t)$, $R(T) = {}^{\perp}N(T^t)$ και ότι ο T είναι επί αν και μόνον αν ο T^t είναι 1-1.
(4) Αποδείξτε ότι $N(T) = {}^{\perp}R(T^t)$, $N(T)^{\perp} = R(T^t)$ και ότι ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν ο T^t είναι επί.

14. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F και γραμμικός υπόχωρος Y του X συνδιάστασης 1.
(1) Αν L, M είναι οποιαδήποτε υπερεπίπεδα παράλληλα με τον Y, αποδείξτε ότι υπάρχει μεταφορά η οποία απεικονίζει το L επί του M.
(2) Αν L, M είναι οποιαδήποτε υπερεπίπεδα παράλληλα με τον Y και διαφορετικά από τον Y, αποδείξτε ότι υπάρχει ομοιοθεσία η οποία απεικονίζει το L επί του M.

Κεφάλαιο 2

Το Θεώρημα Hahn-Banach

2.1 Η αναλυτική μορφή

Ορισμός 2.1 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Μία συνάρτηση $p : X \to \mathbf{R}$ ονομάζεται* ***θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές*** *αν*
(i) $p(tx) = tp(x)$ για κάθε $x \in X$ και $t \geq 0$,
(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός 2.2 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Μία συνάρτηση $p : X \to \mathbf{R}$ ονομάζεται* ***ημινόρμα*** *αν*
(i) $p(\kappa x) = |\kappa| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\kappa \in F$,
(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Κάθε ημινόρμα είναι θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές.

Λήμμα 2.1 *(1) Αν το p είναι θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές στον X, τότε $p(0) = 0$, $-p(-x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $p(x) - p(y) \leq p(x-y) \leq p(x) + p(-y)$ για κάθε $x, y \in X$.*
(2) Αν το p είναι ημινόρμα στον X, τότε $p(0) = 0$, $p(-x) = p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ για κάθε $x, y \in X$. Ειδικώτερα, $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Θεώρημα 2.1 *(Hahn–Banach) Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{R}$ και θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές p στον X, γραμμικός υπόχωρος Y του X και γραμμικό συναρτησοειδές $f \in Y'$. Αν υποθέσουμε ότι $f(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F \in X'$ ώστε*
(1) $F(y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$,
(2) $F(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Με άλλη διατύπωση: *Αν ένα f, $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές σε γραμμικό υπόχωρο, κυριαρχείται στον υπόχωρο αυτόν από ένα θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές p, τότε υπάρχει επέκταση F του f σε $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές σε ολόκληρο το χώρο το οποίο κυριαρχείται σε ολόκληρο το χώρο από το p.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}$ του οποίου στοιχεία είναι κάθε g με τις ιδιότητες:
(i) το $g : D(g) \to \mathbf{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές σε τυχόντα γραμμικό υπόχωρο $D(g)$ του X,
(ii) το g είναι επέκταση του f, δηλαδή $Y = D(f) \subseteq D(g)$ και $g(y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$,
(iii) $g(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in D(g)$.

Το $\mathcal{F}$ δεν είναι κενό διότι το f είναι στοιχείο του και στο $\mathcal{F}$ εισάγουμε τη διάταξη $\prec$ η οποία ορίζεται ως εξής: $g_1 \prec g_2$ σημαίνει ότι το g_2 είναι επέκταση του g_1.

Έστω τυχόν ολικά διατεταγμένο $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Θεωρούμε το $Z = \bigcup\{D(g) \,|g \in \mathcal{G}\}$, υποσύνολο του X που περιέχει το $Y = D(f)$. Αν $z_1, z_2 \in Z$, τότε υπάρχουν $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ ώστε $z_1 \in D(g_1)$ και $z_2 \in D(g_2)$. Επειδή κάποια από τις g_1, g_2, έστω η g_2, είναι επέκταση της άλλης, συνεπάγεται ότι $z_1, z_2 \in D(g_2)$ και επειδή ο $D(g_2)$ είναι γραμμικός υπόχωρος, $z_1 + z_2 \in D(g_2)$, οπότε $z_1 + z_2 \in Z$. Επίσης, αν $z \in Z$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{G}$ ώστε $z \in D(g)$, οπότε, για κάθε $\kappa \in \mathbf{R}$, $\kappa z \in D(g)$ και, επομένως, $\kappa z \in Z$. Άρα ο Z είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Κατόπιν, παίρνουμε τυχόν $z \in Z$, οπότε $z \in D(g)$ για κάποια $g \in \mathcal{G}$. Αν υπάρχει κάποια ακόμη $g' \in \mathcal{G}$ με $z \in D(g')$, επειδή μία από τις g, g' είναι επέκταση της άλλης, συνεπάγεται ότι $g(z) = g'(z)$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $g_0 : Z \to \mathbf{R}$ με τύπο $g_0(z) = g(z)$, όπου g είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{G}$ με $z \in D(g)$. Είδαμε λίγο πριν ότι, αν $z_1, z_2 \in Z$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{G}$ ώστε $z_1, z_2 \in D(g)$ και, επομένως, $g_0(z_1 + z_2) = g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2) = g_0(z_1) + g_0(z_2)$. Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι $g_0(\kappa z) = \kappa g_0(z)$ για κάθε $z \in Z$ και κάθε $\kappa \in \mathbf{R}$. Άρα το g_0 είναι γραμμικό συναρτησοειδές του Z. Είναι προφανές ότι το g_0 είναι επέκταση του f και ότι $g_0(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in Z$. Άρα $g_0 \in \mathcal{G}$. Επίσης, είναι προφανές ότι το g_0 είναι επέκταση όλων των $g \in \mathcal{G}$ και, επομένως, είναι άνω-φράγμα του $\mathcal{G}$.

Από το Λήμμα του Zorn συνεπάγεται ότι το $\mathcal{F}$ έχει τουλάχιστον ένα maximal στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει F με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ και (iii) και δεν υπάρχει κανένα άλλο g το οποίο να έχει τις ίδιες ιδιότητες και να είναι γνήσια επέκταση του F.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $D(F) = X$.

Έστω $D(F) \neq X$ και τυχόν $x_0 \in X \setminus D(F)$. Θεωρούμε το γραμμικό υπόχωρο $Z = \{a + \kappa x_0 | a \in D(F), \kappa \in \mathbf{R}\}$ του οποίου ο $D(F)$ είναι γνήσιος υπόχωρος και θα ορίσουμε γραμμικό συναρτησοειδές $g : Z \to \mathbf{R}$ ώστε $g(a) = F(a)$ για κάθε $a \in D(F)$ και $g(z) \leq p(z)$ για κάθε $z \in Z$. Τότε το g θα είναι γνήσια επέκταση του F με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ και (iii) και θα προκύψει αντίφαση.

Αν το g είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον Z με $g(x_0) = \kappa_0$ και $g(a) = F(a)$ για κάθε $a \in D(F)$, τότε $g(a+\kappa x_0) = g(a)+\kappa g(x_0) = F(a)+\kappa\kappa_0$. Αντιστρόφως, αν πάρουμε τυχόν $\kappa_0 \in \mathbf{R}$ και ορίσουμε $g : Z \to \mathbf{R}$ με τύπο $g(a + \kappa x_0) =$

$F(a)+\kappa\kappa_0$, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το g είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον Z και $g(a)=F(a)$ για κάθε $a\in D(F)$. Απομένει να επιλέξουμε το κ_0 ώστε να ισχύει $g(a+\kappa x_0)\le p(a+\kappa x_0)$ για κάθε $a\in D(F),\kappa\in\mathbf{R}$. Αυτό ισοδυναμεί με $F(a)+\kappa\kappa_0\le p(a+\kappa x_0)$ για κάθε $a\in D(F),\kappa\in\mathbf{R}$.

Αν $\kappa=0$, παίρνουμε $F(a)\le p(a)$ για κάθε $a\in D(F)$ το οποίο ισχύει.

Αν $\kappa>0$, πρέπει να ισχύει $\kappa_0\le\frac{1}{\kappa}p(a+\kappa x_0)-\frac{1}{\kappa}F(a)=p(\frac{a}{\kappa}+x_0)-F(\frac{a}{\kappa})$ για κάθε $a\in D(F),\kappa>0$. Αυτό ισοδυναμεί με $\kappa_0\le p(b+x_0)-F(b)$ για κάθε $b\in D(F)$.

Αν $\kappa<0$, πρέπει να ισχύει $\kappa_0\ge\frac{1}{\kappa}p(a+\kappa x_0)-\frac{1}{\kappa}F(a)=-p(\frac{a}{|\kappa|}-x_0)+F(\frac{a}{|\kappa|})$ για κάθε $a\in D(F),\kappa<0$. Αυτό ισοδυναμεί με $\kappa_0\ge -p(b-x_0)+F(b)$ για κάθε $b\in D(F)$.

Άρα πρέπει το κ_0 να επιλεγεί ώστε $-p(b-x_0)+F(b)\le\kappa_0\le p(b+x_0)-F(b)$ για κάθε $b\in D(F)$.

Αν αποδείξουμε ότι $-p(b_1-x_0)+F(b_1)\le p(b_2+x_0)-F(b_2)$ για κάθε $b_1,b_2\in D(F)$, τότε $\sup\{-p(b_1-x_0)+F(b_1)|b_1\in D(F)\}\le\inf\{p(b_2+x_0)-F(b_2)|b_2\in D(F)\}$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε το κ_0 ως οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα σε αυτά τα sup και inf.

Όμως, το ότι $-p(b_1-x_0)+F(b_1)\le p(b_2+x_0)-F(b_2)$ για κάθε $b_1,b_2\in D(F)$ ισοδυναμεί με $F(b_1)+F(b_2)\le p(b_1-x_0)+p(b_2+x_0)$ για κάθε $b_1,b_2\in D(F)$. Αλλά το τελευταίο ισχύει διότι $F(b_1)+F(b_2)=F(b_1+b_2)\le p(b_1+b_2)=p(b_1-x_0+b_2+x_0)\le p(b_1-x_0)+p(b_2+x_0)$.

Λήμμα 2.2 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{C}$.*
(1) Για κάθε $\mathbf{C}$-γραμμικό συναρτησοειδές $f:X\to\mathbf{C}$ το πραγματικό του μέρος $\Re(f):X\to\mathbf{R}$ είναι $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x)=\Re(f)(x)-i\Re(f)(ix)$ για κάθε $x\in X$.
(2) Για κάθε $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές $h_{\mathbf{R}}:X\to\mathbf{C}$, υπάρχει μοναδικό $\mathbf{C}$-γραμμικό συναρτησοειδές $f:X\to\mathbf{C}$ ώστε να ισχύει $\Re(f)=h_{\mathbf{R}}$ στον X.

Απόδειξη: (1) Εξισώνοντας πραγματικά μέρη στις $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ και $f(\kappa x)=\kappa f(x)$ με $\kappa\in\mathbf{R}$, συμπεραίνουμε ότι το $\Re(f)$ είναι $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές.

Από την $f(x)=\Re(f)(x)+i\Im(f)(x)$ παίρνουμε $i\Re(f)(x)-\Im(f)(x)=if(x)=f(ix)=\Re(f)(ix)+i\Im(f)(ix)$, οπότε $\Im(f)(x)=-\Re(f)(ix)$. Άρα $f(x)=\Re(f)(x)-i\Re(f)(ix)$ για κάθε $x\in X$.
(2) Ορίζουμε $f:X\to\mathbf{C}$ με τύπο $f(x)=h_{\mathbf{R}}(x)-ih_{\mathbf{R}}(ix)$ για κάθε $x\in X$. Για κάθε $x,y\in X$ έχουμε $f(x+y)=h_{\mathbf{R}}(x+y)-ih_{\mathbf{R}}(ix+iy)=h_{\mathbf{R}}(x)+h_{\mathbf{R}}(y)-ih_{\mathbf{R}}(ix)-ih_{\mathbf{R}}(iy)=f(x)+f(y)$. Επίσης, αν $\kappa=\mu+i\nu\in\mathbf{C}$, τότε $f(\kappa x)=f(\mu x+i\nu x)=f(\mu x)+f(i\nu x)=h_{\mathbf{R}}(\mu x)-ih_{\mathbf{R}}(i\mu x)+h_{\mathbf{R}}(i\nu x)-ih_{\mathbf{R}}(-\nu x)=\mu h_{\mathbf{R}}(x)-i\mu h_{\mathbf{R}}(ix)+\nu h_{\mathbf{R}}(ix)+i\nu h_{\mathbf{R}}(x)=\mu f(x)+i\nu f(x)=\kappa f(x)$. Άρα το f είναι $\mathbf{C}$-γραμμικό συναρτησοειδές και, προφανώς, $\Re(f)=h_{\mathbf{R}}$.

Αν $\Re(f_1)=\Re(f_2)$ για δύο $\mathbf{C}$-γραμμικά συναρτησοειδή f_1,f_2, τότε $f_1(x)=\Re(f_1)(x)-i\Re(f_1)(ix)=\Re(f_2)(x)-i\Re(f_2)(ix)=f_2(x)$ για κάθε $x\in X$, οπότε $f_1=f_2$.

Θεώρημα 2.2 *(Bohnenblust-Sobczyk) Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{C}$, ημινόρμα p στον X, γραμμικός υπόχωρος Y του X και γραμ-*

μικό συναρτησοειδές $f \in Y'$. Αν υποθέσουμε ότι $|f(y)| \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F \in X'$ ώστε
(1) $F(y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$,
(2) $|F(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Άσκηση: Ο X μπορεί να θεωρηθεί γραμμικός χώρος και επί του $\mathbf{R}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, το $\Re(f) : Y \to \mathbf{R}$ είναι $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές του Y και $f(y) = \Re(f)(y) - i\Re(f)(iy)$ για κάθε $y \in Y$.

Επίσης, βλέπουμε ότι $\Re(f)(y) \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$.

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα, βλέπουμε ότι υπάρχει $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές $g : X \to \mathbf{R}$ ώστε $g(y) = \Re(f)(y)$ για κάθε $y \in Y$ και $g(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Σύμφωνα, πάλι, με το Λήμμα 2.2, υπάρχει $\mathbf{C}$-γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbf{C}$ ώστε $\Re(F) = g$ και για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $F(y) = g(y) - ig(iy) = \Re(f)(y) - i\Re(f)(iy) = f(y)$, οπότε το F είναι επέκταση του f.

Τέλος, για κάθε $x \in X$ θεωρούμε $\kappa \in \mathbf{C}$ με $|\kappa| = 1$ ώστε $|F(x)| = \kappa F(x)$. Οπότε έχουμε $|F(x)| = F(\kappa x) = \Re(F)(\kappa x) = g(\kappa x) \leq p(\kappa x) = |\kappa| p(x) = p(x)$ για κάθε $x \in X$.

2.2 Η γεωμετρική μορφή

Ορισμός 2.3 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και A κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in A$.*
*(1) Λέμε ότι **το A απορροφά τον** X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $x \in rA$ (, οπότε $[0, x] \subseteq rA$, αφού το A είναι κυρτό).*
*(2) Λέμε ότι το A είναι **ισορροπημένο** αν $\kappa a \in A$ για κάθε $a \in A$ και $\kappa \in F$ με $|\kappa| \leq 1$.*

Αν το κυρτό A που περιέχει το 0 απορροφά τον X και $x \in X$ και πάρουμε οποιοδήποτε $r > 0$ ώστε να ισχύει $x \in rA$, τότε $x \in sA$ για κάθε $s > r$. Πράγματι, επειδή $[0, x] \subseteq rA$, το σημείο $\frac{r}{s}x$ ανήκει στο rA, οπότε $x \in \frac{s}{r}rA = sA$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το σύνολο $\{r > 0 | x \in rA\}$ είναι ημιευθεία του $\mathbf{R}^+$.

Ορισμός 2.4 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και A κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in A$ το οποίο απορροφά τον X. Ορίζουμε το **συναρτησοειδές-Minkowski του** A, $p_A : X \to \mathbf{R}_0^+$, με τύπο*

$$p_A(x) = \inf\{r > 0 | x \in rA\}$$

για κάθε $x \in X$.

Σύμφωνα με την παρατήρηση πριν από τον ορισμό, $x \in rA$ για κάθε $r > p_A(x)$. Επίσης, είναι προφανές ότι, αν $0 < r < p_A(x)$, τότε $x \notin rA$.

Πρόταση 2.1 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και A κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in A$ το οποίο απορροφά τον X. Αν p_A είναι το συναρτησοειδές-Minkowski του A, τότε*

(1) το p_A είναι θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό,
(2) αν το A είναι και ισορροπημένο, το p_A είναι ημινόρμα,
(3) $\{x \in X | p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X | p_A(x) \leq 1\}$.

Απόδειξη: (1) Αν $t > 0$, $p_A(tx) = \inf\{r > 0 | tx \in rA\} = \inf\{r > 0 | x \in \frac{r}{t} A\} = \inf\{ts > 0 | x \in sA\} = t \inf\{s > 0 | x \in sA\} = t p_A(x)$.

Αν $x \in rA$ και $y \in sA$ για οποιαδήποτε $r, s > 0$, τότε, επειδή το A είναι κυρτό, $\frac{1}{r+s}(x+y) = \frac{r}{r+s}\frac{1}{r}x + \frac{s}{r+s}\frac{1}{s}y \in A$. Άρα $x+y \in (r+s)A$ και, επομένως, $p_A(x+y) \leq r+s$. Αυτό ισχύει για κάθε $r > p_A(x)$ και κάθε $s > p_A(y)$, οπότε $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.
(2) Αν $\kappa \neq 0$, $p_A(\kappa x) = \inf\{r > 0 | \kappa x \in rA\} = \inf\{r > 0 | \frac{\kappa}{|\kappa|}\frac{|\kappa|}{r} x \in A\} = \inf\{r > 0 | \frac{|\kappa|}{r} x \in A\} = \inf\{r > 0 | x \in \frac{r}{|\kappa|} A\} = |\kappa| \inf\{s > 0 | x \in sA\} = |\kappa| p_A(x)$.
(3) Αν $p_A(x) < 1$, τότε $x \in 1A = A$. Αν $x \in A = 1A$, τότε $p_A(x) \leq 1$.

Η επόμενη πρόταση είναι στην αντίστροφη κατεύθυνση.

Πρόταση 2.2 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και $p : X \to \mathbf{R}$ ένα θετικά-ομογενές και υποπροσθετικό συναρτησοειδές.*
(1) Τα σύνολα $B = \{x \in X | p(x) < 1\}$ και $C = \{x \in X | p(x) \leq 1\}$ είναι κυρτά, περιέχουν το 0, και απορροφούν τον X.
(2) Αν το p είναι ημινόρμα, τα B, C είναι και ισορροπημένα.
(3) Για κάθε κυρτό σύνολο A με $B \subseteq A \subseteq C$, ισχύει ότι $p_A = \max(p, 0)$. Ειδικώτερα, αν το p είναι ημινόρμα, τότε $p_A = p$.

Απόδειξη: (1) Αν $x, y \in B$ και $0 \leq t \leq 1$, $p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y) = tp(x) + (1-t)p(y) < t + (1-t) = 1$, οπότε $tx + (1-t)y \in B$ και το B είναι κυρτό. Ομοίως αποδεικνύεται ότι το C είναι κυρτό. $0 \in B$ διότι $p(0) = 0$.

Έστω $x \in X$. Παίρνοντας οποιοδήποτε $r > \max(p(x), 0)$, έχουμε $p(\frac{1}{r}x) = \frac{1}{r}p(x) < 1$. Επομένως, $\frac{1}{r}x \in B$ ή $x \in rB$. Άρα το B και, επομένως, το C απορροφούν τον X.
(2) Άσκηση.
(3) Το A απορροφά τον X, αφού το B απορροφά τον X. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\{x \in X | p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X | p_A(x) \leq 1\}$ και, επομένως, $p(x) \leq 1$ για κάθε x με $p_A(x) < 1$ και $p_A(x) \leq 1$ για κάθε x με $p(x) < 1$. Για κάθε $\lambda > \max(p(x), 0)$, $p(\frac{1}{\lambda}x) < 1$, οπότε $p_A(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1$ και, επομένως, $p_A(x) \leq \lambda$. Άρα $p_A(x) \leq \max(p(x), 0)$. Ομοίως, για κάθε $\lambda > p_A(x) (\geq 0)$, $p_A(\frac{1}{\lambda}x) < 1$, οπότε $p(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1$ και, επομένως, $p(x) \leq \lambda$. Άρα $p(x) \leq p_A(x)$. Από αυτά συνεπάγεται ότι $p_A(x) = \max(p(x), 0)$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 2.5 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, κυρτό $A \subseteq X$ και $a \in A$. Λέμε ότι **το A απορροφά τον X με κέντρο το** a αν το (κυρτό) $A - a$ απορροφά τον X.*

Η ιδιότητα αυτή μένει αμετάβλητη από μεταφορές και ομοιοθεσίες. Δηλαδή, αν το A απορροφά τον X με κέντρο το $a \in A$, τότε για κάθε $b \in X$ και κάθε $\kappa \in F$ το $A + b$ απορροφά τον X με κέντρο το $a + b$ και το κA απορροφά τον X με κέντρο το κa.

Θεώρημα 2.3 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{R}$ και κυρτό $A \subseteq X$ το οποίο απορροφά τον X με κέντρο κάθε σημείο του. Αν $b \notin A$, τότε υπάρχει υπερεπίπεδο του X το οποίο περιέχει το b ώστε το A να περιέχεται σε έναν από τους δύο ανοικτούς ημιχώρους που ορίζονται από το υπερεπίπεδο αυτό. Ισοδύναμα, το A είναι ίσο με την τομή όλων των ανοικτών ημιχώρων που το περιέχουν.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε, κατ΄ αρχήν, ότι το A περιέχει το 0 οπότε ορίζεται το συναρτησοειδές-Minkowski , p_A, του A. Από την Πρόταση 2.1, $p_A(a) \leq 1$ για κάθε $a \in A$. Αν πάρουμε τυχόν $a \in A$, επειδή το $A - a$ απορροφά τον X, υπάρχει $r > 0$ ώστε $a \in r(A - a)$, οπότε $\frac{1+r}{r} a \in A$. Τότε $p_A(\frac{1+r}{r} a) \leq 1$ και, επομένως, $p_A(a) \leq \frac{r}{1+r} < 1$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $p_A(a) < 1$ για κάθε $a \in A$.

Θεωρούμε το γραμμικό υπόχωρο $Y = \{\kappa b | \kappa \in \mathbf{R}\}$ του X και ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : Y \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(\kappa b) = \kappa$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{R}$.

Αν $\kappa \leq 0$, τότε $f(\kappa b) = \kappa \leq 0 \leq p_A(\kappa b)$. Αν $\kappa > 0$, τότε $f(\kappa b) = \kappa \leq \kappa p_A(b) = p_A(\kappa b)$, αφού $b \notin A$. Άρα $f(y) \leq p_A(y)$ για κάθε $y \in Y$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbf{R}$ το οποίο είναι επέκταση του f ώστε $F(x) \leq p_A(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε, $F(b) = f(b) = 1$ και $F(a) \leq p_A(a) < 1$ για κάθε $a \in A$. Το υπερεπίπεδο $L = \{x \in X | F(x) = 1\}$ περιέχει το b και το A περιέχεται στον ανοικτό ημιχώρο $\{x \in X | F(x) < 1\}$.

Αν το A δεν περιέχει το 0, θεωρούμε τυχόν $a_0 \in A$ και το κυρτό $A_0 = A - a_0$ το οποίο περιέχει το 0. Προφανώς, το A_0 απορροφά τον X με κέντρο κάθε σημείο του και το $b_0 = b - a_0$ δεν ανήκει στο A_0. Με βάση όσα αποδείξαμε, υπάρχει υπερεπίπεδο L_0 το οποίο περιέχει το b_0 ώστε το A_0 να περιέχεται σε έναν από τους δύο ανοικτούς ημιχώρους του L_0. Τότε το b περιέχεται στο υπερεπίπεδο $L = L + a_0$ και το A περιέχεται σε έναν από τους δύο ημιχώρους του L.

Θεώρημα 2.4 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{R}$ και κυρτό $A \subseteq X$ το οποίο απορροφά τον X με κέντρο κάποιο σημείο του. Για κάθε $b \notin A$ υπάρχει υπερεπίπεδο του X το οποίο περιέχει το b ώστε το A να περιέχεται σε έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους που ορίζονται από το υπερεπίπεδο αυτό. Ισοδύναμα, το A ισούται με την τομή όλων των κλειστών ημιχώρων που το περιέχουν.*

Απόδειξη: Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, χωρίς να χρειαστεί να αποδείξουμε ότι $p_A(a) < 1$ για κάθε $a \in A$. Αρκεί το ότι $p_A(a) \leq 1$ για κάθε $a \in A$. Κατ΄ αρχήν θα υποθέσουμε ότι το A απορροφά τον X με κεντρο το 0 και, κατόπιν, αν δεν ισχύει αυτό, θα θεωρήσουμε το $A_0 = A - a_0$ αν το A απορροφά τον X με κέντρο το $a_0 \in A$.

Θεώρημα 2.5 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{R}$, κυρτά $A, B \subseteq X$ ξένα μεταξύ τους και έστω ότι το A απορροφά τον X με κέντρο κάποιο (ή κάθε) σημείο του. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο του X ώστε το A να περιέχεται σε έναν από τους δύο κλειστούς (αντιστοίχως, ανοικτούς) ημιχώρους που ορίζονται από το υπερεπίπεδο αυτό και το B να περιέχεται στον άλλο κλειστό ημιχώρο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το $C = A - B$. Το C είναι κυρτό και δεν περιέχει το 0. Επίσης, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το C απορροφά τον X με κέντρο κάποιο (ή κάθε) σημείο του. Πράγματι, αν το A απορροφά τον X με κέντρο το $a_0 \in A$ και αν $b_0 \in B$, τότε, προφανώς, το $A - b_0$ απορροφά τον X με κέντρο το $a_0 - b_0$. Επομένως και το $A - B$, που περιέχει το $A - b_0$, απορροφά τον X με κέντρο το $a_0 - b_0$.

Βάσει των δύο προηγουμένων θεωρημάτων, υπάρχει υπερεπίπεδο το οποίο περιέχει το 0 (δηλαδή γραμμικός υπόχωρος συνδιάστασης 1) ώστε το C να περιέχεται σε έναν από τους δύο κλειστούς (αντιστοίχως, ανοικτούς) ημιχώρους του υπερεπιπέδου. Δηλαδή, υπάρχει (μη-μηδενικό) γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbf{R}$ ώστε $f(c) \leq 0$ (αντιστοίχως, $f(c) < 0$) για κάθε $c \in C$. Ισοδύναμα, $f(a - b) \leq 0$, δηλαδή $f(a) \leq f(b)$, (αντιστοίχως, $f(a) < f(b)$) για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Τότε $\sup\{f(a)|a \in A\} \leq \inf\{f(b)|b \in B\}$, οπότε, αν πάρουμε οποιοδήποτε $\kappa \in \mathbf{R}$ ανάμεσα στο sup και στο inf, τότε $A \subseteq \{x \in X|f(x) \leq \kappa\}$ και $B \subseteq \{x \in X|f(x) \geq \kappa\}$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν το A απορροφά τον X με κέντρο το a, τότε $f(a) < \kappa$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $f(a) = \kappa$ και παίρνουμε ένα $c \in X$ με $f(c) > \kappa$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι $f(a+t(c-a)) > \kappa$, οπότε $a+t(c-a) \notin A$ και, επομένως, το $A - a$ δεν απορροφά τον X.

Άρα, αν το A απορροφά τον X με κέντρο κάθε σημείο του, τότε $A \subseteq \{x \in X|f(x) < \kappa\}$

Το ζητούμενο υπερεπίπεδο είναι το $L = \{x \in X|f(x) = 0\}$, αν $\kappa = 0$, ή το $L = \{x \in X|(\frac{1}{\kappa}f)(x) = 1\}$, αν $\kappa \neq 0$.

2.3 Ασκήσεις

1. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F, A κυρτό υποσύνολο του X και υπερεπίπεδο L του X. Αποδείξτε ότι το A περιέχεται σε έναν από τους δύο ανοικτούς ημιχώρους του L αν και μόνον αν $A \cap L = \emptyset$.

2. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F, γραμμικός υπόχωρος $Y \neq \{0\}$ του X, Z γραμμικός υπόχωρος του X συνδιάστασης 1 και $L = a + Z$ οποιοδήποτε υπερεπίπεδο παράλληλο του Z. Αποδείξτε ότι ο Y περιέχεται στον έναν από τους δύο κλειστούς υπόχωρους του L αν και μόνον αν $Y \subseteq Z$.

3. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F, γραμμικός υπόχωρος Y του X και A κυρτό υποσύνολο του X το οποίο απορροφά τον X με κέντρο κάποιο σημείο του. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπερεπίπεδο L του X ώστε $Y \subseteq L$ και το A να περιέχεται σε έναν από τους δύο κλειστούς υπόχωρους του L.

4. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F, κυρτά $A, B \subseteq X$ ξένα μεταξύ τους όπου το A απορροφά τον X με κέντρο κάθε σημείο του. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπερεπίπεδο L του X ώστε το A να περιέχεται στον έναν από τους δύο ανοικτούς ημιχώρους του L και το B να περιέχεται στον άλλο κλειστό ημιχώρο του L.

5. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F, κυρτό $A \subseteq X$ το οποίο απορροφά τον

X και p_A το συναρτησοειδές-Minkowski του A.
(1) Αποδείξτε ότι $p_A(x) < 1$ αν και μόνον αν το A απορροφά τον X με κέντρο το x.
(2) Αποδείξτε ότι $p_A(x) = 1$ αν και μόνον αν $tx \in A$ για κάθε $t \in [0, 1)$ και $tx \notin A$ για κάθε $t \in (1, +\infty)$.

6. Έστω X γραμμικός χώρος επί του F.
(1) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $p \mapsto B = \{x \in X | p(x) < 1\}$ είναι 1-1 και επί από το σύνολο όλων των μη-αρνητικών θετικά-ομογενών και υποπροσθετικών συναρτησοειδών p στο σύνολο όλων των κυρτών συνόλων B που απορροφούν τον X με κέντρο κάθε σημείο τους.
(2) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $p \mapsto B = \{x \in X | p(x) < 1\}$ είναι 1-1 και επί από το σύνολο όλων των ημινορμών p στο σύνολο όλων των κυρτών και ισορροπημένων συνόλων B που απορροφούν τον X με κέντρο κάθε σημείο τους.

Κεφάλαιο 3

Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι

3.1 Χώροι με νόρμα

3.1.1 Νόρμες

Ορισμός 3.1 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F. Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to$ $\mathbf{R}_0^+$ ονομάζεται **νόρμα στον** X αν*
(i) $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$
(ii) $\|\kappa x\| = |\kappa| \, \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $\kappa \in F$
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Παρατηρήστε ότι μία ημινόρμα είναι νόρμα αν και μόνον αν μηδενίζεται μόνον στο $0 \in X$.

Ορισμός 3.2 *Μία νόρμα στον X ορίζει μετρική στον X με τον τύπο $d(x, y) =$ $\|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$. Λέμε ότι η συγκεκριμένη μετρική **επάγεται από τη νόρμα**.*

Πράγματι, $d(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $\|x - y\| = 0$ αν και μόνον αν $x - y = 0$ αν και μόνον αν $x = y$. Επίσης, $d(y, x) = \|y - x\| = \|x - y\| = d(x, y)$ και $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

Η μετρική η οποία επάγεται από μία νόρμα επάγει, με τη σειρά της, μία τοπολογία στον γραμμικό χώρο X και, επομένως, ορίζονται ανοικτά, κλειστά, πλήρη και συμπαγή υποσύνολα του X, συγκλίνουσες ακολουθίες στον X και συνεχείς συναρτήσεις. Ειδικώτερα, οι μπάλες έχουν τη μορφή

$$B(x; r) = \{y \in X | \, \|y - x\| < r\}.$$

Πρόταση 3.1 *Σε κάθε χώρο X με νόρμα ισχύει*
(1) $B(a + x; r) = a + B(x; r)$ για κάθε $a, x \in X$ και κάθε $r \in \mathbf{R}^+$,
(2) $B(\kappa x; |\kappa| r) = \kappa B(x; r)$ για κάθε $x \in X$, κάθε $r \in \mathbf{R}^+$ και κάθε $\kappa \in F \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 3.2 *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε οι πράξεις*

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto x+y \in X \qquad \text{και} \qquad F \times X \ni (\kappa,x) \mapsto \kappa x \in X$$

είναι συνεχείς (όταν τα καρτεσιανά γινόμενα εφοδιαστούν με τις αντίστοιχες τοπολογίες-γινόμενο).

Απόδειξη: (1) Έστω ανοικτό $O \subseteq X$ με $x+y \in O$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x+y;r) \subseteq O$. Τότε το ανοικτό $B(x;\frac{1}{2}r) \times B(y;\frac{1}{2}r) \subseteq X \times X$ περιέχει το (x,y) και η πρόσθεση το απεικονίζει μέσα στο $B(x+y;r)$ και, επομένως, μέσα στο O. Άρα η πρόσθεση είναι συνεχής στο τυχόν $(x,y) \in X \times X$.
(2) Έστω ανοικτό $O \subseteq X$ με $\kappa x \in O$. Δηλαδή υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(\kappa x;r) \subseteq O$. Παίρνουμε $t = \min(1, \frac{r}{3\|x\|})$ και $s = \min(1, \frac{r}{3|\kappa|})$ και αποδεικνύουμε εύκολα ότι το ανοικτό $\{\lambda \in F|\, |\lambda - \kappa| < t\} \times B(x;s)$ περιέχει το (κ,x) και ο πολλαπλασιασμός το απεικονίζει μέσα στο $B(\kappa x;r)$ και, επομένως, μέσα στο O. Άρα ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής στο τυχόν $(\kappa,x) \in F \times X$.

Πρόταση 3.3 *Έστω X χώρος με νόρμα. Κάθε μεταφορά και κάθε ομοιοθεσία στον X είναι ομοιομορφισμός του X με τον εαυτό του.*

Απόδειξη: (1) Έστω $b \in X$ και $T_b : X \to X$ η μεταφορά με τύπο $T_b(x) = b+x$ για κάθε $x \in X$. Έστω ανοικτό $O \subseteq X$ με $b+x \in O$. Άρα υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(b+x;r) \subseteq O$. Τότε $T_b(B(x;r)) = b + B(x;r) = B(b+x;r) \subseteq O$ και, επομένως, η T_b είναι συνεχής στο x. Άρα η T_b είναι συνεχής στον X και, επειδή $T_b^{-1} = T_{-b}$, η T_b^{-1} είναι και αυτή συνεχής στον X.
(2) Έστω $\kappa \in F \setminus \{0\}$ και $H_\kappa : X \to X$ η ομοιοθεσία με τύπο $H_\kappa(x) = \kappa x$ για κάθε $x \in X$. Αν O είναι τυχόν ανοικτό υποσύνολο του X με $\kappa x \in O$, υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(\kappa x;r) \subseteq O$. Τότε $H_\kappa(B(x;\frac{1}{|\kappa|}r)) = B(\kappa x;r) \subseteq O$ και, επομένως, η H_κ είναι συνεχής στο x. Άρα η H_κ είναι συνεχής στον X και, επομένως η $H_\kappa^{-1} = H_{\kappa^{-1}}$ είναι συνεχής στον X.

Επομένως, για κάθε O ανοικτό στον X το $b+O$ και το κO είναι ανοικτά στον X για κάθε $b \in X$ και $\kappa \in F \setminus \{0\}$.

Πρόταση 3.4 *Έστω X χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε η $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_0^+$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της ανισότητας $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$ για κάθε $x,y \in X$.

Ορισμός 3.3 *Δύο νόρμες στο γραμμικό χώρο X ονομάζονται* ***ισοδύναμες*** *αν ορίζουν την ίδια τοπολογία στον X.*

Πρόταση 3.5 *Έστω γραμμικός χώρος X. Οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ στον X είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν υπάρχουν $c, C \in \mathbf{R}^+$ ώστε $c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $c, C \in \mathbf{R}^+$ ώστε $c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$. Παίρνουμε τυχόν $O \subseteq X$ ανοικτό ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$. Άρα υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$

ώστε $\{y \in X | \left\|y-x\right\|_1 < r\} \subseteq O$. Τότε $\{y \in X | \left\|y-x\right\|_2 < cr\} \subseteq \{y \in X | \left\|y-x\right\|_1 < r\} \subseteq O$ και, επομένως, το O είναι ανοικτό ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι κάθε O ανοικτό ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ είναι ανοικτό ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$.

Αντιστρόφως, έστω ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες. Το $\{x \in X | \left\|x\right\|_1 < 1\}$ είναι ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την $\|\cdot\|_1$, οπότε είναι ανοικτή περιοχή του 0 και ως προς την $\|\cdot\|_2$. Άρα υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $\{x \in X | \left\|x\right\|_2 < r\} \subseteq \{x \in X | \left\|x\right\|_1 < 1\}$. Παίρνουμε τυχόντα $x \in X \setminus \{0\}$ και $t > 1$ και παρατηρούμε ότι $\left\|\frac{r}{t\|x\|_2} x\right\|_2 = \frac{r}{t} < r$. Άρα $\left\|\frac{r}{t\|x\|_2} x\right\|_1 < 1$, οπότε $\left\|x\right\|_1 < \frac{t}{r} \left\|x\right\|_2$. Επομένως, $\left\|x\right\|_1 \leq \frac{1}{r} \left\|x\right\|_2$ για κάθε $x \in X \setminus \{0\}$. Η ανισότητα αυτή ισχύει, προφανώς, και για $x = 0$. Άρα αποδείχθηκε η $c \left\|x\right\|_1 \leq \left\|x\right\|_2$ για κάθε $x \in X$ με $c = r$. Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη ανισότητα $\left\|x\right\|_2 \leq C \left\|x\right\|_1$ για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 3.6 *Έστω X χώρος με νόρμα.*
(1) Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε το $cl(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.
(2) Αν το A είναι κυρτό υποσύνολο του X, τότε το $cl(A)$ είναι κυρτό καθώς και το $int(A)$ στην περίπτωση που $int(A) \neq \emptyset$.

Απόδειξη: (1) Έστω $x, y \in cl(Y)$. Παίρνουμε τυχόν $r \in \mathbf{R}^+$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in Y \cap B(x; \frac{r}{2})$ και $y_1 \in Y \cap B(y; \frac{r}{2})$. Επειδή ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος, συνεπάγεται ότι $x_1 + y_1 \in Y \cap B(x + y; r)$. Άρα $x + y \in cl(Y)$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν $x \in cl(Y)$ και $\kappa \in F$, τότε $\kappa x \in Y$.
(2) Έστω $x, y \in cl(A)$ και $0 < t < 1$. Παίρνουμε τυχόν $r \in \mathbf{R}^+$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in A \cap B(x; r)$ και $y_1 \in A \cap B(y; r)$. Επειδή το A είναι κυρτό, συνεπάγεται ότι $tx_1 + (1-t)y_1 \in A \cap B(tx + (1-t)y; r)$. Άρα $tx + (1-t)y \in cl(A)$ και το $cl(A)$ είναι κυρτό.

Έστω $int(A) \neq \emptyset$. Παίρνουμε $x, y \in int(A)$ και $0 < t < 1$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x; r) \subseteq A$ και $B(y; r) \subseteq A$. Επειδή το A είναι κυρτό, $B(tx + (1-t)y; r) = tB(x; r) + (1-t)B(y; r) \subseteq A$, οπότε $tx + (1-t)y \in int(A)$ και το $int(A)$ είναι κυρτό.

3.1.2 Ισομορφισμοί

Ορισμός 3.4 *Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$ αντιστοίχως. Λέμε ότι **ο X είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον** Y και γράφουμε $X \cong Y$, αν υπάρχει 1-1 και επί γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ ο οποίος είναι συνεχής ώστε και ο $T^{-1} : Y \to X$ να είναι συνεχής. Τότε ο T ονομάζεται **τοπολογικός ισομορφισμός του** X **με τον** Y.*

*Αν για αυτόν τον T ισχύει ότι $\left\|Tx\right\|_Y = \left\|x\right\|_X$ για κάθε $x \in X$, τότε λέμε ότι **ο X είναι ισομετρικά ισομορφικός** ή **ισομετρικός με τον** Y, ο T ονομάζεται **ισομετρία του** X **με τον** Y και γράφουμε $X \stackrel{iso}{=} Y$.*

Πρόταση 3.7 *Για κάθε χώρους με νόρμα X, Y, Z ισχύει ότι $X \cong X$, ότι αν $X \cong Y$ τότε $Y \cong X$ και ότι αν $X \cong Y$ και $Y \cong Z$ τότε $X \cong Z$. Τα ίδια ισχύουν και για τη σχέση $\stackrel{iso}{=}$.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 3.8 *Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$ αντιστοίχως. Ο γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του X με τον Y αν και μόνον αν είναι επί και υπάρχουν $c, C \in \mathbf{R}^+$ ώστε $c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο $T : X \to Y$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Επειδή ο T είναι συνεχής, το $\{x \in X | \|Tx\|_Y < 1\} = T^{-1}(B_Y(0; 1))$ είναι ανοικτή περιοχή του 0 στον X. Άρα υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B_X(0; r) \subseteq \{x \in X | \|Tx\|_Y < 1\}$. Αν $x \in X$ και $x \neq 0$, τότε για κάθε $t > 1$ έχουμε $\left\|\frac{r}{t\|x\|_X} x\right\|_X < r$. Άρα $\left\|T(\frac{r}{t\|x\|_X} x)\right\|_Y < 1$, οπότε $\|Tx\|_Y < \frac{t}{r}\|x\|_X$ και, επομένως, $\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{r}\|x\|_X$. Αυτό, προφανώς, ισχύει και για $x = 0$. Άρα ισχύει η δεξιά ανισότητα με $C = \frac{1}{r}$. Χρησιμοποιώντας ότι ο T^{-1} είναι συνεχής, αποδεικνύουμε με παρόμοιο τρόπο και την αριστερή ανισότητα.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο T είναι επί και υπάρχουν $c, C \in \mathbf{R}^+$ ώστε $c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Από τη δεξιά ανισότητα συνεπάγεται ότι ο T είναι 1-1. Αν $x_m \to x$ στον X, τότε $\|Tx_m - Tx\|_Y = \|T(x_m - x)\|_Y \leq C\|x_m - x\|_X \to 0$, οπότε $Tx_m \to Tx$ στον Y. Άρα ο T είναι συνεχής στον X και από την αριστερή ανισότητα συνεπάγεται με παρόμοιο τρόπο ότι και ο T^{-1} είναι συνεχής στον Y.

Αν οι χώροι με νόρμα X, Y είναι ισομετρικοί μέσω μιας ισομετρίας $T : X \to Y$, τότε θεωρούμε τους δύο αυτούς χώρους ίδιους ταυτίζοντας κάθε $x \in X$ με το αντίστοιχο $y = Tx \in Y$ και κάθε $y \in Y$ με το αντίστοιχο $x = T^{-1}y \in X$.

Αν οι δύο χώροι είναι τοπολογικά ισομορφικοί μέσω του τοπολογικού ισομορφισμού $T : X \to Y$, πάλι θεωρούμε τους δύο αυτούς χώρους ίδιους ταυτίζοντας κάθε $x \in X$ με το αντίστοιχο $y = Tx \in Y$ και κάθε $y \in Y$ με το αντίστοιχο $x = T^{-1}y \in X$.

Ίσως η φύση της ταύτισης αυτής φανεί πιο καθαρά αν παρατηρήσουμε ότι ο T επάγει μία νέα νόρμα στον X με τύπο $\|x\|_T = \|Tx\|_Y$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, η νέα νόρμα του $x \in X$ είναι, απλώς, η νόρμα του σημείου στον Y με το οποίο το x ταυτίζεται. (Επειδή ο T είναι 1-1, είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι η $\|\cdot\|_T$ είναι νόρμα στον X.) Αν ο T είναι ισομετρία, τότε οι δύο νόρμες στον X, η $\|\cdot\|_X$ και η νέα $\|\cdot\|_T$, είναι ίδιες και οι μπάλες που ορίζονται από τη μία είναι ίδιες με τις μπάλες που ορίζονται από την άλλη.

Αν ο T είναι τοπολογικός ισομορφισμός, τότε υπάρχουν $c, C \in \mathbf{R}^+$ ώστε $c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ και, επομένως, $c\|x\|_X \leq \|x\|_T \leq C\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Άρα έχουμε

$$B_T(x; cr) \subseteq B_X(x; r) \subseteq B_T(x; Cr)$$

ανάμεσα στις μπάλες B_X, B_T που ορίζονται στον X από τις νόρμες $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_T$ αντιστοίχως. Δηλαδή, ο T δημιουργεί, κατά κάποιον τρόπο, μία παραμόρφωση στις μπάλες του X.

3.1.3 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Η ανισότητα Hölder. Έστω $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και κάθε $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in F$ ισχύει

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}$$

και

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq (|x_1| + \cdots + |x_n|) \max(|y_1|, \ldots, |y_n|).$$

Απόδειξη: Η δεύτερη ανισότητα είναι προφανής. Για να αποδείξουμε την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε (με μελέτη της παραγώγου) ότι η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q} - t$ για κάθε $t \in \mathbf{R}^+$ έχει ελάχιστη τιμή $f(1) = 0$. Δηλαδή $t \leq \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q}$ για κάθε $t \in \mathbf{R}^+$. Θέτουμε $t = \frac{\alpha}{\beta^{\frac{q}{p}}}$ και βρίσκουμε $\alpha\beta \leq \frac{1}{p} \alpha^p + \frac{1}{q} \beta^q$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, οπότε και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$.

Αν $|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p = |y_1|^q + \cdots + |y_n|^q = 1$, τότε $|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq |x_1||y_1| + \cdots + |x_n||y_n| \leq \frac{1}{p} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p) + \frac{1}{q} (|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q) = 1$.

Αν $|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p, |y_1|^q + \cdots + |y_n|^q \neq 0$, θέτουμε $A = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ και $B = (|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}$ και παρατηρούμε ότι $|\frac{x_1}{A}|^p + \cdots + |\frac{x_n}{A}|^p = |\frac{y_1}{B}|^q + \cdots + |\frac{y_n}{B}|^q = 1$. Επομένως, $|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| = AB|\frac{x_1}{A}\frac{y_1}{B} + \cdots + \frac{x_n}{A}\frac{y_n}{B}| \leq AB$. Άρα αποδείχτηκε και η πρώτη ανισότητα στην περίπτωση που $|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p, |y_1|^q + \cdots + |y_n|^q \neq 0$. Όμως, αν ένα από τα $|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p$,$|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q$ είναι ίσο με 0, η πρώτη ανισότητα είναι προφανής.

Η ανισότητα Minkowski. Έστω $p \geq 1$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και κάθε $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in F$ ισχύει

$$(|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

και

$$\max(|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|) \leq \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) + \max(|y_1|, \ldots, |y_n|).$$

Απόδειξη: Η δεύτερη ανισότητα είναι προφανής καθώς και η πρώτη όταν $p = 1$. Θεωρούμε, επομένως, $p > 1$ και ορίζουμε $q = \frac{p}{p-1}$, οπότε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε γράφουμε $|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p \leq |x_1||x_1 + y_1|^{p-1} + \cdots + |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + |y_1||x_1 + y_1|^{p-1} + \cdots + |y_n||x_n + y_n|^{p-1}$ και, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder, $|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{q}} + (|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} (|x_1 + y_1|^p + \cdots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{q}}$. Απλοποιούμε και καταλήγουμε στην πρώτη ανισότητα.

Επειδή $\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, συνεπάγεται ότι $\lim_{p \to +\infty} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Βάσει αυτής της παρατήρησης, η δεύτερη ανισότητα Minkowski θεωρείται ως η έκφραση της πρώτης ανισότητας στην περίπτωση $p = +\infty$.

Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ο q ονομάζεται **συζυγής** του p. Λόγω συμμετρίας, ο p είναι ο συζυγής του q. Αν, επιπλέον, δεχτούμε $\frac{1}{+\infty} = 0$, τότε οι $1, +\infty$

θεωρούνται αμοιβαία συζυγείς. Με αυτήν την έννοια και βάσει της προηγούμενης παρατήρησης, η δεύτερη ανισότητα Hölder θεωρείται ως η έκφραση της πρώτης ανισότητας στην περίπτωση που $p = 1, q = +\infty$ ή $p = +\infty, q = 1$.

Ορισμός 3.5 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ οποιαδήποτε βάση του X και $1 \leq p \leq +\infty$. Ορίζουμε $\|\cdot\|_p : X \to \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$ με τύπο*

$$\|x\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty, \\ \max(|x_1|, \ldots, |x_n|), & \text{αν } p = +\infty, \end{cases}$$

για κάθε $x \in X$, όπου $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ είναι η (μοναδική) έκφραση του x ως γραμμικός συνδυασμός των $b_1, \ldots, b_n$.

*Βάσει της ανισότητας Minkowski, η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα και ονομάζεται **p-νόρμα του X**.*

Θεώρημα 3.1 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F με $dim(X) < +\infty$. Τότε οποιεσδήποτε δύο νόρμες στον X είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιαδήποτε βάση $\{b_1, \ldots, b_n\}$ του X και θα αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ στον X είναι ισοδύναμη με την 2-νόρμα του X.

Έστω ότι δεν υπάρχει $c > 0$ ώστε $c\|x\|_2 \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Άρα υπάρχει ακολουθία $\{y^{(m)}\}$ ώστε $\frac{\|y^{(m)}\|}{\|y^{(m)}\|_2} \to 0$. Κανονικοποιούμε την ακολουθία, δηλαδή ορίζουμε $x^{(m)} = \frac{1}{\|y^{(m)}\|_2} y^{(m)}$, και έχουμε $\|x^{(m)}\|_2 = 1$ για κάθε m και $\|x^{(m)}\| \to 0$. Αν $x^{(m)} = x_1^{(m)} b_1 + \cdots + x_n^{(m)} b_n$, τότε $|x_1^{(m)}|^2 + \cdots + |x_n^{(m)}|^2 = 1$ για κάθε m. Επειδή κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του F^n είναι συμπαγές (με την ευκλείδια μετρική), υπάρχει υπο-ακολουθία $\{x^{(m_k)}\}$ ώστε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ να ισχύει $x_j^{(m_k)} \to x_j$ για κάποιο $x_j \in F$ με $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1$. Τότε, αν ορίσουμε $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$, έχουμε $\|x\| \leq \|x - x^{(m_k)}\| + \|x^{(m_k)}\| \leq |x_1 - x_1^{(m_k)}| \|b_1\| + \cdots + |x_n - x_n^{(m_k)}| \|b_n\| + \|x^{m_k)}\| \to 0$. Επομένως, $\|x\| = 0$, οπότε $x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n = x = 0$. Αυτό είναι άτοπο διότι τα $x_1, \ldots, x_n$ δεν είναι όλα μηδέν.

Είναι πιο εύκολο να δείξουμε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|x\| \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$. Πράγματι, $\|x\| = \|x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n\| \leq |x_1| \|b_1\| + \cdots + |x_n| \|b_n\| \leq (\|b_1\|^2 + \cdots + \|b_n\|^2)^{\frac{1}{2}} (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$ με $C = (\|b_1\|^2 + \cdots + \|b_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Πρόταση 3.9 *Έστω χώρος X επί του F με νόρμα και $dim(X) < +\infty$. Τότε*
(1) κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές και
(2) ο X είναι πλήρης.

Απόδειξη: (1) Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X, μία βάση $\{b_1, \ldots, b_n\}$ και $\|\cdot\|_2$ η 2-νόρμα του. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν $c, C \in \mathbf{R}^+$ ώστε $c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε $A \subseteq X$ κλειστό και φραγμένο (ως προς την $\|\cdot\|$) και ακολουθία $\{x^{(m)}\}$ στο A. Τότε το A είναι φραγμένο και ως προς την $\|\cdot\|_2$, οπότε, αν $x^{(m)} = x_1^{(m)} b_1 + \cdots + x_n^{(m)} b_n$, υπάρχει K ώστε

$|x_1^{(m)}|^2 + \cdots + |x_n^{(m)}|^2 \leq K$ για κάθε m. Άρα υπάρχει υπο-ακολουθία $\{x^{(m_k)}\}$ ώστε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ να ισχύει $x_j^{(m_k)} \to x_j$ για κάποιο $x_j \in F$. Αν ορίσουμε $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$, έχουμε $\|x - x^{(m_k)}\| \leq |x_1 - x_1^{(m_k)}| \, \|b_1\| + \cdots + |x_n - x_n^{(m_k)}| \, \|b_n\| \to 0$.

Άρα το A είναι συμπαγές (ως προς την $\|\cdot\|$).

(2) Έστω $\{x^{(m)}\}$ με $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| \to 0$. Λόγω της ισοδυναμίας των νορμών του X, συνεπάγεται ότι $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_2 \to 0$. Αν $x^{(m)} = x_1^{(m)} b_1 + \cdots + x_n^{(m)} b_n$, επειδή ο F^n είναι πλήρης (με την ευκλείδια μετρική του), έχουμε ότι υπάρχει $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ ώστε $\|x^{(m)} - x\|_2 \to 0$. Πάλι λόγω της ισοδυναμίας των νορμών του X, συνεπάγεται ότι $\|x^{(m)} - x\| \to 0$.

Πρόταση 3.10 *Έστω χώρος X επί του F με νόρμα και γραμμικός υπόχωρος Y του X με $dim(Y) < +\infty$. Τότε ο Y είναι κλειστός (ως υποσύνολο του X).*

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της νόρμας του X στον Y, τότε αυτός αποτελεί νόρμα στον Y. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι ο Y είναι πλήρης, οπότε είναι και κλειστό υποσύνολο του X.

3.1.4 Χώροι Banach

Ορισμός 3.6 *Έστω χώρος X με νόρμα. Αν ο X είναι πλήρης τότε ονομάζεται **χώρος Banach**.*

Θεώρημα 3.2 *(Πλήρωση χώρου με νόρμα) Έστω χώρος X επί του F με νόρμα. Τότε υπάρχει χώρος Banach $\widetilde{X}$ ώστε ο X να είναι γραμμικός υπόχωρος του $\widetilde{X}$, η νόρμα του X να είναι ο περιορισμός της νόρμας του $\widetilde{X}$ στον X και ο X να είναι πυκνό υποσύνολο του $\widetilde{X}$.*

Αν $\widehat{X}$ είναι δεύτερος χώρος με τις ίδιες όπως ο $\widetilde{X}$ ιδιότητες, τότε υπάρχει ισομετρία ανάμεσα στους $\widehat{X}, \widetilde{X}$ ώστε ο περιορισμός της στον X να είναι η ταυτοτική απεικόνιση του X.

Απόδειξη: Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X. Τότε ο X είναι μετρικός χώρος με μετρική d με τύπο $d(x, y) = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

Γνωρίζουμε, από το Θεώρημα 1.4, ότι υπάρχει πλήρης μετρικός χώρος $\widetilde{X}$ με μετρική $\widetilde{d}$ ώστε $X \subseteq \widetilde{X}$, η d είναι ο περιορισμός στον X της $\widetilde{d}$ και ο X είναι πυκνός στον $\widetilde{X}$.

Παίρνουμε τυχόντα $x, y \in \widetilde{X}$. Τότε υπάρχουν $\{x_n\}, \{y_n\}$ στον X ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον $\widetilde{X}$. Επειδή οι $\{x_n\}, \{y_n\}$ είναι ακολουθίες Cauchy στον $\widetilde{X}$, συνεπάγεται ότι $\widetilde{d}(x_k + y_k, x_l + y_l) = d(x_k + y_k, x_l + y_l) = \|(x_k + y_k) - (x_l + y_l)\| \leq \|x_k - x_l\| + \|y_k - y_l\| = d(x_k, x_l) + d(y_k, y_l) = \widetilde{d}(x_k, x_l) + \widetilde{d}(y_k, y_l) \to 0$. Άρα η $\{x_n + y_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\widetilde{X}$ και, επομένως, συγκλίνει στον $\widetilde{X}$. Ορίζουμε $x + y = \lim(x_n + y_n) \in \widetilde{X}$. Αν $\{x'_n\}, \{y'_n\}$ είναι επίσης στον X και $x'_n \to x, y'_n \to y$, τότε $\widetilde{d}(x_n + y_n, x'_n + y'_n) = d(x_n + y_n, x'_n + y'_n) = \|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| = d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) = \widetilde{d}(x_n, x'_n) + \widetilde{d}(y_n, y'_n) \to 0$. Άρα $\lim(x_n + y_n) = \lim(x'_n + y'_n)$ και ο ορισμός του

$x + y$ που δώσαμε είναι καλός. Επίσης, αν $x, y \in X$, παίρνουμε τις σταθερές ακολουθίες $\{x\}, \{y\}$ και έχουμε το νέο άθροισμα, $x + y = \lim(x + y) = x + y$, ίσο με το προϋπάρχον άθροισμα. Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε την πράξη της πρόσθεσης στον $\widetilde{X}$, ώστε ο περιορισμός της στον X να ταυτίζεται με την προϋπάρχουσα πράξη της πρόσθεσης στον X.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού στον $\widetilde{X}$ με τα στοιχεία του F, ώστε ο περιορισμός της στον X να ταυτίζεται με την προϋπάρχουσα πράξη του πολλαπλασιασμού στον X. Συνοπτικά, παίρνουμε τυχόντα $x \in \widetilde{X}$ και $\kappa \in F$, ακολουθία $\{x_n\}$ στον X με $x_n \to x$ στον $\widetilde{X}$, αποδεικνύουμε ότι η $\{\kappa x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\widetilde{X}$ και ορίζουμε $\kappa x = \lim(\kappa x_n) \in \widetilde{X}$. Αποδεικνύουμε ότι, αν $\{x'_n\}$ είναι επίσης στον X με $x'_n \to x$ στον $\widetilde{X}$, τότε $\lim(\kappa x_n) = \lim(\kappa x'_n)$, οπότε ο ορισμός του κx είναι καλός και, τέλος, αποδεικνύουμε ότι ο νέος ορισμός του κx ταυτίζεται τον προϋπάρχοντα αν $x \in X$.

Είναι πολύ εύκολο, μέσω ακολουθιών από τον X, να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες γραμμικού χώρου για τις πράξεις που ορίσθηκαν στον $\widetilde{X}$, οπότε ο $\widetilde{X}$ είναι γραμμικός χώρος επί του F και ο X είναι γραμμικός υπόχωρος του $\widetilde{X}$.

Ορίζουμε $\|x\|^{\sim} = \widetilde{d}(x, 0)$ για κάθε $x \in \widetilde{X}$. Αν $x \in X$, τότε $\|x\|^{\sim} = \widetilde{d}(x, 0) = d(x, 0) = \|x\|$. Αν $x, y \in \widetilde{X}$, παίρνουμε $\{x_n\}, \{y_n\}$ στον X ώστε $x_n \to x, y_n \to y$ στον $\widetilde{X}$ και έχουμε $\|\kappa x\|^{\sim} = \widetilde{d}(\kappa x, 0) = \lim \widetilde{d}(\kappa x_n, 0) = \lim d(\kappa x_n, 0) = \lim \|\kappa x_n\| = |\kappa| \lim \|x_n\| = |\kappa| \lim d(x_n, 0) = |\kappa| \lim \widetilde{d}(x_n, 0) = |\kappa| \widetilde{d}(x, 0) = |\kappa|\, \|x\|^{\sim}$. Επίσης, $\|x + y\|^{\sim} = \widetilde{d}(x + y, 0) = \lim \widetilde{d}(x_n + y_n, 0) = \lim d(x_n + y_n, 0) = \lim \|x_n + y_n\| \leq \lim \|x_n\| + \lim \|y_n\| = \lim d(x_n, 0) + \lim d(y_n, 0) = \lim \widetilde{d}(x_n, 0) + \widetilde{d}(y_n, 0) = \widetilde{d}(x, 0) + \widetilde{d}(y, 0) = \|x\|^{\sim} + \|y\|^{\sim}$. Επομένως, η $\|\cdot\|^{\sim}$ αποτελεί νόρμα στον $\widetilde{X}$ ο περιορισμός της οποίας στον X ταυτίζεται με την $\|\cdot\|$.

Με το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου, $\|x - y\|^{\sim} = \widetilde{d}(x - y, 0) = \lim \widetilde{d}(x_n - y_n, 0) = \lim d(x_n - y_n, 0) = \lim \|x_n - y_n\| = \lim d(x_n, y_n) = \lim \widetilde{d}(x_n, y_n) = \widetilde{d}(x, y)$ και, επομένως η μετρική $\widetilde{d}$ επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|^{\sim}$ στον $\widetilde{X}$. Άρα ο $\widetilde{X}$ με τη νόρμα $\|\cdot\|^{\sim}$ είναι χώρος Banach .

Έστω, τώρα, δεύτερος χώρος Banach $\widehat{X}$ με νόρμα $\|\cdot\|^{\wedge}$ ώστε ο X να είναι πυκνός γραμμικός υπόχωρος του $\widehat{X}$ και ο περιορισμός της $\|\cdot\|^{\wedge}$ στον X να ταυτίζεται με την $\|\cdot\|$. Αν $\widehat{d}$ είναι η μετρική που επάγεται στον $\widehat{X}$ από την $\|\cdot\|^{\wedge}$, τότε ο περιορισμός της $\widehat{d}$ στον X ταυτίζεται με την d, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4, υπάρχει ισομετρία *μετρικών χώρων* $T : \widetilde{X} \to \widehat{X}$ ο περιορισμός της οποίας στον X είναι η ταυτοτική απεικόνιση του X. Απομένει να αποδείξουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Αν $x, y \in \widetilde{X}$, παίρνουμε $\{x_n\}, \{y_n\}$ στον X ώστε $x_n \to x, y_n \to y$ στον $\widetilde{X}$ και έχουμε $x_n + y_n \to x + y$ στον $\widetilde{X}$, οπότε $T(x + y) = \lim T(x_n + y_n) = \lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = \lim Tx_n + \lim Ty_n = Tx + Ty$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $T(\kappa x) = \kappa Tx$ για κάθε $x \in X$ και $\kappa \in F$.

Ορισμός 3.7 *Έστω χώρος με νόρμα X. Οποιοσδήποτε χώρος Banach $\widehat{X}$ ο οποίος περιέχει ως γραμμικό υπόχωρο τον X, ώστε η νόρμα του X να είναι ο περιορισμός στον X της νόρμας του $\widehat{X}$ και ο X να είναι πυκνός στον $\widehat{X}$, ονομάζεται* ***πλήρωση του X σε χώρο Banach.***

Στο τελευταίο θεώρημα αποδείχτηκε ότι κάθε χώρος X με νόρμα έχει τουλάχιστον μία πλήρωση σε χώρο Banach και ότι οποιεσδήποτε δύο τέτοιες πληρώσεις είναι ισομετρικοί χώροι Banach (ώστε η ισομετρία, περιορισμένη στον X, να είναι η ταυτοτική απεικόνιση του X). Λόγω της ταύτισης ισομετρικών χώρων αναφερόμαστε, συνήθως, **στην** πλήρωση του X σε χώρο Banach .

3.1.5 Χώροι ακολουθιών

Η ανισότητα Hölder για σειρές. Έστω $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για κάθε $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \in F$ ισχύει

$$|\sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j| \le \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |y_j|^q\big)^{\frac{1}{q}}$$

και

$$|\sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j| \le \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|\big) \sup_j |y_j|.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν οι δεξιές πλευρές είναι πεπερασμένες, τότε οι σειρές των αριστερών πλευρών συγκλίνουν στο F και ισχύουν οι ανισότητες.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder για κάθε n (με τους αριθμούς $|x_1|, |y_1|, \ldots, |x_n|, |y_n|$) και έχουμε $\sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j| \le \big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\big)^{\frac{1}{q}}$ $\le \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |y_j|^q\big)^{\frac{1}{q}}$. Παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$ βρίσκουμε $\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j||y_j| \le \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |y_j|^q\big)^{\frac{1}{q}}$. Αν η δεξιά πλευρά είναι πεπερασμένη, τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j$ συγκλίνει απολύτως. Άρα η σειρά αυτή συγκλίνει, οπότε παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$ στην ανισότητα Hölder $\big|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\big| \le \big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\big)^{\frac{1}{q}}$ καταλήγουμε στην πρώτη ανισότητα.

Η δεύτερη ανισότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Η ανισότητα Minkowski για σειρές. Έστω $p \ge 1$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και κάθε $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \in F$ ισχύει

$$\big(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j + y_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \le \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{j=1}^{+\infty} |y_j|^p\big)^{\frac{1}{p}}$$

και

$$\sup_j |x_j + y_j| \le \sup_j |x_j| + \sup_j |y_j|.$$

Απόδειξη: Η δεύτερη ανισότητα είναι προφανής και η πρώτη προκύπτει αν πάρουμε όριο όταν $n \to +\infty$ στην ανισότητα Minkowski για πεπερασμένα αθροίσματα.

Ορισμός 3.8 *Αν* $1 \leq p \leq +\infty$*, ορίζουμε* $\|\cdot\|_p : l^p \to \mathbf{R}_0^+$ *με τύπο*

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_j |x_j|, & \text{αν } p = +\infty, \end{cases}$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$.

Είναι φανερό από την ανισότητα Minkowski για σειρές ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον l^p.

Θεώρημα 3.3 *Για κάθε* $1 \leq p \leq +\infty$*, ο* l^p *με νόρμα* $\|\cdot\|_p$ *είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Θεωρούμε κατ΄ αρχήν την περίπτωση $1 \leq p < +\infty$. Έστω $\{x^{(m)}\}$ στον l^p ώστε $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p \to 0$. Επειδή $|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p$, συνεπάγεται ότι για κάθε j η $\{x_j^{(m)}\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο F. Άρα υπάρχουν $x_j \in F$ ώστε $x_j^{(m)} \to x_j$ για κάθε j και ορίζουμε $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Παίρνουμε N ώστε $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p < 1$ για κάθε $k, l \geq N$, οπότε για κάθε M και κάθε $k \geq N$ έχουμε $(\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(k)}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(k)} - x_j^{(N)}|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(N)}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j^{(k)} - x_j^{(N)}|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j^{(N)}|^p)^{\frac{1}{p}} < 1 + \|x^{N)}\|_p$. Αν πάρουμε το όριο καθώς $k \to +\infty$ και, κατόπιν, το όριο καθώς $M \to +\infty$ καταλήγουμε στο $(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + \|x^{N)}\|_p < +\infty$. Άρα $x \in l^p$. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και αντίστοιχο N ώστε να ισχύει $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_p < \epsilon$ για κάθε $k, l \geq N$. Τότε για κάθε M και κάθε $k, l \geq N$ έχουμε $(\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(k)} - x_j^{(l)}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$, οπότε, αν πάρουμε το όριο καθώς $l \to +\infty$, βρίσκουμε $(\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(k)} - x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$ για κάθε M και κάθε $k \geq N$. Παίρνοντας το όριο καθώς $M \to +\infty$, καταλήγουμε στο $\|x^{(k)} - x\|_p \leq \epsilon$ για κάθε $k \geq N$. Άρα $x^{(m)} \to x$ στον l^p.

Η περίπτωση $p = +\infty$ είναι παρόμοια και η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση.

Οι γραμμικοί χώροι c και c_0 είναι γραμμικοί υπόχωροι του l^∞ και, επομένως, είναι χώροι με νόρμα τον περιορισμό της $\|\cdot\|_\infty$ στους χώρους αυτούς.

Θεώρημα 3.4 *Οι χώροι* c, c_0 *με νόρμα την* $\|\cdot\|_\infty$ *είναι χώροι Banach.*

Απόδειξη: Επειδή ο l^∞ είναι χώρος Banach, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι c, c_0 είναι κλειστά υποσύνολα του l^∞.

Έστω $\{x^{(m)}\}$ στον c και $x^{(m)} \to x$ στον l^∞. Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε για κάθε $k \geq N$ και κάθε j να ισχύει $|x_j^{(k)} - x_j| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \epsilon$. Επειδή η $\{x_j^{(N)}\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο F, υπάρχει J ώστε $|x_j^{(N)} - x_i^{(N)}| \leq \epsilon$ για κάθε $j, i \geq J$. Τότε $|x_j - x_i| \leq |x_j - x_j^{(N)}| + |x_j^{(N)} - x_i^{(N)}| + |x_i^{(N)} - x_i| \leq 3\epsilon$ για κάθε $j, i \geq J$. Άρα η $x = (x_1, x_2, \ldots)$ είναι ακολουθία Cauchy στο F και, επομένως, είναι στοιχείο του c.

Έστω, τώρα, $\{x^{(m)}\}$ στον c_0 και $x^{(m)} \to x$ στον l^∞. Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε για κάθε $k \geq N$ και κάθε j να ισχύει $|x_j^{(k)} - x_j| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \epsilon$.

Επειδή $x_j^{(N)} \to 0$ όταν $j \to +\infty$, υπάρχει J ώστε $|x_j^{(N)}| \leq \epsilon$ για κάθε $j \geq J$. Οπότε $|x_j| \leq |x_j - x_j^{(N)}| + |x_j^{(N)}| \leq 2\epsilon$ για κάθε $j \geq J$. Άρα $x \in c_0$.

3.1.6 Υπόχωροι

Ορισμός 3.9 *Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Ο περιορισμός στον Y της νόρμας του X είναι, προφανώς, νόρμα στον Y. Ο Y με αυτήν τη νόρμα ονομάζεται* ***υπόχωρος του*** *X.*

Είναι προφανές ότι, αν ο Y είναι υπόχωρος του χώρου με νόρμα X, τότε $B_Y(x;r) = B_X(x;r) \cap Y$, όπου B_Y, B_X είναι οι μπάλες στον Y και στον X αντιστοίχως. Επομένως, η τοπολογία που επάγεται στον Y από τη νόρμα του ταυτίζεται με την τοπολογία-υπόχωρου που επάγεται από τον X στον Y.

Πρόταση 3.11 *Έστω χώρος Banach X και υπόχωρος Y του X. Ο Y είναι χώρος Banach αν και μόνον αν το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Άσκηση.

3.1.7 Χώροι-πηλίκο

Ορισμός 3.10 *Έστω X χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ και Y κλειστός υπόχωρος του X. Ορίζουμε $\|\cdot\|_{X/Y} : X/Y \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο*

$$\|\xi\|_{X/Y} = \inf\{ \|x\| \mid x \in \xi\}$$

για κάθε $\xi \in X/Y$.

Πρόταση 3.12 *Έστω X χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ και Y κλειστός υπόχωρος του X.*
(1) Η $\|\cdot\|_{X/Y} : X/Y \to \mathbf{R}_0^+$ του προηγούμενου ορισμού είναι νόρμα στον X/Y.
(2) Αν ο X είναι χώρος Banach , τότε ο X/Y με τη νόρμα $\|\cdot\|_{X/Y}$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη: (1) Αν $\|\xi\|_{X/Y} = 0$ για κάποιο $\xi \in X/Y$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο ξ ώστε $\|x_n\| \to 0$, οπότε $x_n \to 0$ στον X. Το ξ γράφεται $\xi = b + Y$ για κάποιο $b \in X$ και, επειδή κάθε μεταφορά είναι ομοιομορφισμός του X με τον εαυτό του, συνεπάγεται ότι το ξ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Άρα $0 \in \xi$, οπότε $\xi = Y$, το μηδενικό στοιχείο του X/Y.

Αν $\kappa \in F$, τότε $\|\kappa\xi\|_{X/Y} = \inf\{ \|x\| \mid x \in \kappa\xi\} = \inf\{ \|\kappa y\| \mid y \in \xi\} = |\kappa| \inf\{ \|y\| \mid y \in \xi\} = |\kappa| \, \|\xi\|_{X/Y}$.

Αν $x \in \xi \in X/Y$ και $y \in \eta \in X/Y$, τότε $x + y \in \xi + \eta$, οπότε $\|\xi + \eta\|_{X/Y} \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Άρα $\|\xi + \eta\|_{X/Y} \leq \|\xi\|_{X/Y} + \|\eta\|_{X/Y}$.
(2) Έστω ακολουθία Cauchy $\{\xi_n\}$ στον X/Y. Για κάθε k υπάρχει n_k ώστε $\|\xi_n - \xi_m\|_{X/Y} \leq \frac{1}{2^k}$ για κάθε $n, m \geq n_k$. Είναι εύκολο να επιλέξουμε τα n_k ώστε $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k. Παρατηρούμε, τώρα, ότι $\left\|\xi_{n_k} - \xi_{n_{k+1}}\right\|_{X/Y} \leq \frac{1}{2^k}$ για κάθε k.

Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in \xi_{n_1}$. Επειδή $\|\xi_{n_1} - \xi_{n_2}\|_{X/Y} \leq \frac{1}{2}$, υπάρχει $x_2 \in \xi_{n_2}$ ώστε $\|x_1 - x_2\| \leq 1$. Επειδή $\|\xi_{n_2} - \xi_{n_3}\|_{X/Y} \leq \frac{1}{2^2}$, υπάρχει $x_3 \in \xi_{n_3}$ ώστε $\|x_2 - x_3\| \leq \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{x_k\}$ στον X ώστε $x_k \in \xi_{n_k}$ και $\|x_k - x_{k+1}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ για κάθε k.

Αν $k < l$, τότε $\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x_{k+1}\| + \cdots + \|x_{l-1} - x_l\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l-2}} \leq \frac{1}{2^{k-2}}$ και, επομένως, η $\{x_k\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον X. Άρα $x_k \to x$ για κάποιο $x \in X$.

Παίρνουμε $\xi = [x]_Y$, οπότε $\|\xi_{n_k} - \xi\|_{X/Y} \leq \|x_k - x\| \to 0$. Τέλος, επειδή $n_k \geq k$ για κάθε k, συνεπάγεται $\|\xi_k - \xi\|_{X/Y} \leq \|\xi_k - \xi_{n_k}\|_{X/Y} + \|\xi_{n_k} - \xi\|_{X/Y} \to 0$ όταν $k \to +\infty$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει το φυσιολογικό τρόπο να δημιουργηθεί νόρμα από μία ημινόρμα: ταυτίζουμε τα στοιχεία του χώρου τα οποία μηδενίζει η ημινόρμα.

Πρόταση 3.13 *Έστω γραμμικός χώρος X και μία ημινόρμα p στον X.*
(1) Το $Y = \{y \in X | p(y) = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.
(2) Για κάθε $x, z \in X$ ισχύει ότι $[z]_Y = [x]_Y$ αν και μόνον αν $p(z - x) = 0$.
(3) Η $\|\cdot\|_{X/Y} : X/Y \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο

$$\|\xi\|_{X/Y} = p(x)$$

για κάθε $\xi \in X/Y$, όπου $x \in \xi$, ορίζεται καλώς και είναι νόρμα στον X/Y.
(4) Έστω ότι για κάθε $\{x_n\}$ στον X με $p(x_k - x_l) \to 0$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $p(x_n - x) \to 0$. Τότε ο X/Y είναι χώρος Banach.

Απόδειξη: (1) Άμεσο από τις ιδιότητες της p.
(2) $[z]_Y = [x]_Y$ αν και μόνον αν $z - x \in Y$ αν και μόνον αν $p(z - x) = 0$.
(3) Αν $x, x' \in \xi \in X/Y$, τότε $x - x' \in Y$, οπότε $|p(x) - p(x')| \leq p(x - x') = 0$. Άρα $p(x) = p(x')$ και ο ορισμός της $\|\cdot\|_{X/Y}$ είναι καλός. Το ότι η $\|\cdot\|_{X/Y}$ είναι νόρμα στον X/Y αποδεικνύεται εύκολα από τις ιδιότητες της p.
(4) Έστω $\|\xi_k - \xi_l\|_{X/Y} \to 0$ καθώς $k, l \to +\infty$. Παίρνουμε οποιαδήποτε $x_n \in \xi_n$, οπότε $x_k - x_l \in \xi_k - \xi_l$ και, επομένως, $p(x_k - x_l) = \|\xi_k - \xi_l\|_{X/Y} \to 0$ καθώς $k, l \to +\infty$. Άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $p(x_n - x) \to 0$. Παίρνουμε $\xi = [x]_Y$, οπότε $x_n - x \in \xi_n - \xi$ και, επομένως, $\|\xi_n - \xi\|_{X/Y} = p(x_n - x) \to 0$.

3.1.8 Χώροι συναρτήσεων

Ορισμός 3.11 *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο και $B(A)$ ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων από το A στο F. Ορίζουμε $\|\cdot\|_u : B(A) \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο*

$$\|f\|_u = \sup\{|f(a)|\,|a \in A\}$$

για κάθε $f \in B(A)$. Εύκολα φαίνεται ότι η $\|\cdot\|_u$ είναι νόρμα στον $B(A)$ και ονομάζεται ***ομοιόμορφη νόρμα*** *στον $B(A)$.*

Αν η $\{f_n\}$ και η f είναι στον $B(A)$ και $\|f_n - f\|_u \to 0$, λέμε ότι η $\{f_n\}$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A.***

Θεώρημα 3.5 *Έστω μη-κενό σύνολο A. Ο $B(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω $\{f_n\}$ στον $B(A)$ με $\|f_k - f_l\|_u \to 0$ όταν $k, l \to +\infty$. Για κάθε $a \in A$ ισχύει $|f_k(a) - f_l(a)| \leq \|f_k - f_l\|_u \to 0$, οπότε υπάρχει το $\lim f_n(a) \in F$. Ορίζουμε $f : A \to F$ με τύπο $f(a) = \lim f_n(a)$ για κάθε $a \in A$.

Υπάρχει N ώστε $|f_k(a) - f_l(a)| \leq \|f_k - f_l\|_u \leq 1$ για κάθε $k, l \geq N$ και κάθε $a \in A$. Παίρνοντας όριο όταν $l \to +\infty$, βρίσκουμε $|f_N(a) - f(a)| \leq 1$ για κάθε $a \in A$ και, επομένως, $|f(a)| \leq 1 + |f_N(a)| \leq 1 + \|f_N\|_u$ για κάθε $a \in A$. Άρα $f \in B(A)$.

Ομοίως, υπάρχει N ώστε $|f_k(a) - f_l(a)| \leq \|f_k - f_l\|_u \leq \epsilon$ για κάθε $k, l \geq N$ και κάθε $a \in A$. Παίρνοντας όριο όταν $l \to +\infty$, βρίσκουμε $|f_k(a) - f(a)| \leq \epsilon$ για κάθε $k \geq N$ και κάθε $a \in A$ και, επομένως, $\|f_k - f\|_u \leq \epsilon$ για κάθε $k \geq N$. Άρα $\|f_k - f\|_u \to 0$.

Ορισμός 3.12 *Έστω A ένας τοπολογικός χώρος και $BC(A)$ ο χώρος όλων των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων από το A στο F. Ορίζουμε $\|\cdot\|_u : BC(A) \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο*

$$\|f\|_u = \sup\{|f(a)| \,|a \in A\}$$

για κάθε $f \in BC(A)$. Είναι προφανές ότι η $\|\cdot\|_u$ είναι ο περιορισμός στον $BC(A)$ της ομοιόμορφης νόρμας του $B(A)$ και ονομάζεται ***ομοιόμορφη νόρμα*** *στον $BC(A)$.*

Θεώρημα 3.6 *Έστω A τοπολογικός χώρος. Ο $BC(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $BC(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $B(A)$. Θεωρούμε $\{f_n\}$ στον $BC(A)$ και $f \in B(A)$ ώστε $\|f_n - f\|_u \to 0$. Παίρνουμε $a \in A$ και τυχόν $\epsilon \in \mathbf{R}^+$. Υπάρχει N ώστε $|f_k(b) - f(b)| \leq \|f_k - f\|_u \leq \frac{1}{3}\epsilon$ για κάθε $k \geq N$ και κάθε $b \in A$. Επειδή η f_N είναι συνεχής στο a, υπάρχει ανοικτό O στο A, ώστε $a \in O$ και $|f_N(b) - f_N(a)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ για κάθε $b \in O$. Τότε $|f(b)-f(a)| \leq |f(b)-f_N(b)|+|f_N(b)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)| \leq \frac{1}{3}\epsilon+\frac{1}{3}\epsilon+\frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$ για κάθε $b \in O$. Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε a και, επομένως, στο A.

Η ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα. Έστω $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Για κάθε $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ ισχύει

$$\Big|\int_\Omega fg\Big| \leq \Big(\int_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

και

$$\Big|\int_\Omega fg\Big| \leq \Big(\int_\Omega |f|\Big)\, ess.sup_\Omega |g|.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν οι δεξιές πλευρές είναι πεπερασμένες, τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη και ισχύουν οι ανισότητες.

Απόδειξη: Για τη δεύτερη ανισότητα έχουμε ότι $|f(a)g(a)| \leq |f(a)| ess.sup_\Omega |g|$

για μ-σχεδόν κάθε $a \in A$, οπότε $\int_\Omega |fg| \le \big(\int_\Omega |f|\big) ess.sup_\Omega |g| < +\infty$. Άρα η fg είναι ολοκληρώσιμη και $\big|\int_\Omega fg\big| \le \int_\Omega |fg| \le \big(\int_\Omega |f|\big) ess.sup_\Omega |g|$.

Για την πρώτη ανισότητα υποθέτουμε κατ΄ αρχήν ότι $\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega |g|^q = 1$ και ολοκληρώνουμε την ανισότητα $|f(a)||g(a)| \le \frac{1}{p}|f(a)|^p + \frac{1}{q}|g(a)|^q$, οπότε βρίσκουμε $\int_\Omega |fg| \le \frac{1}{p}\int_\Omega |f|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |g|^q = 1$.

Αν $\int_\Omega |f|^p, \int_\Omega |g|^q \neq 0$, θέτουμε $A = \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}$ και $B = \big(\int_\Omega |g|^q\big)^{\frac{1}{q}}$ και παρατηρούμε ότι $\int_\Omega \big|\frac{f}{A}\big|^p = \int_\Omega \big|\frac{g}{B}\big|^q = 1$. Επομένως, $\int_\Omega |fg| = AB\int_\Omega \big|\frac{f}{A}\frac{g}{B}\big| \le AB$.

Αν ένα από τα $\int_\Omega |f|^p, \int_\Omega |g|^q$ είναι ίσο με 0, η τελευταία ανισότητα είναι προφανής.

Αν η δεξιά πλευρά της πρώτης ανισότητας είναι πεπερασμένη, τότε $\int_\Omega |fg| < +\infty$ και η fg είναι ολοκληρώσιμη. Άρα $\big|\int_\Omega fg\big| \le \int_\Omega |fg| \le \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_\Omega |g|^q\big)^{\frac{1}{q}}$.

Η ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα. *Έστω $p \ge 1$ και (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Για κάθε $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ ισχύει*

$$\Big(\int_\Omega |f+g|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

και

$$ess.sup_\Omega |f+g| \le ess.sup_\Omega |f| + ess.sup_\Omega |g|.$$

Απόδειξη: Γράφουμε $|f(a)+g(a)| \le ess.sup_\Omega |f| + ess.sup_\Omega |g|$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$, οπότε $ess.sup_\Omega |f+g| \le ess.sup_\Omega |f| + ess.sup_\Omega |g|$. Επίσης, η πρώτη ανισότητα είναι προφανής όταν $p = 1$.

Θεωρούμε, επομένως, $p > 1$ και ορίζουμε $q = \frac{p}{p-1}$, οπότε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε γράφουμε $\int_\Omega |f+g|^p \le \int_\Omega |f||f+g|^{p-1} + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1}$ και, βάσει της ανισότητας Hölder, $\int_\Omega |f+g|^p \le \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_\Omega |f+g|^p\big)^{\frac{1}{q}} + \big(\int_\Omega |g|^p\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_\Omega |f+g|^p\big)^{\frac{1}{q}}$. Απλοποιούμε και καταλήγουμε στην πρώτη ανισότητα.

Αν (Ω, Σ, μ) είναι ένας χώρος μέτρου και $p \ge 1$, ορίζουμε $p_p(f) = \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}$ για κάθε $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Επίσης, αν $p = +\infty$, ορίζουμε $p_\infty(f) = ess.sup_\Omega |f|$ για κάθε $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Η ανισότητα Minkowski συνεπάγεται ότι η p_p είναι ημινόρμα στον αντίστοιχο $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Παρατηρούμε ότι $p_p(f) = 0$ αν και μόνον αν $f(a) = 0$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in A$. Αν θέσουμε $Y = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) | p_p(f) = 0\} = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) | f(a) = 0$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega\}$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.13, ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος κάθε χώρου $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Επίσης, αν $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, τότε το στοιχείο $\xi = [f]_Y$ του $\mathcal{L}^p(\Omega)/Y$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$ οι οποίες είναι ίσες με την f μ-σχεδόν παντού στο Ω: $[f]_Y = \{g \in \mathcal{M}(\Omega) | g(a) = f(a)$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega\}$. Βάσει της Πρότασης 3.13, ο επόμενος ορισμός είναι καλός.

Ορισμός 3.13 *Έστω $1 \le p \le +\infty$ και*

$$Y = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) | f(a) = 0 \text{ για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } a \in \Omega\}.$$

Ορίζουμε

$$L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \mathcal{L}^p(\Omega)/Y$$

και

$$\|[f]_Y\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \alpha\nu\ 1 \le p < +\infty, \\ ess.sup_\Omega |f|, & \alpha\nu\ p = +\infty, \end{cases}$$

για κάθε $[f]_Y \in L^p(\Omega)$.

Θεώρημα 3.7 *Η* $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbf{R}_0^+$ *είναι νόρμα στον* $L^p(\Omega)$ *(ονομάζεται* p*-νόρμα) και ο* $L^p(\Omega)$ *με αυτήν τη νόρμα είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Η Πρόταση 3.13 αποδεικνύει ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Επίσης, σύμφωνα με την ίδια πρόταση, για να αποδείξουμε ότι ο $L^p(\Omega)$ είναι χώρος Banach, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν η $\{f_n\}$ είναι στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$ και $p_p(f_k - f_l) \to 0$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ώστε $p_p(f_n - f) \to 0$.

Για κάθε k υπάρχει n_k ώστε $p(f_n - f_m) \le \frac{1}{2^k}$ για κάθε $n, m \ge n_k$. Επειδή, προφανώς, μπορούμε να επιλέξουμε τα n_k ώστε $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k, έχουμε υπο-ακολουθία $\{f_{n_k}\}$ ώστε $p_p(f_{n_k} - f_{n_{k+1}}) \le \frac{1}{2^k}$ για κάθε k.

Κατ΄ αρχήν, έστω $1 \le p < +\infty$.

Ορίζουμε $s_k = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \cdots + |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, οπότε, βάσει της ανισότητας Minkowski, $\left(\int_\Omega s_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |f_{n_1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |f_{n_2} - f_{n_1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(\int_\Omega |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le p_p(f_{n_1}) + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \le p_p(f_{n_1}) + 1$. Η τελευταία ποσότητα δεν εξαρτάται από το k και η $\{s_k^p\}$ είναι αύξουσα ακολουθία στον $\mathcal{L}^1(\Omega)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, για τη συνάρτηση $S = \lim_{k\to+\infty} s_k^p : \Omega \to \mathbf{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ισχύει $\int_\Omega S < +\infty$ και, επομένως, $S(a) < +\infty$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$. Άρα για αυτά τα a η σειρά $f_{n_1} + \sum_{k=2}^{+\infty}(f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Δηλαδή υπάρχει το $\lim_{k\to+\infty}\big(f_{n_1}(a) + (f_{n_2}(a) - f_{n_1}(a)) + \cdots + (f_{n_k}(a) - f_{n_{k-1}}(a))\big) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(a) \in F$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$.

Ορίζουμε $f(a) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(a)$ αν $S(a) < +\infty$ και $f(a) = 0$ αν $S(a) = +\infty$. Είναι φανερό ότι $|f_{n_k}|^p = |f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \cdots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})|^p \le s_k^p \le S$, μ-σχεδόν παντού στο Ω και, επομένως, $|f|^p \le S$, μ-σχεδόν παντού στο Ω. Επειδή $\int_\Omega S < +\infty$, σύμφωνα με το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, $p_p(f_{n_k} - f) = \left(\int_\Omega |f_{n_k} - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$.

Αφού $n_k \ge k$ για κάθε k, καταλήγουμε στο $p_p(f_k - f) \le p_p(f_k - f_{n_k}) + p_p(f_{n_k} - f) \to 0$.

Τέλος, έστω $p = +\infty$.

Παίρνοντας την ένωση αριθμήσιμου πλήθους συνόλων μ-μέτρου μηδέν, βλέπουμε ότι υπάρχει $\Omega' \subseteq \Omega$ με $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$ ώστε $|f_k(a) - f_l(a)| \le ess.sup_\Omega |f_k - f_l|$ για κάθε $a \in \Omega'$ και κάθε k, l. Άρα υπάρχει το όριο $\lim_n f_n(a)$ για κάθε $a \in \Omega'$. Ορίζουμε $f(a) = \lim_n f_n(a)$ για $a \in \Omega'$ και $f(a) = 0$ για $a \in \Omega \setminus \Omega'$.

Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $|f_k(a) - f_l(a)| \le ess.sup_\Omega |f_k - f_l| \le \epsilon$ για κάθε $a \in \Omega'$ και κάθε $k, l \ge N$. Παίρνουμε όριο όταν $l \to +\infty$, οπότε $|f_k(a) - f(a)| \le \epsilon$ για κάθε $a \in \Omega'$ και κάθε $k \ge N$. Άρα $ess.sup_\Omega |f_k - f| \le \epsilon$ για κάθε $k \ge N$ και, επομένως, $ess.sup_\Omega |f_k - f| \to 0$.

Επειδή η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\Omega)$ ενώ η p_p δεν είναι νόρμα στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (εκτός αν το μοναδικό υποσύνολο του Ω με μ-μέτρο μηδέν είναι το κενό), σε όλες τις εφαρμογές των χώρων αυτών χρησιμοποιείται εν γένει ο $L^p(\Omega)$. Επειδή, όμως, το σύμβολο $[f]_Y$ είναι δύσχρηστο, γράφουμε πάντοτε f αντί $[f]_Y$. *Ταυτίζουμε*, δηλαδή, κάθε κλάση ισοδυναμίας με οποιοδήποτε στοιχείο της, έχοντας κατά νου ότι, κατ΄ αυτόν τον τρόπο, οποιαδήποτε f *ταυτίζεται* με οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση η οποία ισούται με την f μ-σχεδόν παντού. Γράφουμε, λοιπόν,

$$\|f\|_p = \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}$$

αντί των τυπικά σωστότερων $\|[f]_Y\|_p = \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}$ και $p_p(f) = \big(\int_\Omega |f|^p\big)^{\frac{1}{p}}$.

Ορισμός 3.14 *Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R^n}$, m το μέτρο Lebesgue, $k \in \mathbf{N}_0$ και $1 \le p < +\infty$. Ορίζουμε*

$$\|f\|_{k,p} = \begin{cases} \big(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha f|^p\,dm\big)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } 1 \le p < +\infty \\ \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha f\|_u, & \text{αν } p = +\infty \end{cases}$$

για κάθε $f \in C^k(U)$.

Επίσης, ορίζουμε $C^{k,p}(U)$ ως τον χώρο όλων των $f \in C^k(U)$ με $\|f\|_{k,p} < +\infty$.

Πρόταση 3.14 *Η $\|\cdot\|_{k,p} : C^{k,p}(U) \to \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$ είναι νόρμα στον $C^{k,p}(U)$.*

Απόδειξη: Αν $1 \le p < +\infty$, $\|f+g\|_{k,p} = \big(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha f + D^\alpha g|^p\,dm\big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{|\alpha|\le k}\big[\big(\int_U |D^\alpha f|^p\,dm\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\int_U |D^\alpha g|^p\,dm\big)^{\frac{1}{p}}\big]^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \big(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha f|^p\,dm\big)^{\frac{1}{p}}$ $+\big(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha g|^p\,dm\big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{k,p} + \|g\|_{k,p}$, όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες Minkowski για αθροίσματα και για ολοκληρώματα. Όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες της νόρμας είναι άμεσες, όπως και η περίπτωση $p = +\infty$.

Ορισμός 3.15 *Έστω τοπολογικός χώρος X και $f : X \to F$ συνεχής στον X. Το $supp(f) = cl(\{x \in X | f(x) \ne 0\})$ ονομάζεται* ***φορέας της*** *f. Αν το $supp(f)$ είναι συμπαγές, τότε λέμε ότι η f* ***έχει συμπαγή φορέα****.*

Είναι εύκολο να δούμε ότι το $X \setminus supp(f)$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του X στο οποίο η f είναι ταυτοτικά μηδέν.

Ορισμός 3.16 $C_c^{k,p}(U) = \{f \in C^{k,p}(U) | \text{η } f \text{ έχει συμπαγή φορέα } \subseteq U\}$.

Λήμμα 3.1 *Έστω τοπολογικός χώρος X, $\kappa \in F$ και $f, g : X \to F$ συνεχείς στον X. Τότε $supp(\kappa f) \subseteq supp(f)$ και $supp(f+g) \subseteq supp(f) \cup supp(g)$.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 3.15 *Ο $C_c^{k,p}(U)$ με τη νόρμα $\|\cdot\|_{k,p}$ είναι υπόχωρος του $C^{k,p}(U)$.*

Απόδειξη: Από το τελευταίο λήμμα είναι φανερό ότι αν οι $f, g \in C^{k,p}(U)$ έχουν τα $supp(f), supp(g)$ συμπαγή υποσύνολα του U, τότε το $supp(\kappa f)$, ως κλειστό υποσύνολο του $supp(f)$, είναι συμπαγές υποσύνολο του U και το $supp(f+g)$, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $supp(f) \cup supp(g)$, είναι συμπαγές υποσύνολο του U. Άρα $\kappa f, f+g \in C_c^{k,p}(U)$.

Κανένας από τους $C^{k,p}(U), C_c^{k,p}(U)$ δεν είναι πλήρης, εκτός από τον $C^{k,\infty}(U)$.

Θεώρημα 3.8 *Ο $C^{k,\infty}(U)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Αν $k = 0$, τότε $C^{0,\infty}(U) = BC(U)$ και γνωρίζουμε ήδη ότι είναι χώρος Banach.

Έστω $k \geq 1$ και ακολουθία Cauchy $\{f_m\}$ στον $C^{k,\infty}(U)$. Δηλαδή $\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f_m - D^\alpha f_l\|_u \to 0$ όταν $m, l \to +\infty$. Άρα για κάθε α με $|\alpha| \leq k$ έχουμε $\|D^\alpha f_m - D^\alpha f_l\|_u \to 0$ όταν $m, l \to +\infty$, οπότε η $\{D^\alpha f_m\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $BC(U)$. Άρα υπάρχει $f_\alpha : U \to F$ συνεχής στο U ώστε $\|D^\alpha f_m - f_\alpha\|_u \to 0$ όταν $m \to +\infty$.

Θεωρούμε $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in U$ και μικρό $h \in \mathbf{R}$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το x και το $x + he_j = (x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n)$ να περιέχεται στο U. Τότε για κάθε m, $f_m(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_m(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = \int_0^h \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n)dt$. Αν $m \to +\infty$, τότε η αριστερή πλευρά συγκλίνει στο $f_{(0,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_{(0,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ ενώ η δεξιά πλευρά συγκλίνει στο $\int_0^h f_{(0,\ldots,1,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n)dt$, όπου το 1 στον τελευταίο πολυδείκτη εμφανίζεται στη j θέση. Άρα $f_{(0,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_{(0,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = \int_0^h f_{(0,\ldots,1,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n)dt$. Επειδή η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνεχής συνάρτηση του t, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού, μπορούμε να παραγωγίσουμε ως προς h στο $h = 0$ και παίρνουμε $\frac{\partial f_{(0,\ldots,0)}}{\partial x_j}(x) = f_{(0,\ldots,1,\ldots,0)}(x)$. Άρα, αν ορίσουμε $f = f_{(0,\ldots,0)}$, τότε $f_{(0,\ldots,1,\ldots,0)} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ στο U.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε επαγωγικά να αποδείξουμε ότι για κάθε α με $|\alpha| \leq k$ ισχύει $f_\alpha = D^\alpha f$ στο U.

Άρα για κάθε α με $|\alpha| \leq k$ ισχύει $\|D^\alpha f_m - D^\alpha f\|_u \to 0$ όταν $m \to +\infty$, οπότε $\|f_m - f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f_m - D^\alpha f\|_u \to 0$ όταν $m \to +\infty$.

Ορισμός 3.17 *$C_o^{k,\infty}(U)$ ορίζεται να είναι η κλειστή θήκη του $C_c^{k,\infty}(U)$ στον $C^{k,\infty}(U)$ και κάθε στοιχείο του λέμε ότι είναι συνάρτηση η οποία είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο U και* ***μηδενίζεται αυτή και όλες οι παράγωγοί της τάξης $\leq k$ στο σύνορο, $\partial(U)$, του U.***

3.1.9 Μερικά θεωρήματα προσέγγισης

Λήμμα 3.2 *Η σειρά $1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}(1-t^2)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-1, 1]$ στη συνάρτηση $|t|$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor, παίρνουμε ότι $\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n$ για κάθε x με $0 \leq x < 1$. Άρα $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n <$

1 για τα ίδια x. Επειδή κάθε όρος είναι μη-αρνητικός, για κάθε N έχουμε $\sum_{k=1}^{N}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n<1$ και, παίρνοντας όριο όταν $x\to 1-$, $\sum_{k=1}^{N}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\leq 1$. Άρα $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\leq 1$ και, επομένως, η σειρά $1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ και ορίζει συνάρτηση συνεχή στο ίδιο διάστημα. Άρα $\sqrt{1-x}=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Απομένει να θέσουμε $x=1-t^2$ με $t\in[-1,1]$.

Θεώρημα 3.9 *(Kakutani-Krein) Έστω συμπαγής τοπολογικός χώρος A και X ένας γραμμικός υπόχωρος του $C(A)=BC(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα και με $F=\mathbf{R}$. Αν ο X έχει τις ιδιότητες:*
(1) η σταθερή συνάρτηση 1 ανήκει στον X,
(2) $|f|\in X$ για κάθε $f\in X$,
(3) για κάθε $a,a'\in A$ με $a\neq a'$ υπάρχει $f\in X$ ώστε $f(a)\neq f(a')$,
τότε $cl(X)=C(A)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχούσα $f\in C(A)$ και έστω $a,a'\in A$ με $a\neq a'$. Τότε υπάρχει $h\in X$ ώστε $h(a)\neq h(a')$. Είναι προφανές ότι, με κατάλληλη επιλογή των $\kappa_1,\kappa_2\in\mathbf{R}$, η $g_{a,a'}=\kappa_1 h+\kappa_2\in X$ έχει την ιδιότητα $g_{a,a'}(a)=f(a)$ και $g_{a,a'}(a')=f(a')$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή $V_{a'}$ του a' ώστε $|g_{a,a'}(b)-f(b)|\leq |g_{a,a'}(b)-g_{a,a'}(a')|+|f(a')-f(b)|<\epsilon$ για κάθε $b\in V_{a'}$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $a'_1,\dots,a'_n\in A$ ώστε $A=V_{a'_1}\cup\dots\cup V_{a'_n}$.

Η (2) συνεπάγεται ότι για κάθε $f_1,f_2\in X$ ισχύει ότι $\max(f_1,f_2)=\frac{1}{2}\left(f_1+f_2+|f_1-f_2|\right)\in X$ και $\min(f_1,f_2)=\frac{1}{2}\left(f_1+f_2-|f_1-f_2|\right)\in X$.

Επομένως, η συνάρτηση $g_a=\max(g_{a,a'_1},\dots,g_{a,a'_n})$ ανήκει στον X και ισχύει ότι $g_a(a)=f(a)$ και $g_a(b)>f(b)-\epsilon$ για κάθε $b\in A$.

Υπάρχει ανοικτή περιοχή U_a του a ώστε $|g_a(b)-f(b)|\leq|g_a(b)-g_a(a)|+|f(a)-f(b)|<\epsilon$ για κάθε $b\in U_a$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $a_1,\dots,a_m\in A$ ώστε $A=V_{a_1}\cup\dots\cup V_{a_m}$. Η συνάρτηση $g=\min(g_{a_1},\dots,g_{a_m})$ ανήκει στον X και ισχύει ότι $f(b)-\epsilon<g(b)<f(b)+\epsilon$ για κάθε $b\in A$.

Άρα η f προσεγγίζεται απεριόριστα με στοιχεία του X και, επομένως, $f\in cl(X)$. Άρα $cl(X)=C(A)$.

Θεώρημα 3.10 *(Stone-Weierstrass) Έστω συμπαγής τοπολογικός χώρος A και X ένας γραμμικός υπόχωρος του $C(A)=BC(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα. Αν ο X έχει τις ιδιότητες:*
(1) $fg\in X$ για κάθε $f,g\in X$,
(2) η σταθερή συνάρτηση 1 ανήκει στον X,
(3) $\overline{f}\in X$ για κάθε $f\in X$,
(4) για κάθε $a,a'\in A$ με $a\neq a'$ υπάρχει $f\in X$ ώστε $f(a)\neq f(a')$,
τότε $cl(X)=C(A)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το χώρο $C_{\mathbf{R}}(A)\subseteq C(A)$ με στοιχεία όλες τις πραγματικές συναρτήσεις στον $C(A)$ καθώς και τον αντίστοιχο $X_{\mathbf{R}}$. Τότε ο $X_{\mathbf{R}}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $C_{\mathbf{R}}(A)$ και έχει, προφανώς, τις ιδιότητες (1) και (2). Αν $a,a'\in A$ με $a\neq a'$ υπάρχει $f\in X$ ώστε $f(a)\neq f(a')$. Τότε οι $\Re f=\frac{1}{2}\left(f+\overline{f}\right)$ και $\Im f=\frac{1}{2i}\left(f-\overline{f}\right)$ ανήκουν στον $X_{\mathbf{R}}$ και είτε $\Re f(a)\neq\Re f(a')$ είτε $\Im f(a)\neq\Im f(a')$.

Άρα ο $X_{\mathbf{R}}$ έχει και την ιδιότητα (4). Είναι εύκολο να δούμε ότι και ο υπόχωρος $cl(X_{\mathbf{R}})$ έχει τις ιδιότητες (1),(2) και (4).

Έστω τυχούσα $f \in cl(X_{\mathbf{R}})$ και $\epsilon > 0$. Παίρνουμε $K > 0$ ώστε $-K \leq f(a) \leq K$ για κάθε $a \in A$ και πραγματικό πολυώνυμο $P(t)$ ώστε $\big||t|-P(t)\big| \leq \frac{\epsilon}{K}$ για κάθε $t \in [-1,1]$. Η ύπαρξη του P εξασφαλίζεται από το προηγούμενο λήμμα. Τότε $\big||\frac{f(a)}{K}| - P(\frac{f(a)}{K})\big| \leq \frac{\epsilon}{K}$ και, επομένως, $\big||f(a)| - KP(\frac{f(a)}{K})\big| \leq \epsilon$ για κάθε $a \in A$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $KP(\frac{f}{K})$ γράφεται $\kappa_0 + \kappa_1 f + \cdots + \kappa_n f^n$, οπότε, λόγω της (1), είναι στοιχείο του $cl(X_{\mathbf{R}})$. Άρα η $|f|$ προσεγγίζεται απεριόριστα από στοιχεία του $cl(X_{\mathbf{R}})$ και, επειδή αυτός είναι κλειστός, $|f| \in cl(X_{\mathbf{R}})$.

Επομένως, ο $cl(X_{\mathbf{R}})$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.9, οπότε $cl(X_{\mathbf{R}}) = C_{\mathbf{R}}(A)$.

Αν $f \in C(A)$, τότε $\Re f, \Im f \in C_{\mathbf{R}}(A)$, οπότε $\Re f, \Im f \in cl(X_{\mathbf{R}})$ και, επομένως, $f \in cl(X)$.

Τα δύο επόμενα αποτελέσματα είναι γνωστές εφαρμογές του Θεωρήματος Stone-Weierstrass.

Θεώρημα 3.11 *(Weierstrass) Αν $A \subseteq \mathbf{R^n}$ είναι συμπαγές, τότε για κάθε συνάρτηση $f : A \to F$ συνεχή στο A και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x_1, \ldots, x_n)$, με συντελεστές από το F, ώστε $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$.*

Απόδειξη: Αν $Y \subseteq C(A)$ είναι ο γραμμικός υπόχωρος των πολυωνύμων P με συντελεστές από το F, τότε ο Y ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος Stone-Weierstrass εκτός από το να είναι κλειστός. Επομένως ο $cl(Y)$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις, οπότε $cl(Y) = C(A)$.

Ορισμός 3.18 *Συναρτήσεις οι οποίες είναι γραμμικοί συνδυασμοί με συντελεστές από το F συναρτήσεων της μορφής $e^{i2\pi(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)}$, όπου $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$, ονομάζονται **εκθετικά πολυώνυμα**.*

Θεώρημα 3.12 *Για κάθε $f : \mathbf{R^n} \to F$, 1-περιοδική ως προς κάθε μεταβλητή και συνεχή στον $\mathbf{R^n}$, και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει εκθετικό πολυώνυμο P ώστε $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbf{R^n}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $T = \{y \in \mathbf{R^2} |\, \|y\|_2 = 1\}$, την περιφέρεια κέντρου 0 και ακτίνας 1 στον $\mathbf{R^2}$, και το σύνολο $Q = T \times \cdots \times T$, με n όρους στο γινόμενο, το οποίο είναι συμπαγές ως υποσύνολο του $\mathbf{R^{2n}}$.

Κάθε $f : \mathbf{R^n} \to F$ η οποία είναι 1-περιοδική ως προς κάθε μεταβλητή και συνεχής στον $\mathbf{R^n}$ ορίζει συνάρτηση $\widetilde{f} : Q \to F$ με τύπο

$$\widetilde{f}(y_1, \ldots, y_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

όπου $y_k = e^{i2\pi x_k}$ για κάθε k με $1 \leq k \leq n$.

Σε κάθε y_k αντιστοιχούν πολλά x_k τα οποία, όμως, ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο αριθμό, οπότε, λόγω 1-περιοδικότητας της f, η τιμή $\widetilde{f}(y_1, \ldots, y_n)$ είναι καλώς ορισμένη. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η $\widetilde{f}$ είναι συνεχής στο Q. Πράγματι, αν τα $(y_1, \ldots, y_n), (y'_1, \ldots, y'_n)$ έχουν μικρή απόσταση, τότε τα αντίστοιχα

$(x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)$ μπορούν να επιλεγούν ώστε να έχουν επίσης μικρή απόσταση, οπότε οι τιμές $f(x_1, \ldots, x_n), f(x'_1, \ldots, x'_n)$ διαφέρουν ελάχιστα.

Αντιστρόφως, κάθε $\widetilde{f} : Q \to F$ συνεχής στο Q ορίζει μία $f : \mathbf{R^n} \to F$ η οποία είναι 1-περιοδική ως προς κάθε μεταβλητή και συνεχής στον $\mathbf{R^n}$ με τύπο

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{f}(e^{i2\pi x_1}, \ldots, e^{i2\pi x_n}).$$

Παίρνουμε, τώρα, 1-περιοδική $f : \mathbf{R^n} \to F$ συνεχή στον $\mathbf{R^n}$ και την αντίστοιχη $\widetilde{f} : Q \to F$ η οποία είναι συνεχής στο συμπαγές $Q \subseteq \mathbf{R^{2n}}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει πολυώνυμο $\widetilde{P}$ ώστε $|\widetilde{f}(y) - \widetilde{P}(y)| \leq \epsilon$ για κάθε $y \in Q$. Τότε η $P : \mathbf{R^n} \to F$ που ορίζεται από την $\widetilde{P}$ είναι εκθετικό πολυώνυμο και $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbf{R^n}$.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα αναφέρονται σε προσέγγιση ως προς την ομοιόμορφη νόρμα. Το επόμενο αναφέρεται σε προσέγγιση ως προς την p-νόρμα.

Θεώρημα 3.13 *Αν $1 \leq p < +\infty$, τότε το σύνολο $\{f \in C(\mathbf{R^n}) | η\ f$ έχει συμπαγή φορέα$\}$ είναι πυκνό στον $L^p(\mathbf{R^n}, \mathcal{B}(\mathbf{R^n}), m)$.*

Απόδειξη: Έστω διαστήματα $I = [a, b]$ και $I' = [a', b']$ με $a < a' < b' < b$. Ορίζουμε τη συνεχή στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $g_{I,I'}$ η οποία είναι ίση με 1 στο I', ίση με 0 έξω από το I και γραμμική στα $[a, a']$ και $[b', b]$. Αν $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ και $P' = [a'_1, b'_1] \times \cdots \times [a'_n, b'_n]$ είναι παραλληλεπίπεδα στον $\mathbf{R^n}$ με $a_j < a'_j < b'_j < b_j$ για κάθε j, θεωρούμε τη συνεχή στο $\mathbf{R^n}$ συνάρτηση $g_{P,P'} = g_{I_1,I'_1} \cdots g_{I_n,I'_n}$ η οποία είναι ίση με 1 στο P', ίση με 0 έξω από το P και ισχύει $0 \leq g_{P,P'} \leq 1$ στο $P \setminus P'$. Αν $m(P \setminus P') \leq \delta$, τότε $\|\chi_P - g_{P,P'}\|_p \leq \delta^{\frac{1}{p}}$.

Θεωρούμε τυχούσα $f \in L^p(\mathbf{R^n}, \mathcal{B}(\mathbf{R^n}), m)$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει απλή συνάρτηση $h = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{A_k}$, όπου $a_k \in F$ και $A_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R^n})$ για κάθε k, ώστε $\|f - h\|_p \leq \frac{1}{3}\,\epsilon$. Για κάθε k υπάρχει σύνολο $B_k = P_{k,1} \cup \cdots \cup P_{k,n_k}$ με όλα τα $P_{k,1}, \ldots, P_{k,n_k}$ να είναι ξένα ανά δύο παραλληλεπίπεδα και $m(A_k \triangle B_k) \leq \left(\frac{\epsilon}{3KA}\right)^p$, όπου $A = \max(|a_1|, \ldots, |a_K|)$. Αν θέσουμε $q = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{B_k}$, τότε $\|h - q\|_p \leq \sum_{k=1}^{K} |a_k| \, \|\chi_{A_k} - \chi_{B_k}\|_p \leq KA\,\frac{\epsilon}{3KA} = \frac{1}{3}\,\epsilon$.

Τέλος, για κάθε $P_{k,j}$ παίρνουμε λίγο μικρότερο παραλληλεπίπεδο $P'_{k,j}$ ώστε $m(P_{k,j} \setminus P'_{k,j}) \leq \left(\frac{\epsilon}{3KAN}\right)^p$, όπου $N = \max(n_1, \ldots, n_K)$. Επίσης, θέτουμε $g = \sum_{k=1}^{K} a_k \sum_{j=1}^{n_k} g_{P_{k,j},P'_{k,j}}$ και έχουμε $\|q - g\|_p \leq KAN\,\frac{\epsilon}{3KAN} = \frac{1}{3}\,\epsilon$.

Η g είναι συνεχής στον $\mathbf{R^n}$, έχει συμπαγή φορέα και $\|f - g\| < \epsilon$.

3.1.10 Χώροι μέτρων

Ορισμός 3.19 *Έστω (Ω, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος, δηλαδή ένα μη-κενό σύνολο Ω και Σ μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Έστω και ένα μιγαδικό μέτρο μ ορισμένο στην Σ. Ορίζουμε για κάθε $A \in \Sigma$,*

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{m=1}^{n} |\mu(A_m)| \,|n \in \mathbf{N}, A_m \in \Sigma \text{ είναι ξένα ανά δύο και } \cup_{m=1}^{n} A_m \subseteq A\}.$$

Το $|\mu|(A)$ ονομάζεται ***ολική κύμανση του*** μ ***στο*** A.

Λήμμα 3.3 *Έστω K ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbf{C}$. Τότε υπάρχει κάποιο $M \subseteq K$, ώστε $|\sum_{\kappa\in M}\kappa| \geq \frac{1}{6}\sum_{\kappa\in K}|\kappa|$.*

Απόδειξη: Το $\mathbf{C}$ είναι ένωση των $Q_1 = \{\kappa|\Re(\kappa) \geq |\Im(\kappa)|\}, Q_2 = \{\kappa|\Re(\kappa) \leq -|\Im(\kappa)|\}, Q_3 = \{\kappa|\Im(\kappa) \geq |\Re(\kappa)|\}, Q_4 = \{\kappa|\Im(\kappa) \leq -|\Re(\kappa)|\}$.

Αν κάποιοι $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ περιέχονται στο Q_1, τότε $|\lambda_1 + \cdots + \lambda_N| \geq \Re(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N) = \Re(\lambda_1) + \cdots + \Re(\lambda_N) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_N|)$. Η ίδια ανισότητα ισχύει αν όλοι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ περιέχονται σε ένα από τα Q_2, Q_3, Q_4.

Χωρίζουμε το K σε τέσσερα ξένα ανά δύο υποσύνολα K_1, K_2, K_3, K_4 όπου το καθένα περιέχει στοιχεία του K στα Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 αντιστοίχως. Τότε για ένα τουλάχιστον από αυτά, το οποίο θα ονομάσουμε M, θα ισχύει $\sum_{\kappa\in M}|\kappa| \geq \frac{1}{4}\sum_{\kappa\in K}|\kappa|$. Βάσει της προηγούμενης παραγράφου, $|\sum_{\kappa\in M}\kappa| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\kappa\in M}|\kappa| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{\kappa\in K}|\kappa| \geq \frac{1}{6}\sum_{\kappa\in K}|\kappa|$.

Θεώρημα 3.14 *Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο στον (Ω, Σ), τότε το $|\mu|$ είναι μη-αρνητικό πραγματικό μέτρο στον (Ω, Σ). Ειδικώτερα, $|\mu|(\Omega) < +\infty$.*

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι $|\mu|(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \Sigma$ και ότι $|\mu|(\emptyset) = 0$.

Έστω $A^1, A^2, \ldots \in \Sigma$ ξένα ανά δύο και $A = \cup_{j=1}^{+\infty}A^j$.

Παίρνουμε $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ ξένα ανά δύο με $\cup_{m=1}^{n}A_m \subseteq A$. Θέτουμε $A_m^j = A^j \cap A_m$, οπότε $A_m = \cup_{j=1}^{+\infty}A_m^j$ και $\cup_{m=1}^{n}A_m^j \subseteq A^j$. Επομένως, $\sum_{m=1}^{n}|\mu(A_m)| = \sum_{m=1}^{n}|\sum_{j=1}^{+\infty}\mu(A_m^j)| \leq \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty}|\mu(A_m^j)| = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{n}|\mu(A_m^j)| \leq \sum_{j=1}^{+\infty}|\mu|(A^j)$. Άρα $|\mu|(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty}|\mu|(A^j)$.

Παίρνουμε τυχόν M και για κάθε $j = 1, \ldots, M$ τυχόντες αριθμούς $\lambda_j < |\mu|(A^j)$. Τότε υπάρχουν $A_1^j, \ldots, A_{n_j}^j \in \Sigma$ ξένα ανά δύο με $\cup_{m=1}^{n_j}A_m^j \subseteq A^j$ και $\lambda_j < \sum_{m=1}^{n_j}|\mu(A_m^j)|$. Τότε τα σύνολα $A_1^1, \ldots, A_{n_M}^M$ είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους περιέχεται στο A. Άρα $\sum_{j=1}^{M}\lambda_j < \sum_{j=1}^{M}\sum_{m=1}^{n_j}|\mu(A_m^j)| \leq |\mu|(A)$. Άρα $\sum_{j=1}^{M}|\mu|(A^j) \leq |\mu|(A)$ και, επομένως, $\sum_{j=1}^{+\infty}|\mu|(A^j) \leq |\mu|(A)$.

Καταλήγουμε στο $\sum_{j=1}^{+\infty}|\mu|(A^j) = |\mu|(A)$, οπότε το $|\mu|$ είναι μέτρο και απομένει να αποδείξουμε ότι $|\mu|(\Omega) < +\infty$.

Έστω $|\mu|(\Omega) = +\infty$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $B_1, B_2, \ldots \in \Sigma$ ώστε $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, $|\mu|(B_k) = +\infty$ και $|\mu(B_k)| \geq k - 1$ για κάθε k. Παίρνουμε $B_1 = \Omega$ και έστω ότι έχουμε αποδείξει την ύπαρξη των $B_1, \ldots, B_k$. Αφού $|\mu|(B_k) = +\infty$, υπάρχουν $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ ξένα ανά δύο ώστε $\cup_{m=1}^{n}A_m \subseteq B_k$ και $\sum_{m=1}^{n}|\mu(A_m)| \geq 6(|\mu(B_k)| + k)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, υπάρχουν κάποια από τα $A_1, \ldots, A_n$, τα οποία με αλλαγή αρίθμησης υποθέτουμε ότι είναι τα $A_1, \ldots, A_l$, ώστε $|\sum_{m=1}^{l}\mu(A_m)| \geq \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n}|\mu(A_m)| \geq |\mu(B_k)| + k$. Ορίζουμε $S = \cup_{m=1}^{l}A_m \subseteq B_k$, οπότε $|\mu(S)| \geq |\mu(B_k)| + k$. Επειδή $|\mu|(S) + |\mu|(B_k \setminus S) = |\mu|(B_k) = +\infty$, συνεπάγεται ότι είτε $|\mu|(S) = +\infty$ είτε $|\mu|(B_k \setminus S) = +\infty$. Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $B_{k+1} = S \subseteq B_k$, οπότε $|\mu(B_{k+1})| \geq |\mu(B_k)| + k \geq k$. Στη δεύτερη περίπτωση θέτουμε $B_{k+1} = B_k \setminus S \subseteq B_k$, οπότε $|\mu(B_{k+1})| \geq |\mu(S)| - |\mu(B_k)| \geq k$.

Τώρα ορίζουμε τα ξένα ανά δύο $A_1 = B_1 \setminus B_2, A_2 = B_2 \setminus B_3, \ldots$ και το $B_\infty = \cap_{k=1}^{+\infty} B_k$, οπότε $\mu(B_1) - \mu(B_\infty) = \mu(B_1 \setminus B_\infty) = \mu(\cup_{m=1}^{+\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mu(A_m) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{m=1}^{k-1} \mu(A_m) = \lim_{k\to+\infty}(\mu(B_1) - \mu(B_k))$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = \mu(B_\infty)$ και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Ορισμός 3.20 *Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο στον (Ω, Σ), τότε το μη-αρνητικό πραγματικό μέτρο $|\mu|$ ονομάζεται **απόλυτη κύμανση του** μ και ο αριθμός $|\mu|(\Omega)$ ονομάζεται **ολική κύμανση του** μ.*

Συμβολίζουμε $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$.

Θεώρημα 3.15 *Η $\|\cdot\| : \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) \to \mathbf{R}_0^+$ είναι νόρμα στον $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$ και ο χώρος αυτός είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω $\|\mu\| = 0$. Τότε, για κάθε $A \in \Sigma$, $|\mu(A)| \leq |\mu|(\Omega) = 0$, οπότε $\mu(A) = 0$. Άρα το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Αν $\kappa \in F$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\|\kappa\mu\| = |\kappa| \, \|\mu\|$.

Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$. Για κάθε $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ ξένα ανά δύο έχουμε $\sum_{m=1}^n |(\mu + \nu)(A_m)| \leq \sum_{m=1}^n |\mu(A_m)| + \sum_{m=1}^n |\nu(A_m)| \leq \|\mu\| + \|\nu\|$. Άρα $\|\mu + \nu\| \leq \|\mu\| + \|\nu\|$.

Έστω $\{\mu^{(n)}\}$ στον $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$ με $\left\|\mu^{(k)} - \mu^{(l)}\right\| \to 0$. Για τυχόν $A \in \Sigma$ έχουμε $|\mu^{(k)}(A) - \mu^{(l)}(A)| \leq \left\|\mu^{(k)} - \mu^{(l)}\right\| \to 0$, οπότε υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} \mu^{(n)}(A)$ στο F.

Ορίζουμε $\mu : \Sigma \to F$ με τύπο $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu^{(n)}(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Προφανώς, $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} \mu^{(n)}(\emptyset) = 0$.

Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ ξένα ανά δύο και $A = \cup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $\left\|\mu^{(k)} - \mu^{(l)}\right\| \leq \epsilon$ για κάθε $k, l \geq N$. Επειδή $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^{(N)}(A_j) = \mu^{(N)}(A)$, υπάρχει J_0 ώστε $|\mu^{(N)}(A) - \sum_{j=1}^{J} \mu^{(N)}(A_j)| \leq \epsilon$ για κάθε $J \geq J_0$. Αν $l \geq N$, τότε $|(\mu^{(N)}(A) - \mu^{(l)}(A)) - \sum_{j=1}^{J}(\mu^{(N)}(A_j) - \mu^{(l)}(A_j))| = |\sum_{j=J+1}^{+\infty}(\mu^{(N)}(A_j) - \mu^{(l)}(A_j))| \leq \sum_{j=J+1}^{+\infty} |\mu^{(N)}(A_j) - \mu^{(l)}(A_j)| \leq \left\|\mu^{(N)} - \mu^{(l)}\right\| \leq \epsilon$. Παίρνοντας όριο καθώς $l \to +\infty$ βρίσκουμε $|(\mu^{(N)}(A) - \mu(A)) - \sum_{j=1}^{J}(\mu^{(N)}(A_j) - \mu(A_j))| \leq \epsilon$ και, επομένως, $|\mu(A) - \sum_{j=1}^{J} \mu(A_j)| \leq 2\epsilon$ για κάθε $J \geq J_0$. Άρα $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) = \mu(A)$, οπότε $\mu \in \mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$.

Για τυχόν $\epsilon > 0$ επιλέγουμε N όπως πριν. Αν $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ είναι ξένα ανά δύο, τότε για κάθε $k, l \geq N$ έχουμε $\sum_{m=1}^n |\mu^{(k)}(A_m) - \mu^{(l)}(A_m)| \leq \left\|\mu^{(k)} - \mu^{(l)}\right\| \leq \epsilon$. Παίρνοντας όριο όταν $l \to +\infty$ βρίσκουμε $\sum_{m=1}^n |\mu^{(k)}(A_m) - \mu(A_m)| \leq \epsilon$, οπότε $\left\|\mu^{(k)} - \mu\right\| \leq \epsilon$ για κάθε $k \geq N$. Άρα $\left\|\mu^{(k)} - \mu\right\| \to 0$.

Ορισμός 3.21 *Αν το μ είναι πραγματικό μέτρο στον (Ω, Σ), τότε τα μη-αρνητικά πραγματικά μέτρα $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ και $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ ονομάζονται **θετική κύμανση του** μ και **αρνητική κύμανση του** μ αντιστοίχως.*

Το ότι τα μέτρα αυτά είναι μη-αρνητικά ισχύει διότι, λόγω του ορισμού του $|\mu|(A)$, έχουμε $|\mu|(A) \geq |\mu(A)|$ για κάθε $A \in \Sigma$. Οι δύο ταυτότητες

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \qquad \text{και} \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

είναι προφανείς. Επίσης, είναι εύκολο να αποδειχθούν, με τον ορισμό, οι

$$|\Re\mu|, |\Im\mu| \leq |\mu| \qquad \text{και} \qquad |\mu| \leq |\Re\mu| + |\Im\mu|$$

όπως και οι γενικότερες

$$|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|, \qquad |\overline{\mu}| = |\mu| \qquad \text{και} \qquad |\kappa\mu| = |\kappa||\mu|.$$

3.1.11 Διαχωρισιμότητα

Ορισμός 3.22 *Ένας χώρος με νόρμα ονομάζεται* **διαχωρίσιμος** *αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.*

Πρόταση 3.16 *Όλοι οι χώροι l^p με $1 \leq p < +\infty$ και οι c, c_0 είναι διαχωρίσιμοι. Ο l^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Ένας $\kappa \in \mathbf{C}$ ονομάζεται ρητός αν $\Re\kappa, \Im\kappa \in \mathbf{Q}$. Είναι προφανές ότι το σύνολο των ρητών μιγαδικών αριθμών είναι πυκνό στο $\mathbf{C}$.

Θεωρούμε το $A = \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n | n \in \mathbf{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι ρητοί στο $F\}$, όπου $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός της j συντεταγμένης που είναι ίση με 1. Το A είναι αριθμήσιμο.

Έστω τυχόν $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ και τυχόν $\epsilon > 0$. Υπάρχει N ώστε $\sum_{j=N+1}^{+\infty} |x_j|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2}$. Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ υπάρχει ρητό $\lambda_j \in F$ ώστε $|x_j - \lambda_j| \leq \frac{\epsilon}{2^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{p}}}$. Τότε $\|x - (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_N e_N)\|_p^p = \sum_{j=1}^{N} |x_j - \lambda_j|^p + \sum_{j=N+1}^{+\infty} |x_j|^p \leq \epsilon^p$, οπότε $\|x - (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_N e_N)\|_p \leq \epsilon$. Άρα το A είναι πυκνό στον l^p και ο l^p είναι διαχωρίσιμος.

Αν πάρουμε τυχόν $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ και τυχόν $\epsilon > 0$, υπάρχει N ώστε $|x_j| \leq \epsilon$ για κάθε $j \geq N+1$. Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ υπάρχει ρητό $\lambda_j \in F$ ώστε $|x_j - \lambda_j| \leq \epsilon$. Τότε $\|x - (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_N e_N)\|_\infty = \sup\{|x_1 - \lambda_1|, \ldots, |x_N - \lambda_N|, |x_{N+1}|, \ldots\} \leq \epsilon$. Άρα το A είναι πυκνό στον c_0 και ο c_0 είναι διαχωρίσιμος.

Για τον c θεωρούμε το αριθμήσιμο σύνολο $B = \{\lambda e + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n | n \in \mathbf{N}, \lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι ρητοί στο $F\}$, όπου $e = (1, 1, \ldots)$ έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με 1. Έστω τυχόν $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$ και τυχόν $\epsilon > 0$. Αν $\kappa = \lim x_j$, τότε $x - \kappa e \in c_0$. Παίρνουμε ρητό $\lambda \in F$ ώστε $|\kappa - \lambda| \leq \frac{\epsilon}{2}$ και, με βάση τα προηγούμενα, $a \in A$ ώστε $\|(x - \kappa e) - a\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Τότε $\|x - (\lambda e + a)\|_\infty \leq \|(x - \kappa e) - a\|_\infty + \|\kappa e - \lambda e\|_\infty \leq \epsilon$. Επειδή $\lambda e + a \in B$, συνεπάγεται ότι το B είναι πυκνό στον c.

Τέλος, έστω ότι ο l^∞ έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $C = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$. Για κάθε j παίρνουμε $x_j \in F$ ώστε $|x_j| \leq 1$ και $|x_j - x_j^{(j)}| \geq 1$ και σχηματίζουμε το $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Τότε το x ανήκει στον l^∞ και $\|x - x^{(j)}\|_\infty \geq |x_j - x_j^{(j)}| \geq 1$ για κάθε j. Άρα δεν υπάρχει στοιχείο του C σε απόσταση από το x μικρότερη από 1. Άτοπο.

Πρόταση 3.17 *Αν $A \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ είναι συμπαγές, τότε ο $C(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο B με στοιχεία όλα τα πολυώνυμα $Q(x_1,\dots,x_n)$ των οποίων οι συντελεστές είναι όλοι ρητοί στο F. Το B είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $C(A)$. Διότι, αν πάρουμε τυχούσα $f\in C(A)$ και $\epsilon>0$, υπάρχει, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.11, πολυώνυμο $P(x_1,\dots,x_n)$ με συντελεστές από το F ώστε $|f(x)-P(x)|\leq\frac{1}{2}\,\epsilon$ για κάθε $x\in A$. Έστω ότι το P έχει N όρους της μορφής $ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, ότι $k_1,\dots,k_n\leq K$ για κάθε όρο του P και $\|x\|_2\leq R$ για κάθε $x\in A$. Για κάθε συντελεστή a επιλέγουμε ρητό $b\in F$ ώστε $|b-a|\leq\delta=\frac{\epsilon}{2NR^{nK}}$. Αν σχηματίσουμε το πολυώνυμο Q με τους ίδιους όρους του P αλλά με συντελεστές b αντί a, τότε $|Q(x)-P(x)|\leq N\delta R^{nK}=\frac{1}{2}\,\epsilon$ για κάθε $x\in A$. Επομένως, $|f(x)-Q(x)|\leq\epsilon$ για κάθε $x\in A$.

Πρόταση 3.18 *Έστω χώρος μέτρου (Ω,Σ,μ) και υποθέτουμε ότι υπάρχει μία αριθμήσιμη συλλογή $\Xi\subseteq\Sigma$ ώστε για κάθε $A\in\Sigma$ με $\mu(A)<+\infty$ και κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $B\in\Xi$ με $\mu(B\triangle A)\leq\epsilon$. Τότε, για κάθε p με $1\leq p<+\infty$ ο $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχούσα $f\in L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ και $\epsilon>0$. Γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη θεωρία μέτρου ότι υπάρχει απλή συνάρτηση $g=\sum_{k=1}^n\kappa_k\chi_{A_k}\in L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$, (οπότε $\mu(A_k)<+\infty$ για κάθε k) με $\kappa_1,\dots,\kappa_n\in F$ και $A_1,\dots,A_n\in\Sigma$ ώστε $\left(\int_\Omega|f-g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{2}\,\epsilon$.

Επιλέγουμε $\eta>0$ το οποίο εξαρτάται από το ϵ με τρόπο που θα προσδιορίσουμε σε λίγο. Για κάθε k βρίσκουμε $B_k\in\Xi$ ώστε $\mu(B_k\triangle A_k)\leq\eta$ και βρίσκουμε ρητό $\lambda_k\in F$ ώστε $|\lambda_k-\kappa_k|\leq\eta$. Θέτουμε $h=\sum_{k=1}^n\lambda_k\chi_{B_k}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big(\int_\Omega|f-h|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \Big(\int_\Omega|f-g|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int_\Omega|g-h|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{2}\,\epsilon+\sum_{k=1}^n|\kappa_k-\lambda_k|\Big(\int_\Omega|\chi_{B_k}|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+\sum_{k=1}^n|\kappa_k|\Big(\int_\Omega|\chi_{A_k}-\chi_{B_k}|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{2}\,\epsilon+\sum_{k=1}^n|\kappa_k-\lambda_k|(\mu(B_k))^{\frac{1}{p}}+\sum_{k=1}^n|\kappa_k|(\mu(B_k\triangle A_k))^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{2}\,\epsilon+\eta\sum_{k=1}^n(\mu(A_k)+\eta)^{\frac{1}{p}}+\eta^{\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^n|\kappa_k|.
\end{aligned}$$

Επειδή $\eta\sum_{k=1}^n(\mu(A_k)+\eta)^{\frac{1}{p}}+\eta^{\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^n|\kappa_k|\to 0$ καθώς $\eta\to 0+$, μπορούμε να επιλέξουμε το η ώστε το τελευταίο άθροισμα να είναι $\leq\frac{1}{2}\,\epsilon$ και, επομένως, $\left(\int_\Omega|f-h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leq\epsilon$.

Άρα το $Q=\{\sum_{k=1}^n\lambda_k\chi_{B_k}\,|\,n\in\mathbf{N},\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι ρητοί, $B_1,\dots,B_n\in\Xi\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Είναι γνωστό ότι αν το Ω είναι Borel-σύνολο στον $\mathbf{R^n}$, $\Sigma=\mathcal{B}(\Omega)$ και $\mu=m$ είναι το μέτρο Lebesgue, τότε η συλλογή Ξ των συνόλων της μορφής $B=P\cap\Omega$, όπου P είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους παραλληλεπιπέδων των οποίων οι κορυφές έχουν ρητές συντεταγμένες, έχει την ιδιότητα στην υπόθεση της τελευταίας πρότασης. Άρα οι αντίστοιχοι χώροι $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m)$, $1 \leq p < +\infty$, είναι διαχωρίσιμοι.

3.1.12 Συμπάγεια

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι συμπαγές. Θα δούμε ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο σε χώρο άπειρης διάστασης.

Θεώρημα 3.16 *(Λήμμα του F. Riesz) Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και γνήσιος κλειστός υπόχωρος Y του X. Τότε για κάθε t με $0 < t < 1$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x\| = 1$ και $\|x - y\| \geq t$ για κάθε $y \in Y$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε $x_0 \in X \setminus Y$ και, επειδή ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε $B(x_0; r) \cap Y = \emptyset$. Θεωρούμε το $d = \inf\{\|y - x_0\| \,|y \in Y\}$. Προφανώς, το d είναι πεπερασμένο, αφού $d \leq \|0 - x_0\|$, και $d \geq r > 0$. Αν $0 < t < 1$, υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{t}$ και ορίζουμε $x = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}(y_0 - x_0)$. Τότε $\|x\| = 1$ και για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $\|x - y\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}\|(y_0 - x_0) - \|y_0 - x_0\| \cdot y\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}\|y_1 - x_0\| \geq \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}d \geq t$, όπου $y_1 = y_0 - \|y_0 - x_0\| \, y \in Y$.

Πρόταση 3.19 *Αν ο X είναι χώρος άπειρης διάστασης με νόρμα, τότε κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο X με νόρμα $\|\cdot\|$ έχει άπειρη διάσταση, το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές και έχει εσωτερικό σημείο x_0. Τότε υπάρχει $r \in \mathbf{R}^+$ ώστε η κλειστή μπάλα $cl(B(x_0; r))$ να περιέχεται στο K, οπότε αυτή η κλειστή μπάλα είναι συμπαγές σύνολο. Η κλειστή μπάλα $cl(B(0; 1)) = \{x \in X| \, \|x\| \leq 1\}$ προκύπτει από την $cl(B(x_0; r))$ με μεταφορά κατά $-x_0$ και ομοιοθεσία με λόγο $\frac{1}{r}$. Άρα η $\{x \in X| \, \|x\| \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

Παίρνουμε τυχόν x_1 με $\|x_1\| = 1$. Ο $Y_1 =< \{x_1\} >$ είναι γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης και, επομένως, είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Σύμφωνα με το Λήμμα του F. Riesz υπάρχει x_2 με $\|x_2\| = 1$ και $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Ο $Y_2 =< \{x_1, x_2\} >$ είναι γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης και, επομένως, είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Σύμφωνα με το Λήμμα του F. Riesz υπάρχει x_3 με $\|x_3\| = 1$ και $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βλέπουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο συμπαγές $\{x \in X| \, \|x\| \leq 1\}$ ώστε $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n, m με $n \neq m$. Αυτό, όμως, έρχεται σε αντίφαση με το ότι πρέπει να υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{x_n\}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί μη-τετριμμένο παράδειγμα συμπαγούς συνόλου σε χώρο με νόρμα άπειρης διάστασης.

Ορισμός 3.23 *Έστω τοπολογικός χώρος A και $\mathcal{F}$ μία συλλογή συναρτήσεων $f : A \to F$.*

(i) Η $\mathcal{F}$ ονομάζεται ***φραγμένη στο*** *$a \in A$ αν υπάρχει $K > 0$ ώστε $|f(a)| \leq K$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*
(ii) Η $\mathcal{F}$ ονομάζεται ***ισοσυνεχής στο*** *$a \in A$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του a ώστε $|f(a') - f(a)| < \epsilon$ για κάθε $a' \in U$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

Θεώρημα 3.17 *(Arzelà-Ascoli) Έστω συμπαγής τοπολογικός χώρος A και $\mathcal{F} \subseteq C(A)$ μία συλλογή συναρτήσεων $f : A \to F$ φραγμένη και ισοσυνεχής σε κάθε σημείο του A. Τότε το $cl(\mathcal{F})$ είναι συμπαγές στον $C(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα.*

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχόν $n \in \mathbf{N}$ και για κάθε $a \in A$ βρίσκουμε ανοικτή περιοχή $U_{a,n}$ του a ώστε $|f(a') - f(a)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $a' \in U_{a,n}$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$. Λόγω συμπάγειας του A, υπάρχουν $a_{n,1}, \ldots, a_{n,m_n} \in A$ ώστε $A = U_{a_{n,1},n} \cup \cdots \cup U_{a_{n,m_n},n}$. Σχηματίζουμε το αριθμήσιμο σύνολο $B \subseteq A$ με στοιχεία τα $a_{n,1}, \ldots, a_{n,m_n}$ για όλα τα $n \in \mathbf{N}$. Εκ κατασκευής το B έχει την ιδιότητα: σε κάθε $b \in B$ αντιστοιχεί μία ανοικτή περιοχή του, V_b, ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $b_1, \ldots, b_n \in B$ με $A = V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n}$ και $|f(a) - f(b_j)| \leq \epsilon$ για κάθε $a \in V_{b_j}$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$.

Έστω τυχούσα ακολουθία $\{f_k\}$ στο $\mathcal{F}$. Τότε για κάθε $b \in B$ η $\{f_k(b)\}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο F, οπότε έχει συγκλίνουσα υπο-ακολουθία. Επειδή το B είναι αριθμήσιμο, χρησιμοποιώντας το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, βλέπουμε ότι υπάρχει υπο-ακολουθία $\{f_{k_l}\}$ ώστε για κάθε $b \in B$ η $\{f_{k_l}(b)\}$ συγκλίνει στο F.

Έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $b_1, \ldots, b_n \in B$ με $A = V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n}$ και $|f(a) - f(b_j)| \leq \epsilon$ για κάθε $a \in V_{b_j}$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $a \in A$, οπότε $a \in V_{b_j}$ για κάποιο $j = 1, \ldots, n$. Τότε $|f_{k_l}(a) - f_{k_m}(a)| \leq |f_{k_l}(a) - f_{k_l}(b_j)| + |f_{k_l}(b_j) - f_{k_m}(b_j)| + |f_{k_m}(b_j) - f_{k_m}(a)| \leq 2\epsilon + |f_{k_l}(b_j) - f_{k_m}(b_j)|$. Επειδή τα $b_1, \ldots, b_n$ είναι πεπερασμένα, υπάρχει M ώστε $|f_{k_l}(b_j) - f_{k_m}(b_j)| \leq \epsilon$ για κάθε $l, m \geq M$ και κάθε $j = 1, \ldots, n$. Επομένως, $|f_{k_l}(a) - f_{k_m}(a)| \leq 3\epsilon$ για κάθε $l, m \geq M$ και κάθε $a \in A$. Δηλαδή $\|f_{k_l} - f_{k_m}\|_u \leq 3\epsilon$ για κάθε $l, m \geq M$.

Άρα η $\{f_{k_l}\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $C(A)$ και, επομένως, συγκλίνει σε στοιχείο του $C(A)$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε ακολουθία στο $\mathcal{F}$ έχει υπο-ακολουθία συγκλίνουσα στον $C(A)$. Αυτό αρκεί για να ισχύει ότι το $cl(\mathcal{F})$ είναι συμπαγές. Πράγματι, έστω ακολουθία $\{g_k\}$ στο $cl(\mathcal{F})$. Για κάθε k παίρνουμε $f_k \in \mathcal{F}$ με $\|g_k - f_k\|_u \leq \frac{1}{k}$. Υπάρχει $\{f_{k_l}\}$ ώστε $f_{k_l} \to g$ για κάποιο $g \in C(A)$, οπότε $\|g_{k_l} - g\|_u \leq \frac{1}{k_l} + \|f_{k_l} - g\|_u \to 0$ όταν $l \to +\infty$. Προφανώς, $g \in cl(\mathcal{F})$. Άρα κάθε ακολουθία στο $cl(\mathcal{F})$ έχει υπο-ακολουθία συγκλίνουσα στο $cl(\mathcal{F})$, οπότε το $cl(\mathcal{F})$ είναι συμπαγές.

3.1.13 Ομοιόμορφα κυρτές νόρμες

Ορισμός 3.24 *Μία νόρμα $\|\cdot\|$ σε γραμμικό χώρο X ονομάζεται* ***ομοιόμορφα κυρτή*** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|x\|, \|y\| \leq 1$ και $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| > 1 - \delta$ συνεπάγεται ότι $\|x - y\| < \epsilon$.*

Το επόμενο θεώρημα είναι αρκετά χρήσιμο. Εξασφαλίζει, κάτω από ορισμένες συνθήκες, την ελαχιστοποίηση της απόστασης σημείου από κυρτό σύνολο. Όπως είδαμε, η συμπάγεια η οποία είναι η συνηθισμένη συνθήκη για ελαχιστοποίηση συνεχούς συνάρτησης, δεν ισχύει ακόμη και για απλά κυρτά σύνολα, όπως οι κλειστές μπάλες σε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα.

Θεώρημα 3.18 *Έστω χώρος X με ομοιόμορφα κυρτή νόρμα $\|\cdot\|$ και ένα κυρτό και πλήρες $K \subseteq X$. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y_0 \in K$ ώστε $\|y_0 - x\| = \inf\{\|y - x\| \mid y \in K\}$.*

Απόδειξη: Αν $x \in K$, τότε το μοναδικό y_0 είναι, προφανώς, το $y_0 = x$.

Έστω $x \notin K$. Επειδή το K είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(x;r) \cap K = \emptyset$. Αν θέσουμε $D = \inf\{\|y - x\| \mid y \in K\}$, τότε $D \geq r > 0$. Υπάρχει $\{y_n\}$ στο K ώστε $\|y_n - x\| \to D$. Ορίζουμε $x_n = \frac{1}{\|y_n - x\|}(y_n - x)$ και έχουμε ότι $\|x_n\| = 1$ και $\frac{1}{2}(x_n + x_m) = \big(\frac{1}{2\|y_n - x\|} + \frac{1}{2\|y_m - x\|}\big)\big(\frac{\|y_m - x\|}{\|y_n - x\| + \|y_m - x\|}\, y_n + \frac{\|y_n - x\|}{\|y_n - x\| + \|y_m - x\|}\, y_m - x\big)$. Ισχύει ότι $\frac{\|y_m - x\|}{\|y_n - x\| + \|y_m - x\|}\, y_n + \frac{\|y_n - x\|}{\|y_n - x\| + \|y_m - x\|}\, y_m \in K$, αφού το K είναι κυρτό, οπότε $\big\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\big\| \geq \big(\frac{1}{2\|y_n - x\|} + \frac{1}{2\|y_m - x\|}\big)D \to 1$. Άρα $\|x_n - x_m\| \to 0$. Τότε $\|y_n - y_m\| \to 0$ και, επειδή το K είναι πλήρες, υπάρχει $y_0 \in K$ ώστε $y_n \to y_0$. Άρα $\|y_0 - x\| = \lim \|y_n - x\| = D$.

Έστω $D = \|y_0 - x\| = \|y_0' - x\|$ με $y_0, y_0' \in K$. Θέτουμε $x_0 = \frac{1}{\|y_0 - x\|}(y_0 - x) = \frac{1}{D}(y_0 - x)$ και $x_0' = \frac{1}{\|y_0' - x\|}(y_n - x) = \frac{1}{D}(y_0' - x)$, οπότε $\|x_0\| = \|x_0'\| = 1$. Τότε $\big\|\frac{1}{2}(x_0 + x_0')\big\| = \frac{1}{D}\big\|\frac{1}{2}(y_0 + y_0') - x\big\| \geq 1$ και, επομένως $\|x_0 - x_0'\| = 0$.

Λήμμα 3.4 *Έστω $0 < t \leq 1$ και $\kappa, \lambda \in \mathbf{C}$. Αν $1 < p \leq 2$, τότε*

$$\big[(1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}\big]|\kappa|^p + \Big[\big(\frac{1}{t}+1\big)^{p-1} - \big(\frac{1}{t}-1\big)^{p-1}\Big]|\lambda|^p \leq |\kappa+\lambda|^p + |\kappa-\lambda|^p.$$

Αν $2 \leq p < +\infty$, τότε η προηγούμενη ανισότητα ισχύει με $\geq$ αντί $\leq$.

Αν, επιπλέον, $0 < \lambda \leq \kappa$ και $t = \frac{\lambda}{\kappa}$, τότε η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα για κάθε p με $1 < p < +\infty$.

Απόδειξη: Με μελέτη της παραγώγου της συνάρτησης (ως προς t) στην αριστερή πλευρά της ανισότητας προκύπτει ότι, αν $0 < t \leq 1$, τότε ισχύει $\big[(1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}\big]|\kappa|^p + \Big[\big(\frac{1}{t}+1\big)^{p-1} - \big(\frac{1}{t}-1\big)^{p-1}\Big]|\lambda|^p \leq \big||\kappa| + |\lambda|\big|^p + \big||\kappa| - |\lambda|\big|^p$, αν $1 < p \leq 2$, και η ίδια ανισότητα με $\geq$ αντί $\leq$, αν $2 \leq p < +\infty$.

Απομένει να αποδειχθεί η $\big||\kappa| + |\lambda|\big|^p + \big||\kappa| - |\lambda|\big|^p \leq |\kappa + \lambda|^p + |\kappa - \lambda|^p$, αν $1 < p \leq 2$, και η ίδια ανισότητα με $\geq$ αντί $\leq$, αν $2 \leq p < +\infty$.

Θέτουμε $\frac{\lambda}{\kappa} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ και αναγόμαστε στη σύγκριση του $(1+r)^p + (1-r)^p$ με το $(1+r^2+2rs)^{\frac{p}{2}} + (1+r^2-2rs)^{\frac{p}{2}}$ όταν $-1 \leq s \leq 1$. Πάλι με μελέτη της παραγώγου, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $(1+r^2+2rs)^{\frac{p}{2}} + (1+r^2-2rs)^{\frac{p}{2}}$ έχει στο διάστημα $[-1,1]$ ελάχιστη τιμή στα $s = \pm 1$, αν $1 < p \leq 2$, και μέγιστη τιμή στα ίδια σημεία, αν $2 \leq p < +\infty$. Η τιμή αυτή είναι ίση με $(1+r)^p + (1-r)^p$.

Πρόταση 3.20 *(Ανισότητες Hanner.) Αν $1 < p \leq 2$, τότε*

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \geq \big|\,\|x\|_p + \|y\|_p\big|^p + \big|\,\|x\|_p - \|y\|_p\big|^p$$

για κάθε x, y *στον* l^p *ή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq \left| \|f\|_p + \|g\|_p \right|^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p$$

για κάθε $f, g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Αν $2 \leq p < +\infty$, *τότε ισχύουν οι ίδιες ανισότητες με* $\leq$.

Απόδειξη: Εστω $1 < p \leq 2$.

Θέτουμε $\kappa = x_j$ και $\lambda = y_j$ στην ανισότητα του προηγούμενου λήμματος και προσθέτουμε για $1 \leq j \leq n$. Τότε, $\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p + \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \geq \left[(1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}\right] \sum_{j=1}^n |x_j|^p + \left[\left(\frac{1}{t}+1\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{t}-1\right)^{p-1}\right] \sum_{j=1}^n |y_j|^p$. Αν υποθέσουμε ότι $0 < \sum_{j=1}^n |y_j|^p \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^p$, τότε θέτουμε $t^p = \frac{\sum_{j=1}^n |y_j|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}$ και βρίσκουμε $\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p + \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \geq \left| \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p + \left| \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p$. Η ανισότητα αυτή ισχύει, προφανώς, όταν $\sum_{j=1}^n |y_j|^p = 0$ και, λόγω συμμετρίας, όταν $\sum_{j=1}^n |y_j|^p \geq \sum_{j=1}^n |x_j|^p$.

Αν $2 \leq p < +\infty$, τότε η ανισότητα ισχύει με $\leq$.

Αν $dim(X) = n$ και $\|\cdot\|_p$ είναι η p-νόρμα του X (ως προς οποιαδήποτε βάση), τότε αυτή η ανισότητα γράφεται

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \geq \left| \|x\|_p + \|y\|_p \right|^p + \left| \|x\|_p - \|y\|_p \right|^p,$$

αν $1 < p \leq 2$, και με $\leq$, αν $2 \leq p < +\infty$.

Παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$, αποδεικνύονται οι ίδιες ανισότητες στον l^p.

Αν θέσουμε $\kappa = f(a)$ και $\lambda = g(a)$ και ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία βρίσκουμε

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq \left| \|f\|_p + \|g\|_p \right|^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p$$

για κάθε $f, g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, αν $1 < p \leq 2$, και με $\leq$, αν $2 \leq p < +\infty$.

Θεώρημα 3.19 *Αν* $1 < p < +\infty$, *η* p*-νόρμα στον* $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, *στον* l^p *και σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ομοιόμορφα κυρτή.*

Απόδειξη: Έστω $2 \leq p < +\infty$.

Αν $\|x\|_p, \|y\|_p \leq 1$ και $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_p \geq 1 - \delta$, τότε $\|x\|_p + 1 \geq \|x+y\|_p > 2 - 2\delta$, οπότε $\|x\|_p > 1 - 2\delta$ και, ομοίως, $\|y\|_p > 1 - 2\delta$. Άρα $-2\delta < \|x\|_p - 1 \leq \|x\|_p - \|y\|_p \leq 1 - \|y\|_p < 2\delta$, δηλαδή $\left| \|x\|_p - \|y\|_p \right| < 2\delta$.

Βάσει της ανισότητας Hanner, $2^p(1-\delta)^p + \|x-y\|_p^p < \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leq 2^p + \left| \|x\|_p - \|y\|_p \right|^p < 2^p + 2^p\delta^p$. Άρα $\|x-y\|_p < 2\big(1 + \delta^p - (1-\delta)^p\big)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$, αν το δ είναι αρκετά μικρό. Η ίδια απόδειξη ισχύει και για συναρτήσεις, οπότε έχουμε αποδείξει ότι η p-νόρμα είναι ομοιόμορφα κυρτή, αν $2 \leq p < +\infty$.

Έστω $1 < p \leq 2$. Αντικαθιστώντας στην ανισότητα Hanner τα x, y με $\frac{x+y}{2}$ και $\frac{x-y}{2}$, βρίσκουμε $\|x\|_p^p + \|x\|_p^p \geq \left| \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p \right|^p + \left| \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p \right|^p$.

Αν $\|x\|_p, \|y\|_p \leq 1$ και $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_p \geq 1-\delta$, τότε χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|1+t|^p + |1-t|^p \geq 2 + p(p-1)t^2$ για κάθε t με $0 < t < 1$ και έχουμε τα εξής. Αν $\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p \geq \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p$, τότε παίρνουμε $2 \geq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p \geq 2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p + p(p-1)\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^{p-2}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^2 \geq (2+p(p-1))\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p > (2+p(p-1))(1-\delta)^p$ και, επομένως, $\delta > 1 - \left(\frac{2}{2+p(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Άρα, επιλέγοντας $\delta < 1 - \left(\frac{2}{2+p(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}$, συνεπάγεται ότι $\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p$, οπότε $2 \geq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p \geq 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p + p(p-1)\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^{p-2}\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^2 \geq 2(1-\delta)^p + p(p-1)(1-\delta)^{p-2}\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^2$. Επομένως, $\|x-y\|_p \leq 2\left(\frac{2-2(1-\delta)^p}{p(p-1)(1-\delta)^{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, αν το δ είναι αρκετά μικρό. Άρα η p-νόρμα είναι ομοιόμορφα κυρτή, αν $1 < p \leq 2$.

3.1.14 Σειρές

Ορισμός 3.25 *Έστω I ένα μη-κενό σύνολο δεικτών και $\{\alpha_i | i \in I\}$ ένα σύνολο μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι **η σειρά** $\sum_{i\in I}\alpha_i$ **συγκλίνει** αν $\sup\{\sum_{i\in J}\alpha_i | J$ πεπερασμένο $\subseteq I\} < +\infty$. Τότε λέμε ότι **η σειρά συγκλίνει στο** S ή ότι **το** S **είναι το άθροισμα της** $\{\alpha_i | i \in I\}$ και γράφουμε $\sum_{i\in I}\alpha_i = S$, όπου S είναι η τιμή αυτού του supremum.*

Πρόταση 3.21 *Έστω I ένα μη-κενό σύνολο δεικτών και $\{\alpha_i | i \in I\} \subseteq \mathbf{R}_0^+$. Αν η $\sum_{i\in I}\alpha_i$ συγκλίνει και έχει άθροισμα S, τότε το $I_0 = \{i \in I | a_i \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο του I. Επίσης, αν $I_0 = \{i_1, i_2, \dots\}$ είναι οποιαδήποτε αρίθμηση του I_0, τότε*

$$S = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{i_k},$$

όπου $N = card(I_0)$ είναι είτε μη-αρνητικός ακέραιος αριθμός είτε $N = +\infty$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $I_n = \{i \in I | \alpha_i \geq \frac{1}{n}\}$, οπότε $I_0 = \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Παίρνουμε οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο M του I_n, οπότε $\frac{1}{n}\, card(M) \leq \sum_{i\in M}\alpha_i \leq S$. Άρα $card(M) \leq nS$ και, επομένως, το I_n είναι πεπερασμένο με $card(I_n) \leq nS$. Άρα το I_0 είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Έστω $I_0 = \{i_1, i_2, \dots\}$ οποιαδήποτε αρίθμηση του I_0 και $N = card(I_0)$.

Αν $N < +\infty$, οπότε $I_0 = \{i_1, \dots, i_N\}$, τότε το μέγιστο άθροισμα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του $\{\alpha_i | i \in I\}$ είναι, προφανώς, το $\sum_{k=1}^{N}\alpha_{i_k}$. Άρα $S = \sum_{k=1}^{N}\alpha_{i_k}$.

Έστω $N = +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ το $\{i_1, \dots, i_n\}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I και, επομένως, $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{i_k} \leq S$. Επίσης, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένο $J \subseteq I$ ώστε $\sum_{i\in J}\alpha_i > S - \epsilon$. Μπορούμε, προφανώς, να υποθέσουμε ότι $J \subseteq I_0$, οπότε υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $J \subseteq \{i_1, \dots, i_n\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, όμως, $S - \epsilon < \sum_{i\in J}\alpha_i \leq \sum_{k=1}^{n}\alpha_{i_k} \leq S$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $S = \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_{i_k}$.

Ορισμός 3.26 *Έστω X χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ και ακολουθία $\{x_n\}$ στον X. Λέμε ότι **η** $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει στο** $s \in X$ αν $x_1 + \cdots + x_n \to s$. Τότε λέμε ότι **η** $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **έχει άθροισμα** s και γράφουμε $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.*

Θεώρημα 3.20 *Έστω X χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|$ και $\{x_i | i \in I\} \subseteq X$ όπου I είναι ένα μη-κενό σύνολο δεικτών. Αν η σειρά $\sum_{i\in I} \|x_i\|$ συγκλίνει, τότε το $I_0 = \{i \in I | x_i \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Αν $card(I_0) = +\infty$ και αν $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ είναι τυχούσα αρίθμηση του I_0, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{i_k}$ συγκλίνει στον X και το άθροισμα $s = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{i_k}$ δεν εξαρτάται από την αρίθμηση του I_0.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το I_0 είναι το πολύ αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι $card(I_0) = +\infty$ και έστω $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ οποιαδήποτε αρίθμηση του I_0. Τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{i_k}\|$ συγκλίνει.

Θέτουμε $s_n = x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$, οπότε, αν $n \leq m$, $\|s_m - s_n\| \leq \|x_{i_{n+1}}\| + \cdots + \|x_{i_m}\| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$. Άρα $s_n \to s$ για κάποιο $s \in X$.

Θεωρούμε οποιαδήποτε άλλη αρίθμηση $I_0 = \{j_1, j_2, \ldots\}$ και παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_1 ώστε $\sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \|x_{i_k}\| < \epsilon$. Επίσης, υπάρχει n_2 ώστε $\{i_1, \ldots, i_{n_1}\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_n\}$ για κάθε $n \geq n_2$. Αν $n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε το $\{i_1, \ldots, i_{n_1}\}$ περιέχεται στο $\{i_1, \ldots, i_n\}$ και στο $\{j_1, \ldots, j_n\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$, το $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} - \sum_{k=1}^{n} x_{j_k}$ δεν περιέχει όρους με δείκτες από το $\{i_1, \ldots, i_{n_1}\}$ και περιέχει το πολύ έναν όρο για κάθε δείκτη από το $\{i_{n_1+1}, \ldots\}$ με συντελεστή ± 1. Επομένως, $\|\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} - \sum_{k=1}^{n} x_{j_k}\| \leq \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \|x_{i_k}\| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = \lim \sum_{k=1}^{n} x_{j_k}$ και, τέλος, $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{i_k} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{j_k}$.

Ορισμός 3.27 *Έστω X χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ και $\{x_i | i \in I\} \subseteq X$ όπου I είναι ένα μη-κενό σύνολο δεικτών.*
*(i) Αν η σειρά $\sum_{i\in I} \|x_i\|$ συγκλίνει, λέμε ότι **η** $\sum_{i\in I} x_i$ **συγκλίνει απολύτως.***
*(ii) Αν το $I_0 = \{i \in I | x_i \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{i_k}$ συγκλίνει στον X για κάθε αρίθμηση $I_0 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ και το άθροισμα δεν εξαρτάται από την αρίθμηση, τότε λέμε ότι **η σειρά** $\sum_{i\in I} x_i$ **συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις.***

Επομένως, το τελευταίο θεώρημα λέει ότι σε χώρο Banach, αν μία σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις.

3.2 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

3.2.1 Εσωτερικό γινόμενο και νόρμα

Ορισμός 3.28 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και συνάρτηση $(\cdot|\cdot) : X \times X \to F$ ώστε για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε $\kappa \in F$*
(i) $(x + z|y) = (x|y) + (z|y)$, $\quad (\kappa x|y) = \kappa(x|y)$
(ii) $(y|x) = \overline{(x|y)}$
(iii) $(x|x) \geq 0$
(iv) $(x|x) = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.
*Η συνάρτηση $(\cdot|\cdot)$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο στον** X.*

Από τις (i) και (ii) συνεπάγεται ότι $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$ και $(x|\lambda y) = \overline{\lambda}(x|y)$. Αν συνδυάσουμε όλα αυτά παίρνουμε το γενικότερο

$$(\sum_{k=1}^{n} \kappa_k x_k | \sum_{l=1}^{m} \lambda_l y_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \kappa_k \overline{\lambda_l}(x_k|y_l).$$

Αν $F = \mathbf{R}$, τότε, φυσικά, παραλείπουμε το σύμβολο του μιγαδικού συζυγούς από όλα τα προηγούμενα, αφού $\overline{\lambda} = \lambda$ για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$.

Θεώρημα 3.21 *(Ανισότητα του Schwarz) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$. Τότε*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$$

*για κάθε $x, y \in X$. **Η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν ένα από τα x, y είναι πολλαπλάσιο του άλλου.***

Απόδειξη: Αν $x = 0$, τότε αφ' ενός $(0|0) = (0|y) = 0$, οπότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα, αφ' ετέρου $0 = 0y$ και το 0 είναι πολλαπλάσιο του y. Αρκεί, επομένως, να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$.

Για κάθε $\kappa \in F$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\kappa x + y|\kappa x + y) \\ &= (x|x)|\kappa|^2 + 2\Re\big((x|y)\kappa\big) + (y|y) \\ &= \Big|\sqrt{(x|x)}\,\kappa + \frac{(x|y)}{\sqrt{(x|x)}}\Big|^2 + \frac{(x|x)(y|y) - |(x|y)|^2}{(x|x)}. \end{aligned}$$

Τώρα θέτουμε $\kappa = -\frac{(x|y)}{(x|x)}$ και βρίσκουμε $(x|x)(y|y) - |(x|y)|^2 \geq 0$.

Αν η ανισότητα ισχύει ως ισότητα, $(x|x)(y|y) = |(x|y)|^2$, τότε με την ίδια επιλογή για το κ έχουμε $(-\frac{(x|y)}{(x|x)}\,x+y|-\frac{(x|y)}{(x|x)}\,x+y) = 0$ και, επομένως, $y = \frac{(x|y)}{(x|x)}\,x$ οπότε το y είναι πολλαπλάσιο του x.

Αν, αντιστρόφως, $y = \kappa x$ για κάποιο $\kappa \in F$, τότε $|(x|\kappa x)|^2 = |\kappa|^2(x|x)^2 = (x|x)(\kappa x|\kappa x)$. Ομοίως, αν το x είναι πολλαπλάσιο του y, τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα (iv) του εσωτερικού γινομένου χρησιμοποιήθηκε μόνο για την περίπτωση της ισότητας στην ανισότητα του Schwarz.

Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι η ανισότητα του Schwarz ισχύει για κάθε συνάρτηση $(\cdot|\cdot)$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii)$ και (iii) του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 3.29 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$. Ορίζουμε $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ για κάθε $x \in X$. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_0^+$ λέμε ότι είναι **η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.***

Πρόταση 3.22 *Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_0^+$ που μόλις ορίσθηκε είναι νόρμα στον X.*

Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in X$ έχουμε $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x)+2\Re(x|y)+(y|y) \leq (x|x)+2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}+(y|y) = \|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2 = \big(\|x\|+\|y\|\big)^2$. Άρα $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Οι υπόλοιπες ιδιότητες της νόρμας αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

Η νόρμα $\|\cdot\|$ η οποία θα εμφανίζεται στη μελέτη μας των ιδιοτήτων ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ θα είναι η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

Επομένως, κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος με νόρμα και, ως εκ τούτου, μετρικός χώρος.

Πρόταση 3.23 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$. Τότε η συνάρτηση $(\cdot|\cdot) : X \times X \to F$ είναι συνεχής στο $X \times X$.*

Απόδειξη: $|(x|y)-(x'|y')| \leq \|x\|\,\|y-y'\| + \|y\|\,\|x-x'\| + \|x-x'\|\,\|y-y'\|$ για κάθε $x, x', y, y' \in X$.

Ορισμός 3.30 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$. Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε ο περιορισμός του $(\cdot|\cdot)$ στο $Y \times Y$ αποτελεί εσωτερικό γινόμενο στον Y και ο Y με αυτό το εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται* ***υπόχωρος του** X.*

3.2.2 Ισομετρίες

Ορισμός 3.31 *Έστω X, Y χώροι με εσωτερικά γινόμενα $(\cdot|\cdot)_X$ και $(\cdot|\cdot)_Y$. Αν υπάρχει 1-1 και επί γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ ώστε $(Tx\,|\,Tz)_Y = (\,x\,|\,z\,)_X$ για κάθε $x, z \in X$, τότε ο T ονομάζεται* ***ισομετρία του** X **με τον** Y, λέμε ότι* ***ο** X **είναι ισομετρικός με τον** Y και γράφουμε $X \overset{iso}{=} Y$.*

Η σχέση της ισομετρίας είναι, προφανώς, σχέση ισοδυναμίας. Ως συνήθως, ταυτίζουμε δύο ισομετρικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 3.24 *Έστω X, Y χώροι με εσωτερικά γινόμενα $(\cdot|\cdot)_X$ και $(\cdot|\cdot)_Y$ και αντίστοιχες νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$. Επίσης, έστω 1-1 και επί γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: Αν ο T είναι ισομετρία, τότε $\|Tx\|_Y = \sqrt{(\,Tx\,|\,Tx\,)_Y} = \sqrt{(\,x\,|\,x\,)_X} = \|x\|_X$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Τότε για $x, z \in X$ έχουμε $\|Tx\|_Y^2 + 2\Re(\,Tx\,|\,Tz\,)_Y + \|Tz\|_Y^2 = \|T(x+z)\|_Y^2 = \|x+z\|_X^2 = \|x\|_X^2 + 2\Re(\,x\,|\,z\,)_X + \|z\|_X^2$. Άρα $\Re(\,Tx\,|\,Tz\,)_Y = \Re(\,x\,|\,z\,)_X$ για κάθε $x, z \in X$.

Αν $F = \mathbf{R}$, τότε $(\,Tx\,|\,Tz\,)_Y = (\,x\,|\,z\,)_X$ για κάθε $x, z \in X$.

Αν $F = \mathbf{C}$, τότε θέτουμε ix στη θέση του x και παίρνουμε $\Im(\,Tx\,|\,Tz\,)_Y = \Im(\,x\,|\,z\,)_X$ και, επομένως, $(\,Tx\,|\,Tz\,)_Y = (\,x\,|\,z\,)_X$ για κάθε $x, z \in X$.

Άρα ένας T είναι ισομετρία χώρων ως προς το εσωτερικό τους γινόμενο αν και μόνον αν είναι ισομετρία των ίδιων χώρων ως προς τη νόρμα τους.

3.2.3 Η ομοιόμορφη κυρτότητα της νόρμας

Πρόταση 3.25 *(Ταυτότητα του Παραλληλογράμμου) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,|\,\cdot)$. Τότε*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

για κάθε $x, y \in X$.

Θεώρημα 3.22 *Η νόρμα η οποία επάγεται από εσωτερικό γινόμενο είναι ομοιόμορφα κυρτή.*

Απόδειξη: Άμεση από την ταυτότητα του παραλληλογράμμου.

Θεώρημα 3.23 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και K πλήρες και κυρτό υποσύνολο του X. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y_0 \in K$ ώστε $\|x - y_0\| = \inf\{\|x-y\| \mid y \in K\}$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\Re(y-y_0|x-y_0) \leq 0$ για κάθε $y \in K$.*

Απόδειξη: Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του y_0 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.18.

Έστω τυχόν $y \in K$. Τότε για κάθε t με $0 < t < 1$ έχουμε $ty + (1-t)y_0 \in K$, οπότε

$$\begin{aligned}\|x-y_0\|^2 &\leq \|x-(ty+(1-t)y_0)\|^2 \\ &= \|x-y_0\|^2 - 2t\Re(y-y_0|x-y_0) + t^2\,\|y-y_0\|^2 .\end{aligned}$$

Άρα $\Re(y-y_0|x-y_0) \leq \frac{1}{2}\,t\,\|y-y_0\|^2$ για κάθε t με $0 < t < 1$ και, παίρνοντας όριο όταν $t \to 0+$, βρίσκουμε $\Re(y-y_0|x-y_0) \leq 0$.

3.2.4 Χώροι Hilbert

Ορισμός 3.32 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,|\,\cdot)$. Ο X ονομάζεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης.*

Ορισμός 3.33 *Σε γραμμικό χώρο X με $dim(X) < +\infty$, παίρνουμε οποιαδήποτε βάση $\{b_1, \ldots, b_n\}$ και ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο με τύπο*

$$(x|y)_2 = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

για κάθε $x = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n, y = y_1b_1 + \cdots + y_nb_n \in X$.

Ορισμός 3.34 *Στον l^2 ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο με τύπο*

$$(x|y)_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j\overline{y_j}$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2$.

Ορισμός 3.35 *Στον $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο με τύπο*

$$(f|g)_2 = \int_\Omega f(a)\overline{g(a)}\, d\mu(a)$$

για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Είναι προφανές ότι σε καθέναν από τους τρεις αυτούς χώρους το εσωτερικό γινόμενο που ορίσθηκε επάγει την αντίστοιχη 2-νόρμα. Επίσης, παρατηρούμε ότι η ανισότητα του Schwarz είναι η ανισότητα Hölder με $p = q = 2$.

Θεώρημα 3.24 *Οι χώροι πεπερασμένης διάστασης, ο l^2 και οι χώροι $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι χώροι Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_2$ που επάγει την 2-νόρμα.*

Απόδειξη: Προφανής.

Θεώρημα 3.25 *(Πλήρωση χώρου με εσωτερικό γινόμενο) Για κάθε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο υπάρχει χώρος Hilbert $\widetilde{X}$ ώστε ο X να είναι πυκνός υπόχωρος του $\widetilde{X}$.*

Αν ο $\widehat{X}$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον $\widetilde{X}$, υπάρχει ισομετρία του $\widetilde{X}$ με τον $\widehat{X}$ της οποίας ο περιορισμός στον X είναι η ταυτοτική απεικόνιση του X.

Απόδειξη: Αν $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα του X που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ του X, γνωρίζουμε ότι υπάρχει χώρος Banach $\widetilde{X}$ με νόρμα $\|\cdot\|^{\sim}$, ώστε ο X να είναι πυκνός υπόχωρος του $\widetilde{X}$. Απομένει να επεκτείνουμε το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ του X σε εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)^{\sim}$ του $\widetilde{X}$, ώστε η $\|\cdot\|^{\sim}$ να επάγεται από το $(\cdot|\cdot)^{\sim}$.

Για τυχόντα $x, y \in \widetilde{X}$ παίρνουμε $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ στον X με $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον $\widetilde{X}$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι, επειδή αυτές οι ακολουθίες είναι ακολουθίες Cauchy, η $\{(x_n|y_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο F και, επομένως, έχει όριο στο F. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι, αν $\{x'_n\}$ και $\{y'_n\}$ είναι στον X και $x'_n \to x$ και $y'_n \to y$ στον $\widetilde{X}$, τότε $\lim(x'_n|y'_n) = \lim(x_n|y_n)$. Άρα ορίζεται καλώς το $(x|y)^{\sim} = \lim(x_n|y_n)$.

Όλες οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύονται εύκολα. Για παράδειγμα, έστω ότι $x \in \widetilde{X}$ και $(x|x)^{\sim} = 0$. Τότε, με $\{x_n\}$ στον X και $x_n \to x$, έχουμε $0 = (x|x)^{\sim} = \lim(x_n|x_n) = \lim \|x_n\|^2 = \lim \|x_n\|^{\sim 2} = \|x\|^{\sim 2}$ και, επομένως, $x = 0$.

Φυσικά, ο ίδιος υπολογισμός αποδεικνύει ότι η $\|\cdot\|^{\sim}$ επάγεται από το $(\cdot|\cdot)^{\sim}$.

Τέλος, η ισομετρία χώρων με νόρμα που γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανάμεσα στους $\widetilde{X}$ και $\widehat{X}$ είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 3.24, ισομετρία χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 3.36 *Αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, κάθε χώρος Hilbert $\widehat{X}$ με την ιδιότητα ο X να είναι πυκνός υπόχωρος του $\widehat{X}$ ονομάζεται **πλήρωση του X σε χώρο Hilbert**.*

Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι οποιεσδήποτε πληρώσεις του X είναι ισομετρικοί χώροι Hilbert και, επομένως, συνήθως αναφερόμαστε **στην** πλήρωση του X σε χώρο Hilbert .

3.2.5 Καθετότητα

Ορισμός 3.37 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$.*
*(i) Τα $x, y \in X$ ονομάζονται **κάθετα** αν $(x|y) = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση γράφουμε $x \perp y$.*
*(ii) Λέμε ότι **το** $x \in X$ **είναι κάθετο στο** $S \subseteq X$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in S$. Γράφουμε $x \perp S$.*
*(iii) Λέμε ότι **τα** $S, T \subseteq X$ **είναι κάθετα** αν $x \perp y$ για κάθε $x \in T$ και κάθε $y \in S$. Γράφουμε $T \perp S$.*

Πρόταση 3.26 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$.*
(i) Για κάθε $x \in X$ ισχύει $x \perp x$ αν και μόνον αν $x = 0$.
(ii) Αν $x \perp y$, τότε $y \perp x$.
(iii) Αν το $x \in X$ είναι κάθετο σε κάποια στοιχεία του X, τότε είναι κάθετο και σε κάθε στοιχείο το οποίο είναι όριο γραμμικών συνδυασμών αυτών των στοιχείων. Δηλαδή, αν $x \perp S$, τότε $x \perp cl(<S>)$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 3.38 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και μη-κενό S υποσύνολο του X. Ορίζουμε*

$$S^{\perp} = \{x \in X | x \perp y \text{ για κάθε } y \in S\}.$$

Πρόταση 3.27 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και μη-κενά S, T υποσύνολα του X.*
(i) Το $S^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.
(ii) $cl(<S>) \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$.
(iii) Αν $S \subseteq T$, τότε $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.
(iv) $[cl(<S>)]^{\perp} = S^{\perp}$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Θεώρημα 3.26 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, πλήρης υπόχωρος Y του X και τυχόν $x \in X$. Τότε*
(i) υπάρχει μοναδικό $y_0 \in Y$ με $\|x - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$
(ii) για το y_0 του (i) ισχύει $x - y_0 \perp Y$
(iii) το x γράφεται με μοναδικό τρόπο $x = y_0 + z_0$ με $y_0 \in Y$ και $z_0 \perp Y$.
(iv) $X = Y + Y^{\perp}$ και $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.
(v) $Y = (Y^{\perp})^{\perp}$.

Αν ο X είναι χώρος Hilbert, τότε τα προηγούμενα ισχύουν για κάθε κλειστό υπόχωρο Y του X.

Απόδειξη: (i) Το Θεώρημα 3.23.
(ii) Από το Θεώρημα 3.23 έχουμε ότι $\Re(x-y_0|y-y_0) \le 0$ για κάθε $y \in Y$. Θέτουμε $y+y_0$ στη θέση του y και παίρνουμε $\Re(x-y_0|y) \le 0$ για κάθε $y \in Y$. Θέτοντας $-y$ στη θέση του y, παίρνουμε $\Re(x-y_0|y) \ge 0$ για κάθε $y \in Y$ και, επομένως, $\Re(x-y_0|y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Αν $F = \mathbf{R}$, τότε $(x-y_0|y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Αν $F = \mathbf{C}$, θέτοντας iy στη θέση του y παίρνουμε $\Im(x-y_0|y) = 0$ και, επομένως, $(x-y_0|y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Σε κάθε περίπτωση, $x - y_0 \perp Y$.
(iii) Αν $z_0 = x - y_0$, τότε $x = y_0 + z_0$ και $z_0 \perp Y$. Αν $x = y_1 + z_1$ με $y_1 \in Y$ και $z_1 \perp Y$, τότε $z_0 - z_1 = y_1 - y_0 \in Y \cap Y^\perp$, οπότε $(z_0 - z_1|z_0 - z_1) = 0$. Άρα $z_0 = z_1$ και $y_0 = y_1$.
(iv) Το $X = Y + Y^\perp$ μόλις αποδείχθηκε και, αν $x \in Y \cap Y^\perp$, τότε $(x|x) = 0$, οπότε $x = 0$.
(v) Γνωρίζουμε ήδη ότι $Y \subseteq (Y^\perp)^\perp$. Έστω $x \in (Y^\perp)^\perp$. Γράφουμε $x = y_0 + z_0$ με $y_0 \in Y$ και $z_0 \perp Y$, οπότε $x \perp z_0$ (αφού $z_0 \in Y^\perp$). Από τα $x \perp z_0$, $y_0 \perp z_0$ συνεπάγεται ότι $z_0 = x_0 - y_0 \perp z_0$ και, επομένως, $z_0 = 0$. Άρα $x = y_0 \in Y$.

Το (v) του τελευταίου θεωρήματος διατυπώνεται ισοδύναμα: αν ο Y είναι πλήρης υπόχωρος χώρου με εσωτερικό γινόμενο, τότε κάθε στοιχείο που είναι κάθετο σε όλα τα στοιχεία που είναι κάθετα στον Y ανήκει στον Y.

Θεώρημα 3.27 *Αν ο X είναι χώρος Hilbert, τότε για κάθε μη-κενό $S \subseteq X$ ισχύει $cl(<S>) = (S^\perp)^\perp$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με $Y = cl(<S>)$.

Το τελευταίο θεώρημα διατυπώνεται ισοδύναμα: αν το S είναι μη-κενό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert, τότε κάθε στοιχείο που είναι κάθετο σε όλα τα στοιχεία που είναι κάθετα στο S προσεγγίζεται απεριόριστα με γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του S.

3.2.6 Ορθοκανονικά σύνολα

Ορισμός 3.39 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$ και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται **ορθογώνιο** αν $a \ne 0$για κάθε $a \in A$ και $(a|a') = 0$ για κάθε $a, a' \in A$ με $a \ne a'$.*

*Το A ονομάζεται **ορθοκανονικό** αν $\|a\| = 1$για κάθε $a \in A$ και $(a|a') = 0$ για κάθε $a, a' \in A$ με $a \ne a'$.*

Είναι προφανές ότι κάθε ορθογώνιο σύνολο A μετατρέπεται σε ορθοκανονικό $A' = \{\frac{1}{\|a\|}\, a | a \in A\}$.

Ορισμός 3.40 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και ορθοκανονικό σύνολο $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται **maximal ορθοκανονικό σύνολο στο** X αν δεν υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο γνήσια μεγαλύτερο από το A.*

*Το A ονομάζεται **ορθοκανονική βάση του** X αν $cl(<A>) = X$.*

Με άλλα λόγια, το ορθοκανονικό σύνολο A είναι maximal αν δεν υπάρχει $x \in X$ με $x \neq 0$ και $x \perp A$. Επίσης, το A είναι ορθοκανονική βάση αν κάθε $x \in X$ προσεγγίζεται απεριόριστα από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του A.

Πρόταση 3.28 *Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο κάθε ορθοκανονική βάση είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο.*

Σε χώρο Hilbert κάθε maximal ορθοκανονικό σύνολο είναι ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη: Έστω ορθοκανονική βάση A του χώρου X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Αν υπάρχει $x \in X$ με $x \perp A$, τότε $x \perp cl(< A >) = X$, οπότε $x \perp x$ και, επομένως, $x = 0$. Άρα το A είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο.

Έστω ότι ο X είναι χώρος Hilbert και το A είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο. Θεωρούμε τον κλειστό υπόχωρο $Y = cl(< A >)$ και παίρνουμε τυχόν $x \in X$. Γράφουμε $x = y_0 + z_0$ με $y_0 \in Y$ και $z_0 \perp Y$. Τότε $z_0 \perp A$ και, επομένως, $z_0 = 0$. Άρα $x \in cl(< A >)$.

Θεώρημα 3.28 *Κάθε χώρος $X \neq \{0\}$ με εσωτερικό γινόμενο έχει maximal ορθοκανονικό σύνολο και κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση.*

Αν K είναι ορθοκανονικό σύνολο στον X, τότε το maximal ορθοκανονικό σύνολο ή η ορθοκανονική βάση μπορούν να επιλεγούν ώστε να περιέχουν το K.

Απόδειξη: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Σχηματίζουμε τη συλλογή $\mathcal{A}$ με στοιχεία όλα τα ορθοκανονικά υποσύνολα του X ή τα ορθοκανονικά σύνολα που περιέχουν το K, αν το K θεωρείται δεδομένο. Αν $a \neq 0$ είναι τυχόν στοιχείο του X, τότε το $\{\frac{1}{\|a\|}\, a\}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ ή, αν το K είναι δεδομένο, το K είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε στην $\mathcal{A}$ τη διάταξη του εγκλεισμού και παίρνουμε οποιαδήποτε ολικά διατεταγμένη υποσυλλογή $\mathcal{C}$. Ορίζουμε το $A_0 = \bigcup\{A | A \in \mathcal{C}\}$. Κάθε $a \in A_0$ ανήκει σε κάποιο $A \in \mathcal{C}$ και, επομένως, $\|a\| = 1$. Αν $a, a' \in A_0$ και $a \neq a'$, τότε υπάρχουν $A, A' \in \mathcal{C}$ ώστε $a \in A$ και $a' \in A'$. Τα a, a' ανήκουν σε ένα από τα A, A', οπότε $(a|a') = 0$. Άρα $A_0 \in \mathcal{A}$ και, προφανώς, είναι άνω-φράγμα της $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με το Λήμμα του Zorn υπάρχει maximal στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Θεώρημα 3.29 *(Ανισότητα Bessel.) Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$ και ορθοκανονικό σύνολο $A \subseteq X$. Για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$\sum_{a \in A} |(x|a)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιοδήποτε πεπερασμένο $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ και ορίζουμε το $z = x - \sum_{k=1}^{n} (x|a_k) a_k$. Τότε για κάθε j με $1 \leq j \leq n$ έχουμε

$$(z|a_j) = (x|a_j) - \sum_{k=1}^{n} (x|a_k)(a_k|a_j) = (x|a_j) - (x|a_j) = 0.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| z + \sum_{k=1}^{n} (x|a_k) a_k \right\|^2 \\ &= \|z\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x|a_k)|^2 \|a_k\|^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} |(x|a_k)|^2. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.24, συνεπάγεται $\sum_{a\in A} |(x|a)|^2 \leq \|x\|^2$.

Θεώρημα 3.30 *(F.Riesz, Fischer) Έστω χώρος Hilbert X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$ και ορθοκανονικό σύνολο $A \subseteq X$.*

Για κάθε σύνολο $\{\kappa_a \in F | a \in A\}$ με $\sum_{a\in A} |\kappa_a|^2 < +\infty$, η σειρά $\sum_{a\in A} \kappa_a\, a$ συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις στον X. Αν $x = \sum_{a\in A} \kappa_a\, a$, τότε
(i) $(x|a) = \kappa_a$ για κάθε $a \in A$,
(ii) $\|x\|^2 = \sum_{a\in A} |\kappa_a|^2$ και
(iii) $(x|y) = \sum_{a\in A} \kappa_a \overline{(y|a)}$ για κάθε $y \in X$.

Απόδειξη: Απο την Πρόταση 3.21 έχουμε ότι το $A_0 = \{a \in A | \kappa_a \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. Θεωρούμε οποιαδήποτε αρίθμηση $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots\}$, οπότε $\sum_{a\in A} |\kappa_a|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\kappa_{a_k}|^2$, όπου $N = card(A_0)$. Κατ' αρχήν υποθέτουμε ότι $N = +\infty$.

Αν θέσουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} \kappa_{a_k} a_k$, για κάθε n, m με $n < m$ έχουμε $\|s_m - s_n\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} \kappa_{a_k} a_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\kappa_{a_k}|^2 \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$. Άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $s_n \to x$. Δηλαδή $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{a_k} a_k$. Επίσης, προφανώς, $x \in cl(< A >)$ και $(x|a) = \lim(s_n|a) = \lim \sum_{k=1}^{n} \kappa_{a_k}(a_k|a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{a_k}(a_k|a) = \kappa_a$ για κάθε $a \in A$.

Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε άλλη αρίθμηση $A_0 = \{a'_1, a'_2, \ldots\}$, τότε υπάρχει πάλι το $x' = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{a'_k} a'_k \in X$ και $x' \in cl(< A >)$ με $(x'|a) = \kappa_a$ για κάθε $a \in A$. Τότε $x - x' \in cl(< A >)$ και $x - x' \perp cl(< A >)$ (αφού $x - x' \perp A$). Άρα $x - x' = 0$ και, επομένως, το άθροισμα της σειράς δεν εξαρτάται από την αρίθμηση του A_0. Επομένως η σειρά $\sum_{a\in A} \kappa_a\, a$ συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις στον X και $\sum_{a\in A} \kappa_a\, a = x = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{a_k} a_k$.

Για κάθε $y \in X$ έχουμε ότι $(x|y) = \lim(s_n|y) = \lim \sum_{k=1}^{n} \kappa_{a_k}(a_k|y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{a_k}(a_k|y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_{a_k} \overline{(y|a_k)} = \sum_{a\in A} \kappa_a \overline{(y|a)}$, αφού το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την αρίθμηση του A_0.

Αυτή είναι η ισότητα (iii) και, θέτοντας $y = x$, παίρνουμε την (ii).

Η περίπτωση $N < +\infty$ είναι τελείως στοιχειώδης.

Ορισμός 3.41 *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$, A ορθοκανονικό σύνολο στον X και $x \in X$. Οι αριθμοί $(x|a)$ ονομάζονται **συντελεστές Fourier του** x και η σειρά $\sum_{a\in A}(x|a)a$ ονομάζεται **σειρά Fourier του** x **ως προς το** A.*

Θεώρημα 3.31 *Έστω χώρος Hilbert X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$, επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ και ορθοκανονική βάση $A \subseteq X$. Τότε για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{a\in A}(x|a)\,a$ συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις στον X και*
(i) $x = \sum_{a\in A}(x|a)\,a$,
(ii) $\|x\|^2 = \sum_{a\in A}|(x|a)|^2$ και
(iii) $(x|y) = \sum_{a\in A}(x|a)\overline{(y|a)}$ για κάθε $y \in X$.
Οι δύο τελευταίες ισότητες ονομάζονται ταυτότητες Parseval.

Απόδειξη: Από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα έχουμε ότι η σειρά $\sum_{a\in A}(x|a)\,a$ συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις στον X. Αν θέσουμε $x' = \sum_{a\in A}(x|a)\,a$, τότε $(x'|a) = (x|a)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως $x - x' \perp A$ και, επειδή το A είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο, συνεπάγεται ότι $x = x'$. Άρα $x = \sum_{a\in A}(x|a)\,a$ και τα (ii), (iii) προκύπτουν από το προηγούμενο θεώρημα.

3.2.7 Ορθογώνιες προβολές

Ορισμός 3.42 *Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και υπόχωρος Y του X. Αν υπάρχει υπόχωρος Z ώστε*
(i) $Z + Y = X$ και $Z \cap Y = \{0\}$
(ii) $Z \perp Y$
*τότε ο Z ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα του** Y και λέμε ότι **ο** Y **έχει ορθογώνιο συμπλήρωμα**.*

Προφανώς, αν ο Z είναι ορθογώνιο συμπλήρωμα του Y, τότε ο Y είναι ορθογώνιο συμπλήρωμα του Z.

Πρόταση 3.29 *Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και υπόχωρος Y του X. Αν ο Y έχει ορθογώνιο συμπλήρωμα, τότε ο Y είναι κλειστός και το ορθογώνιο συμπλήρωμά του είναι ο $Y^\perp$.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει υπόχωρος Z ώστε $Z + Y = X$, $Z \cap Y = \{0\}$ και $Z \perp Y$. Αν η $\{y_n\}$ είναι στον Y και $y_n \to x \in X$, γράφουμε $x = z + y$ με $z \in Z$ και $y \in Y$. Τότε $(z|x) = \lim(z|y_n) = 0$ και, επειδή $(z|y) = 0$, συνεπάγεται ότι $(z|z) = (z|x) - (z|y) = 0$. Άρα $z = 0$ και $x = y \in Y$. Επομένως, ο Y είναι κλειστός.

Είναι προφανές ότι $Z \subseteq Y^\perp$. Παίρνουμε τυχόν $x \in Y^\perp$ και το γράφουμε $x = z + y$ με $z \in Z$ και $y \in Y$. Τότε $z \perp Y$ και $x \perp Y$, οπότε $y = x - z \perp Y$. Άρα $y = 0$ και $x = z \in Z$.

Πρόταση 3.30 *Κάθε πλήρης υπόχωρος χώρου με εσωτερικό γινόμενο και κάθε κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert έχει ορθογώνιο συμπλήρωμα.*

Απόδειξη: Άμεση από το Θεώρημα 3.26.

Ορισμός 3.43 *Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και υπόχωρος Y του X με ορθογώνιο συμπλήρωμα $Y^\perp$. Ορίζουμε συνάρτηση $P_Y : X \to X$ με τύπο $P_Y(x) = y$, όπου $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Y^\perp$.*

Συμμετρικά, ορίζεται και η $P_{Y^\perp} : X \to X$ με τύπο $P_{Y^\perp}(x) = z$.

*Η P_Y ονομάζεται **ορθογώνια προβολή του** X **στον** Y.*

Πρόταση 3.31 *Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και υπόχωρος Y του X με ορθογώνιο συμπλήρωμα $Y^{\perp}$. Τότε*
(1) $P_Y, P_{Y^\perp} \in \mathcal{L}(X, X)$ και $R(P_Y) = Y = N(P_{Y^\perp})$, $N(P_Y) = Y^\perp = R(P_{Y^\perp})$,
(2) $P_Y P_Y = P_Y$ και $P_{Y^\perp} P_{Y^\perp} = P_{Y^\perp}$,
(3) $P_Y + P_{Y^\perp} = I$ και $P_Y P_{Y^\perp} = P_{Y^\perp} P_Y = O$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής του X και O είναι ο μηδενικός τελεστής του X.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 3.32 *Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και πλήρης υπόχωρος Y του X, οπότε ο Y έχει ορθοκανονική βάση A και ορθογώνιο συμπλήρωμα. Τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$P_Y(x) = \sum_{a \in A} (x|a)\, a\,.$$

Απόδειξη: Αν $x \in X$, γράφουμε $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Y^\perp$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.31 στον Y και παίρνουμε $P_Y(x) = y = \sum_{a \in A}(y|a)\, a = \sum_{a \in A}(x|a)\, a$, αφού $(y|a) = (x|a) - (z|a) = (x|a)$.

3.2.8 Διαχωρισιμότητα

Θεώρημα 3.32 *(E. Schmidt) Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο και άπειρη διάσταση. Τότε*
(1) ο X έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση και κάθε ορθοκανονική βάση του X είναι αριθμήσιμη,
(2) αν ο X είναι χώρος Hilbert, τότε ο X είναι ισομετρικός με τον l^2.

Απόδειξη: (1) Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.

Αν C είναι οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύνολο στον X, τότε για κάθε $c \in C$ θεωρούμε τη μπάλα $B(c; \frac{\sqrt{2}}{2})$ και παρατηρούμε ότι οι μπάλες αυτές είναι ανά δύο ξένες. Για κάθε $c \in C$ υπάρχει $a \in A \cap B(c; \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ορίζεται, λοιπόν, συνάρτηση $C \ni c \mapsto a \in A$ η οποία είναι 1-1. Άρα το C είναι το πολύ αριθμήσιμο. Αν, επιπλέον, το C είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε είναι αριθμήσιμο. Διαφορετικά, θα ήταν $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, οπότε το $X = cl(<\{c_1, \ldots, c_n\}>) = <\{c_1, \ldots, c_n\}>$ θα είχε πεπερασμένη διάσταση. (Χρησιμοποιούμε το ότι κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης είναι κλειστός.)

Έστω n_1 ο ελάχιστος φυσικός ώστε $a_{n_1} \neq 0$. Κατόπιν, έστω n_2 ο ελάχιστος φυσικός ώστε το a_{n_2} να μην είναι πολλαπλάσιο του a_{n_1}. Συνεχίζοντας επαγωγικά, αν έχουμε βρεί τα $n_1, \ldots, n_{k-1}$, έστω n_k ο ελάχιστος φυσικός ώστε το a_{n_k} δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $a_{n_1}, \ldots, a_{n_{k-1}}$. Αν αυτή η διαδικασία σταματήσει σε κάποιο στάδιο, τότε υπάρχει N ώστε όλα τα $a_{N+1}, \ldots$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $a_1, \ldots, a_N$. Τότε, όμως, κάθε στοιχείο του X προσεγγίζεται απεριόριστα με στοιχεία του $\{a_1, \ldots, a_N\}$ ή γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του. Δηλαδή, $X = cl(<\{a_1, \ldots, a_N\}>) = <\{a_1, \ldots, a_N\}>$ και, επομένως, ο

X έχει πεπερασμένη διάσταση. Αυτό είναι άτοπο, οπότε δημιουργούμε το αριθμήσιμο σύνολο $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\} \subseteq A$.

Επειδή κανένα a_{n_k} δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $a_{n_1}, \ldots, a_{n_{k-1}}$, συνεπάγεται ότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Έστω τυχόν $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $a_j \in A$ ώστε $\|x - a_j\| < \epsilon$. Τότε υπάρχει k ώστε $j < n_k$, οπότε το a_j είναι γραμμικός συνδυασμός των $a_{n_1}, \ldots, a_{n_{k-1}}$. Άρα το τυχόν x προσεγγίζεται απεριόριστα από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του B και, επομένως, $X = cl(< B >)$.

Χάριν απλότητας, συμβολίζουμε $b_k = a_{n_k}$.

Ορίζουμε $c_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1$, οπότε $< \{c_1\} >=< \{b_1\} >$, και έστω ότι έχουμε ορίσει τα $c_1, \ldots, c_{k-1}$ ώστε το $\{c_1, \ldots, c_{k-1}\}$ να είναι ορθοκανονικό σύνολο και $< \{c_1, \ldots, c_{k-1}\} >=< \{b_1, \ldots, b_{k-1}\} >$.

Αν συμβολίσουμε $M_{k-1} =< \{c_1, \ldots, c_{k-1}\} >=< \{b_1, \ldots, b_{k-1}\} >$, τότε $b_k \notin M_{k-1}$, οπότε $b_k - P_{M_{k-1}} \neq 0$. Ορίζουμε $c_k = \frac{1}{\|b_k - P_{M_{k-1}}\|} (b_k - P_{M_{k-1}})$ και έχουμε ότι το c_k είναι κάθετο στον M_{k-1} με $\|c_k\| = 1$. Επίσης, το c_k είναι γραμμικός συνδυασμός των $b_1, \ldots, b_k$ και το b_k είναι γραμμικός συνδυασμός των $c_1, \ldots, c_k$. Επομένως το $\{c_1, \ldots, c_k\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο και $< \{c_1, \ldots, c_k\} >=< \{b_1, \ldots, b_k\} >$.

Είναι φανερό ότι δημιουργείται το σύνολο $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ το οποίο είναι ορθοκανονικό και έχει την ιδιότητα $< C >=< B >$, οπότε $X = cl(< B >) = cl(< C >)$. Άρα το C είναι αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση του X.

(2) Έστω $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ ορθοκανονική βάση του X. Αν $x \in X$, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.31, $\sum_{k=1}^{+\infty} |(x|c_k)|^2 = \|x\|^2 < +\infty$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $T : X \to l^2$ με τύπο

$$Tx = \big((x|c_1), (x|c_2), \ldots\big)$$

για κάθε $x \in X$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής.

Αν $Tx = Ty$, τότε $(x - y|c_k) = 0$ για κάθε k, οπότε $x - y = 0$, αφού το C είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο. Άρα ο T είναι 1-1.

Αν $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \in l^2$, τότε, από το Θεώρημα 3.30 έχουμε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $(x|c_k) = \kappa_k$ για κάθε k. Άρα $Tx = \kappa$ και ο T είναι επί.

Ο T είναι ισομετρία, αφού $\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x|c_k)|^2 = \|x\|^2$.

Το τελευταίο θεώρημα είναι αρκετά χρήσιμο, αφού πολλοί κλασσικοί χώροι Hilbert, όπως οι $L^2(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m)$ με Ω να είναι Borel-σύνολο στον $\mathbf{R^n}$ και m να είναι το μέτρο Lebesgue, είναι διαχωρίσιμοι.

3.2.9 Τρία παραδείγματα ορθοκανονικών βάσεων

Πρόταση 3.33 *Το σύνολο* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *αποτελεί ορθοκανονική βάση του* l^2.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 3.16, αν $C = \{e_1, e_2, \ldots\}$, τότε $cl(< C >) = l^2$. Το ότι το C είναι ορθοκανονικό είναι προφανές.

Θεωρούμε τον $L^2([-1, 1])$ ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}([-1, 1])$ και το μέτρο Lebesgue m. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.13, το $C([-1, 1])$ είναι πυκνό στον

$L^2([-1,1])$. Πράγματι, παίρνουμε $f \in L^2([-1,1])$ και $\epsilon > 0$ και θέτουμε $F = f$ στο $[-1,1]$ και $F = 0$ στο $\mathbf{R} \setminus [-1,1]$. Τότε $F \in L^2(\mathbf{R})$, οπότε υπάρχει G συνεχής και με συμπαγή φορέα στο $\mathbf{R}$ ώστε $\big(\int_{\mathbf{R}} |G - F|^2 dm\big)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$. Τότε ο περιορισμός g της G στο $[-1,1]$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ικανοποιεί την $\big(\int_{-1}^1 |g-f|^2 dm\big)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$. Από το Θεώρημα 3.11 συνεπάγεται ότι $\max_{[-1,1]} |g-P| < \epsilon$ για κάποιο πολυώνυμο P. Άρα, $\big(\int_{-1}^1 |P - f|^2 dm\big)^{\frac{1}{2}} \le \big(\int_{-1}^1 |g - f|^2 dm\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\int_{-1}^1 |g - P|^2 dm\big)^{\frac{1}{2}} \le \epsilon + \sqrt{2} \max_{[-1,1]} |g - P| < 3\epsilon$.

Αυτό μας λέει ότι το σύνολο $A = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$, όπου $p_k(t) = t^k$, έχει την ιδιότητα $cl(< A >) = L^2([-1,1])$.

Το A είναι, προφανώς, γραμμικά ανεξάρτητο και, επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.32 και να βρούμε ορθοκανονική βάση C του $L^2([-1,1])$ αποτελούμενη από πολυώνυμα. Υπολογίζουμε το πρώτο στοιχείο της βάσης $Q_0(t) = \frac{p_0(t)}{\|p_0\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Κατόπιν $Q_1(t) = \frac{p_1(t)-(p_1|Q_0)_2 Q_0(t)}{\|p_1-(p_1|Q_0)_2 Q_0\|_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$, $Q_2(t) = \frac{p_2(t)-(p_2|Q_0)_2 Q_0(t)-(p_2|Q_1)_2 Q_1(t)}{\|p_1-(p_1|Q_0)_2 Q_0-(p_2|Q_1)_2 Q_1\|_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(3t^2 -1)$ και ούτω καθ' εξής. Η συγκεκριμένη ορθοκανονική βάση $C = \{Q_0, Q_1, \ldots\}$ έχει άμεση σχέση με τα κλασσικά **πολυώνυμα Legendre,**

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\, D^n\big((t^2-1)^n\big), \qquad \text{με } D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Παρατηρούμε ότι το P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ και ότι για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ το $D^k\big((t^2-1)^n\big)$ μηδενίζεται στα $t = \pm 1$.

Αν $n < m$, τότε $2^{n+m} n! m! (P_n|P_m)_2 = \int_{-1}^1 D^n\big((t^2-1)^n\big) D^m\big((t^2-1)^m\big) dt = -\int_{-1}^1 D^{n+1}\big((t^2-1)^n\big) D^{m-1}\big((t^2-1)^m\big) dt = \cdots = (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 D^{2n+1}\big((t^2 - 1)^n\big) D^{m-n-1}\big((t^2-1)^m\big) dt = 0$, κατόπιν διαδοχικών ολοκληρώσεων κατά μέρη και παρατηρώντας ότι $D^{2n+1}\big((t^2-1)^n\big) = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο, $2^{2n} (n!)^2 (P_n|P_n)_2 = (-1)^n \int_{-1}^1 D^{2n}\big((t^2-1)^n\big)(t^2-1)^n dt = (2n)! \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$.

Επομένως, αν $Q_n^* = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n$, τότε το σύνολο $\{Q_0^*, Q_1^*, \ldots\}$ είναι ορθοκανονικό και κάθε Q_n^* έχει βαθμό n. Άρα $< \{Q_0, \ldots, Q_n\} > = < \{Q_0^*, \ldots, Q_n^*\} >$ για κάθε n, οπότε $Q_n = \kappa_n Q_n^* + \cdots + \kappa_0 Q_0^*$ για κάποια $\kappa_n, \ldots, \kappa_0 \in F$. Τότε $0 = (Q_n|Q_k^*)_2 = \kappa_k$ για $k = n-1, \ldots, 0$ και, επειδή τα Q_n, Q_n^* έχουν ίδια νόρμα, ίση με 1, συμπεραίνουμε $Q_n = Q_n^*$. Άρα αποδείξαμε το

Θεώρημα 3.33 *Ο $L^2([-1,1])$ έχει ως ορθοκανονική βάση το σύνολο $\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}\, P_n \,|\, n \in \mathbf{N}_0\}$, όπου P_n είναι το n-οστό πολυώνυμο Legendre. Για κάθε $f, g \in L^2([-1,1])$ ισχύει*
(1) $f = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2})(f|P_n)_2 P_n$,
(2) $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2}) |(f|P_n)_2|^2$,
(3) $(f|g)_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + \frac{1}{2})(f|P_n)_2 \overline{(g|P_n)_2}$,
όπου η σειρά στην (1) συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2([-1,1])$.

Έστω ο χώρος $L^2(Q_0) = L^2(Q_0, \mathcal{B}(Q_0), m)$, όπου $Q_0 = [0,1] \times \cdots \times [0,1] \subseteq \mathbf{R^n}$ και m είναι το μέτρο Lebesgue.

Παίρνουμε οποιαδήποτε $f \in L^2(Q_0)$ και θέτουμε $F = f$ στο Q_0 και $F = 0$ στο $\mathbf{R^n} \backslash Q_0$. Τότε $F \in L^2(\mathbf{R^n})$, οπότε υπάρχει G συνεχής και με συμπαγή φορέα στον $\mathbf{R^n}$ ώστε $\left(\int_{\mathbf{R^n}} |G-F|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$. Αν g είναι ο περιορισμός της G στο Q_0, τότε η g είναι συνεχής στο Q_0 και $\left(\int_{Q_0} |g-f|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$. Θεωρούμε ένα λίγο μικρότερο κύβο $Q_0' \subseteq Q_0$ και τη συνάρτηση $g_{Q_0,Q_0'}$ που συναντήσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.13. Τότε $\left(\int_{Q_0} |g-gg_{Q_0,Q_0'}|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{Q_0 \backslash Q_0'} |g|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$, αρκεί το $m(Q_0 \setminus Q_0')$ να είναι αρκετά μικρό. Επομένως, $\left(\int_{Q_0} |f - gg_{Q_0,Q_0'}|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\epsilon$, οπότε η f προσεγγίζεται απεριόριστα στον $L^2(Q_0)$ με συναρτήσεις $g_1 = gg_{Q_0,Q_0'}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο Q_0 και είναι ίσες με μηδέν στο σύνορο του Q_0. Γι' αυτόν το λόγο , η g_1 επεκτείνεται ως συνάρτηση 1-περιοδική ως προς όλες τις μεταβλητές και συνεχής στο $\mathbf{R^n}$. Την επέκταση συμβολίζουμε, επίσης, g_1.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.12, υπάρχει εκθετικό πολυώνυμο P ώστε $|g_1(x) - P(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbf{R^n}$. Τότε $\left(\int_{Q_0} |P - f|^2\, dm\right)^{\frac{1}{2}} \leq 3\epsilon$.

Άρα το σύνολο των εκθετικών πολυωνύμων είναι πυκνό στον $L^2(Q_0)$. Δηλαδή, η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e^{i2\pi(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)} \,|\, k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}\}$ ισούται με τον $L^2(Q_0)$. Επειδή το σύνολο αυτό είναι και ορθοκανονικό, έχουμε αποδείξει το

Θεώρημα 3.34 *Το σύνολο $\{e^{i2\pi(k|\cdot)} \,|\, k \in \mathbf{Z}^n\}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(Q_0)$. Για κάθε $f, g \in L^2(Q_0)$ ισχύει :*
(1) $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} (f|e^{i2\pi(k|\cdot)})_2 e^{i2\pi(k|\cdot)}$,
(2) $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |(f|e^{i2\pi(k|\cdot)})_2|^2$,
(3) $(f|g)_2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} (f|e^{i2\pi(k|\cdot)})_2 \overline{(g|e^{i2\pi(k|\cdot)})_2}$,
όπου η σειρά στο (1) συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2(Q_0)$.

Από τις σειρές που αναφέρονται σε αυτό το θεώρημα προέρχονται οι όροι: σειρά Fourier και συντελεστές Fourier. Ο Fourier μελέτησε τις σειρές αυτές, στην περίπτωση $n = 1$, σε σχέση με το πρόβλημα διάδοσης της θερμότητας.

3.3 Τοπικά κυρτοί χώροι

3.3.1 Τοπικά κυρτή τοπολογία

Ορισμός 3.44 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F και $\mathcal{P}$ μία μη-κενή συλλογή ημινορμών στον X με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ υπάρχει $p \in \mathcal{P}$ ώστε $p(x) > 0$. Τότε, η $\mathcal{P}$ ονομάζεται* ***διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον*** *X.*

Ορισμός 3.45 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F και $\mathcal{P}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον X.*

Ορίζουμε τη συλλογή $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ της οποίας στοιχεία είναι όλα τα υποσύνολα U^0 του X που γράφονται $U^0 = \{x \in X | p_1(x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_n(x) < \epsilon_n\}$, όπου το $n \in \mathbf{N}$, οι $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ και τα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ είναι αυθαίρετα.

Τέλος, ορίζουμε τη συλλογή $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ της οποίας στοιχείο είναι κάθε σύνολο O με την ιδιότητα: για κάθε $x \in O$ υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ώστε $x + U^0 \subseteq O$.

Πρόταση 3.34 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F και $\mathcal{P}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον X.*
(1) Κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ περιέχει το 0, είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφά τον X.
(2) Αν $U^0_1, \ldots, U^0_m \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$, τότε $U^0_1 \cap \cdots \cap U^0_m \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$.
(3) Κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ανήκει στην $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Απόδειξη: (1) Εύκολο, αφού κάθε σύνολο $\{x \in X | p(x) < \epsilon\}$ περιέχει το 0, είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφά τον X.
(2) Προφανές.
(3) Έστω $U^0 = \{x \in X | p_1(x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_n(x) < \epsilon_n\}$ με $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$. Παίρνουμε τυχόν $x \in U^0$ και $\delta_j = \epsilon_j - p_j(x) > 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Θέτουμε $V^0 = \{y \in X | p_1(y) < \delta_1\} \cap \cdots \cap \{y \in X | p_n(y) < \delta_n\}$, το οποίο είναι στοιχείο της $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$, και βλέπουμε εύκολα ότι $x + V^0 \subseteq U^0$. Άρα $U^0 \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Θεώρημα 3.35 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F και $\mathcal{P}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον X. Η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι η ελάχιστη τοπολογία στον X με τις ιδιότητες:*
(i) ο X με την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι χώρος Hausdorff,
(ii) οι πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : F \times X \to X$ είναι συνεχείς,
(iii) κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Τώρα, έστω $O_1, \ldots, O_m \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Για τυχόν $x \in O_1 \cap \cdots \cap O_m$ υπάρχουν $U^0_1, \ldots, U^0_m \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ώστε $x + U^0_j \subseteq O_j$ για κάθε j. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $U^0 = U^0_1 \cap \cdots \cap U^0_m \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ και τότε $x + U^0 \subseteq O_1 \cap \cdots \cap O_m$. Άρα $O_1 \cap \cdots \cap O_m \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Τέλος, έστω $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε υπο-συλλογή της $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ και $O = \bigcup\{O' | O' \in \mathcal{C}\}$. Για τυχόν $x \in O$ υπάρχει $O' \in \mathcal{C}$ ώστε $x \in O'$, οπότε υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ με $x + U^0 \subseteq O'$. Τότε $x + U^0 \subseteq O$ και, επομένως, $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Άρα η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι τοπολογία στον X.

Έστω $x \in X$ και $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$. Τότε $x + U^0 \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Πράγματι, αν πάρουμε τυχόν $z \in x + U^0$, τότε $z - x \in U^0$ και από την προηγούμενη πρόταση συνεπάγεται ότι υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ώστε $z - x + V^0 \subseteq U^0$. Επομένως, $z + V^0 \subseteq x + U^0$.

Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Παίρνουμε $p \in \mathcal{P}$ ώστε $\delta = p(x - y) > 0$ και το $U^0 = \{z \in X | p(z) < \frac{1}{2}\delta\} \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, τα $x + U^0, y + U^0$ είναι ανοικτά και, όπως φαίνεται πολύ εύκολα, ξένα μεταξύ τους. Άρα ο X είναι χώρος Hausdorff.

Έστω $x, y \in X$ και $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ με $x + y \in O$. Υπάρχει $U^0 = \{z \in X | p_1(z) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z \in X | p_n(z) < \epsilon_n\}$ με $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ ώστε $x + y + U^0 \subseteq O$. Παίρνουμε $V^0 = \{z \in X | p_1(z) < \frac{1}{2}\epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z \in X | p_n(z) < \frac{1}{2}\epsilon_n\} \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$, οπότε $(x + V^0) + (y + V^0) = x + y + V^0 + V^0 \subseteq x + y + U^0 \subseteq O$. Τότε, τα $x + V^0, y + V^0$ είναι ανοικτά (δηλαδή, ανήκουν στην $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$), περιέχουν τα x, y και η $+$ απεικονίζει το $(x+V^0)\times(y+V^0)$ στο O. Άρα η πρόσθεση είναι συνεχής στο $(x,y)\in X\times X$.

Έστω $\kappa\in F$, $x\in X$ και $O\in\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ με $\kappa x\in O$. Υπάρχει $U^0=\{z\in X|p_1(z)<\epsilon_1\}\cap\cdots\cap\{z\in X|p_n(z)<\epsilon_n\}$ με $p_1,\ldots,p_n\in\mathcal{P}$ ώστε $\kappa x+U^0\subseteq O$. Παίρνουμε $\delta_j<\min(1,\frac{\epsilon_j}{p_j(x)+|\kappa|+1})$, $\delta\le\min(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ και $N=\{\lambda\in F||\lambda-\kappa|<\delta\}$, $V^0=\{z\in X|p_1(z)<\delta_1\}\cap\cdots\cap\{z\in X|p_n(z)<\delta_n\}\in\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το $N\times(x+V^0)$ απεικονίζεται με τον πολλαπλασιασμό στο $\kappa x+U^0$. Επειδή το $N\ni\kappa$ είναι ανοικτό στο F και το $x+V^0\ni x$ είναι ανοικτό στον X, συνεπάγεται ότι ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής στο (κ,x).

Τέλος, έστω $x\in X$, $p\in\mathcal{P}$ και $\epsilon>0$. Παίρνουμε $U^0=\{z\in X|p(z)<\epsilon\}\in\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$, οπότε το $x+U^0\ni x$ είναι ανοικτό στον X και για κάθε $y\in x+U^0$ έχουμε $y-x\in U^0$, οπότε $|p(y)-p(x)|\le p(y-x)<\epsilon$. Άρα η p είναι συνεχής στο x.

Έστω, τώρα, οποιαδήποτε τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X με τις ιδιότητες $(i),(ii)$ και (iii). Τότε για κάθε $\epsilon>0$ και κάθε $p\in\mathcal{P}$, το $\{x\in X|p(x)<\epsilon\}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$ ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού στο F μέσω συνεχούς συνάρτησης. Άρα και κάθε τομή πεπερασμένου πλήθους τέτοιων συνόλων, δηλαδή κάθε στοιχείο της $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$, ανήκει στην $\mathcal{T}$. Επειδή η πρόσθεση είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι, γιά κάθε $U^0\in\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ και κάθε $x\in X$, το $x+U^0$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Τώρα, κάθε στοιχείο O της $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι, εξ ορισμού, ένωση συνόλων της μορφής $x+U^0$ με $x\in X$ και $U^0\in\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$. Άρα, επειδή η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία, κάθε O της $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Επομένως, $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\subseteq\mathcal{T}$.

Ορισμός 3.46 *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος με τοπολογία $\mathcal{T}$ και $x\in X$. Αν $\mathcal{N}^x$ είναι μία συλλογή από ανοικτά σύνολα που περιέχουν το x ώστε για κάθε ανοικτό σύνολο O το οποίο περιέχει το x υπάρχει $U\in\mathcal{N}^x$ με $U\subseteq O$, τότε η $\mathcal{N}^x$ ονομάζεται* ***βάση ανοικτών περιοχών του** x.*

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, σε κάθε μετρικό χώρο X με μετρική d η συλλογή $\{B(x;\frac{1}{n})|n\in\mathbf{N}\}$ των μπαλών με κέντρο το x αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του x.

Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος επί του F και $\mathcal{P}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον X, τότε η $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0 στην τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ και για κάθε $x\in X$ η συλλογή $\{x+U^0|U^0\in\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}\}$ αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του x.

Ορισμός 3.47 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F και μία τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού να είναι συνεχείς και ο X να είναι Hausdorff. Αν υπάρχει βάση ανοικτών περιοχών του 0 όλα τα στοιχεία της οποίας είναι κυρτά, ισορροπημένα και απορροφούν τον X, τότε λέμε ότι* ***η $\mathcal{T}$ είναι τοπικά κυρτή τοπολογία*** *και ότι* ***ο X είναι τοπικά κυρτός χώρος***.

Επομένως, αν ο X είναι ένας γραμμικός χώρος επί του F και $\mathcal{P}$ είναι μία διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον X, τότε ο X με την τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ είναι τοπικά κυρτός χώρος. Το επόμενο θεώρημα εκφράζει το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.36 *Έστω X γραμμικός χώρος επί του F με μία τοπικά κυρτή τοπολογία. Τότε υπάρχει διαχωρίζουσα συλλογή $\mathcal{P}$ ημινορμών στον X ώστε η τοπολογία του να ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{T}$ η τοπολογία στον X ώστε ο X να είναι Hausdorff, οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού να είναι συνεχείς και να υπάρχει βάση $\mathcal{N}^0$ ανοικτών περιοχών του 0 όλα τα στοιχεία της οποίας είναι κυρτά, ισορροπημένα και απορροφούν τον X.

Θεωρούμε για κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0$ το αντίστοιχο συναρτησοειδές-Minkowski p_{U^0}, το οποίο είναι ημινόρμα, και τη συλλογή $\mathcal{P} = \{p_{U^0} | U^0 \in \mathcal{N}^0\}$.

Αν $x \in X$ και $x \neq 0$, τότε υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x \notin U^0$. Επομένως, $p_{U^0}(x) \geq 1$, οπότε η $\mathcal{P}$ είναι διαχωρίζουσα.

Έστω $U^0 \in \mathcal{N}^0$ και $x \in U^0$. Επειδή το U^0 είναι ανοικτό, ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής και $1 \cdot x \in U^0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\kappa \cdot x \in U^0$ για κάθε $\kappa \in F$ με $|\kappa - 1| < \delta$. Ειδικώτερα, $(1 + \frac{1}{2}\delta)x \in U^0$, οπότε $p_{U^0}((1 + \frac{1}{2}\delta)x) \leq 1$ και, επομένως, $p_{U^0}(x) < 1$. Άρα $U^0 \subseteq \{x \in X | p_{U^0}(x) < 1\}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι γενική ιδιότητα, οπότε $U^0 = \{x \in X | p_{U^0}(x) < 1\}$. Αμέσως συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $\{x \in X | p_{U^0}(x) < \epsilon\} = \epsilon U^0$ και, επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής, κάθε σύνολο $\{x \in X | p_{U^0}(x) < \epsilon\}$ είναι ανοικτό. Άρα και κάθε τομή πεπερασμένου πλήθους τέτοιων συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Δηλαδή, η συλλογή $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ αποτελείται από ανοικτές (στην $\mathcal{T}$) περιοχές του 0. Επιπλέον, είναι φανερό ότι η $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ αποτελεί βάση περιοχών του 0 για την $\mathcal{T}$, αφού τα σύνολα $U^0 = \{x \in X | p_{U^0}(x) < 1\}$ είναι στοιχεία της $\mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ και η συλλογή τους, $\mathcal{N}^0$, αποτελεί βάση περιοχών του 0 για την $\mathcal{T}$.

Έστω, τώρα, O ανοικτό σύνολο στην τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Παίρνουμε τυχόν $x \in O$, οπότε υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ώστε $x + V^0 \subseteq O$. Όπως είδαμε, $V^0 \in \mathcal{T}$ και, επειδή η πρόσθεση είναι συνεχής ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$, συνεπάγεται ότι το $x + V^0$ είναι ανοικτό στην $\mathcal{T}$. Άρα το O είναι ανοικτό στην $\mathcal{T}$.

Έστω O ανοικτό στην $\mathcal{T}$ και τυχόν $x \in O$. Επειδή η πρόσθεση είναι συνεχής και $0 + x \in O$, υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $U^0 + x \subseteq O$. Το U^0 είναι ανοικτό στην τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ και, επειδή η πρόσθεση είναι συνεχής και ως προς αυτήν την τοπολογία, το $U^0 + x$ είναι ανοικτό στην $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Άρα το O είναι ανοικτό στην $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Άρα οι τοπολογίες $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ και $\mathcal{T}$ ταυτίζονται.

Αν μία διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών $\mathcal{P}$ στον γραμμικό χώρο X αποτελείται από μία μόνον ημινόρμα, $\mathcal{P} = \{p\}$, τότε αυτή πρέπει να είναι νόρμα, $p = \|\cdot\|$, και τότε η τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ έχει ως βάση ανοικτών περιοχών του 0 τη συλλογή όλων των μπαλών $\{x \in X | \, \|x\| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$. Επομένως, η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι **κάθε χώρος με νόρμα είναι τοπικά κυρτός χώρος.**

Στον Ορισμό 3.46 θεωρείται δεδομένη μία τοπολογία στον γραμμικό χώρο X με κάποια βάση ανοικτών περιοχών του 0. Το επόμενο θεώρημα περιγράφει τις προϋποθέσεις και τον τρόπο με τον οποίο μία δεδομένη συλλογή υποσυνόλων ενός γραμμικού χώρου επάγει τοπικά κυρτή τοπολογία στο χώρο ώστε η συλλογή αυτή να αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0 για αυτήν την τοπολογία.

Θεώρημα 3.37 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και μη-κενή συλλογή $\mathcal{N}^0$ υποσυνόλων του X με τις ιδιότητες:*
(1) κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0$ είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφά τον X,
(2) για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x \notin U^0$,

(3) για κάθε $U^0, V^0 \in \mathcal{N}^0$ υπάρχει $W^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $W^0 \subseteq U^0 \cap V^0$,
(4) για κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0$ υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $V^0 + V^0 \subseteq U^0$,
(5) για κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0$ και $x \in U^0$ υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x + V^0 \subseteq U^0$.

Τότε υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X με τις ιδιότητες:
(i) ο X με την $\mathcal{T}$ είναι τοπικά κυρτός χώρος,
(ii) η $\mathcal{N}^0$ αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0 στον X με την $\mathcal{T}$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε ο X να είναι χώρος Hausdorff, οι πράξεις να είναι συνεχείς και η $\mathcal{N}^0$ να αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0 στον X. Επίσης, ότι η τοπολογία με αυτές τις ιδιότητες είναι μοναδική.

Ορίζουμε τη συλλογή $\mathcal{T}$ στοιχεία της οποίας είναι όλα τα $O \subseteq X$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in O$ υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x + U^0 \subseteq O$.

Προφανώς, τα $\emptyset, X$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$. Αν $\mathcal{C}$ είναι οποιαδήποτε υπο-συλλογή της $\mathcal{T}$ και $O = \bigcup\{O' | O' \in \mathcal{C}\}$, τότε $O \in \mathcal{T}$. Πράγματι, για τυχόν $x \in O$ υπάρχει $O' \in \mathcal{C}$ ώστε $x \in O'$, οπότε υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x + U^0 \subseteq O' \subseteq O$. Τέλος, αν $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$ και πάρουμε τυχόν $x \in O_1 \cap \cdots \cap O_n$, τότε υπάρχουν $U_1^0, \ldots, U_n^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x + U_1^0 \subseteq O_1, \ldots, x + U_n^0 \subseteq O_n$. Από την ιδιότητα (2) συνεπάγεται ότι υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $U^0 \subseteq U_1^0 \cap \cdots \cap U_n^0$ και, επομένως, $x + U^0 \subseteq O$. Άρα $O \in \mathcal{T}$.

Επομένως η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στον X.

Από την ιδιότητα (5) συνεπάγεται ότι κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0$ είναι ανοικτό (δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{T}$) και, επομένως, από τον ορισμό της $\mathcal{T}$ συνεπάγεται ότι η $\mathcal{N}^0$ αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0 για την $\mathcal{T}$. Ακόμη, αν $U^0 \in \mathcal{N}^0$ και $x \in X$ και πάρουμε τυχόν $y \in x + U^0$, τότε $y - x \in U^0$, οπότε υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $y - x + V^0 \subseteq U^0$. Άρα $y + V^0 \subseteq x + U^0$ και, επομένως, το $x + U^0$ είναι ανοικτό.

Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Από τις ιδιότητες (2) και (4) συνεπάγεται ότι υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x - y \notin V^0 + V^0$. Αν $z \in (x + V^0) \cap (y + V^0)$, τότε $z - x \in V^0$ και $z - y \in V^0$ και, επειδή το V^0 είναι ισορροπημένο, $x - z \in V^0$ και $z - y \in V^0$. Άρα $x - y = (x - z) + (z - y) \in V^0 + V^0$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε τα ανοικτά σύνολα $x + V^0$, $y + V^0$ τα οποία περιέχουν τα x, y είναι ξένα. Άρα ο X είναι χώρος Hausdorff.

Αν $x, y \in X$ και το O είναι ανοικτό με $x + y \in O$, λόγω της (4), υπάρχει $V^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $(x + V^0) + (y + V^0) = x + y + V^0 + V^0 \subseteq O$. Τα $x + V^0 \ni x$ και $y + V^0 \ni y$ είναι ανοικτά και η πρόσθεση απεικονίζει το $(x + V^0) \times (y + V^0)$ στο O. Άρα η πρόσθεση είναι συνεχής στο τυχόν $(x, y) \in X \times X$.

Έστω $\kappa \in F$, $x \in X$ και ανοικτό O με $\kappa x \in O$. Παίρνουμε $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $\kappa x + U^0 \subseteq O$. Με βάση την (4) παίρνουμε $V^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $V^0 + V^0 \subseteq U^0$. Επειδή το V^0 είναι ισορροπημένο και απορροφά τον X, υπάρχει $\epsilon \in (0, 1]$ ώστε $\mu x \in V^0$ για κάθε $\mu \in F$ με $|\mu| \leq \epsilon$. Κατόπιν, βρίσκουμε αρκετά μεγάλο n ώστε $2^n \geq |\kappa| + 1$ και, με βάση την (4), $W^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $W^0 + \cdots + W^0 \subseteq V^0$, όπου το άθροισμα έχει 2^n όρους. Επειδή $0 \in W^0$, συνεπάγεται ότι $|\kappa| W^0 + W^0 \subseteq V^0$, οπότε συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα, έχουμε για κάθε $\lambda \in F$ με $|\lambda - \kappa| < \epsilon$ και κάθε $y \in x + W^0$ ότι $\lambda y = \kappa x + (\lambda - \kappa) x + (\lambda - \kappa)(y - x) + \kappa(y - x) \in \kappa x + V^0 + \epsilon W^0 + |\kappa| W^0 \subseteq \kappa x + V^0 + W^0 + |\kappa| W^0 \subseteq \kappa x + V^0 + V^0 \subseteq \kappa x + U^0 \subseteq O$.

Τώρα, το $N = \{\lambda \in F \,|\, |\lambda - \kappa| < \epsilon\} \ni \kappa$ είναι ανοικτό στο F, το $x + W^0 \ni x$ είναι ανοικτό στον X και ο πολλαπλασιασμός απεικονίζει το $N \times (x + W^0)$ στο O. Άρα ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής στο τυχόν $(\kappa, x) \in F \times X$.

Τέλος, έστω $\mathcal{T}'$ τοπολογία στον X ώστε ο X να είναι τοπικά κυρτός χώρος και η $\mathcal{N}^0$ να είναι βάση ανοικτών περιοχών του 0. Επειδή η πρόσθεση είναι συνεχής και ως προς τις δύο τοπολογίες συνεπάγεται ότι κάθε μεταφορά είναι ομοιομορφισμός του X και ως προς τις δύο τοπολογίες, οπότε είναι προφανές ότι η συλλογή $\mathcal{N}^x = \{x + U^0 | U^0 \in \mathcal{N}^0\}$ είναι βάση ανοικτών περιοχών του $x \in X$ και ως προς τις δύο τοπολογίες. Αν το O είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}'$ και πάρουμε τυχόν $x \in O$, τότε υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0$ ώστε $x + U^0 \subseteq O$. Άρα το O είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}$. Συμμετρικά, κάθε σύνολο ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}$ είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}'$.

Τα Θεωρήματα 3.35 και 3.37 δίνουν δύο τρόπους με τους οποίους ένας γραμμικός χώρος εφοδιάζεται με τοπικά κυρτή τοπολογία: βάσει μίας συλλογής ημινορμών ή βάσει μίας συλλογής 'περιοχών' του μηδενός. Το Θεώρημα 3.36 λέει ότι οι δύο αυτοί τρόποι είναι ισοδύναμοι.

Τέλος, είναι χρήσιμο να δούμε πότε δύο συλλογές ημινορμών ή δύο συλλογές 'περιοχών' του μηδενός ορίζουν την ίδια τοπολογία.

Πρόταση 3.35 *Έστω γραμμικός χώρος X και $\mathcal{N}^1$ βάση ανοικτών περιοχών του 0 για μία τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_1$ του X και $\mathcal{N}^2$ βάση ανοικτών περιοχών του 0 για μία δεύτερη τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_2$ του X. Οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται αν και μόνον αν για κάθε $U^1 \in \mathcal{N}^1$ υπάρχει $U^2 \in \mathcal{N}^2$ ώστε $U^2 \subseteq U^1$ και για κάθε $U^2 \in \mathcal{N}^2$ υπάρχει $U^1 \in \mathcal{N}^1$ ώστε $U^1 \subseteq U^2$.*

Απόδειξη: Έστω ότι οι $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ ταυτίζονται. Κάθε $U^1 \in \mathcal{N}^1$ είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_1$, οπότε είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_2$. Επειδή $0 \in U^1$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $U^2 \in \mathcal{N}^2$ ώστε $U^2 \subseteq U^1$. Συμμετρικά αποδεικνύεται και ότι για κάθε $U^2 \in \mathcal{N}^2$ υπάρχει $U^1 \in \mathcal{N}^1$ ώστε $U^1 \subseteq U^2$.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $U^1 \in \mathcal{N}^1$ υπάρχει $U^2 \in \mathcal{N}^2$ ώστε $U^2 \subseteq U^1$ και για κάθε $U^2 \in \mathcal{N}^2$ υπάρχει $U^1 \in \mathcal{N}^1$ ώστε $U^1 \subseteq U^2$. Παίρνουμε τυχόν O ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_1$. Τότε για κάθε $x \in O$, το $-x + O$ είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_1$ και περιέχει το 0. Άρα υπάρχει $U^1 \in \mathcal{N}^1$ ώστε $U^1 \subseteq -x + O$. Τότε, όμως, υπάρχει και $U^2 \in \mathcal{N}^2$ ώστε $U^2 \subseteq -x + O$. Τώρα, το $x + U^2 \ni x$ είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_2$ και $x + U^2 \subseteq O$. Αφού το x είναι τυχόν στοιχείο του O, συνεπάγεται ότι το O είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_2$. Συμμετρικά αποδεικνύεται και ότι, αν το O είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_2$, τότε είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_1$.

Λήμμα 3.5 *Έστω γραμμικός χώρος X, ημινόρμες $p, p_1, \ldots, p_n$ στον X και α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Τότε $\{x \in X | p_1(x) < \alpha_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_n(x) < \alpha_n\} \subseteq \{x \in X | p(x) < \alpha\}$ αν και μόνον αν $p(x) \leq \alpha \max_{1 \leq k \leq n} \frac{p_k(x)}{\alpha_k}$.*

Απόδειξη: Αν $p(x) \leq \alpha \max_{1 \leq k \leq n} \frac{p_k(x)}{\alpha_k}$ και $p_1(x) < \alpha_1, \ldots, p_n(x) < \alpha_n$, τότε $p(x) < \alpha$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\{x \in X | p_1(x) < \alpha_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_n(x) < \alpha_n\} \subseteq \{x \in X | p(x) < \alpha\}$ και παίρνουμε τυχόν $x \in X$. Αν $p_1(x) = \cdots = p_n(x) = 0$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει $p_1(tx) = 0 < \alpha_1, \ldots, p_n(tx) = 0 < \alpha_n$, οπότε $tp(x) = p(tx) < \alpha$. Άρα $p(x) = 0 \le \alpha \max_{1\le k\le n} \frac{p_k(x)}{\alpha_k}$.

Αν $p_k(x) > 0$ για τουλάχιστον ένα k, τότε για τυχόν $t > 1$ θέτουμε $z = \frac{1}{t \max_{1\le k\le n} \frac{p_k(x)}{\alpha_k}} x$. Για κάθε j παίρνουμε $p_j(z) \le \frac{p_j(x)}{t\frac{p_j(x)}{\alpha_j}} < \alpha_j$. Επομένως, $p(z) < \alpha$, οπότε $p(x) < \alpha\, t \max_{1\le k\le n} \frac{p_k(x)}{\alpha_k}$ και, παίρνοντας όριο όταν $t \to 1+$, συμπεραίνουμε ότι $p(x) \le \alpha \max_{1\le k\le n} \frac{p_k(x)}{\alpha_k}$ και σ′ αυτήν την περίπτωση.

Πρόταση 3.36 *Έστω γραμμικός χώρος X και $\mathcal{P}^1$ διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών που επάγει την τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^1}$ στον X και $\mathcal{P}^2$ διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών που επάγει την τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^2}$ στον X. Οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται αν και μόνον αν για κάθε $p^{(1)} \in \mathcal{P}^1$ υπάρχουν $C > 0$ και $p_1^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)} \in \mathcal{P}^2$ ώστε $p^{(1)} \le C \max_{1\le k\le n} p_k^{(2)}$ και για κάθε $p^{(2)} \in \mathcal{P}^2$ υπάρχουν $D > 0$ και $p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)} \in \mathcal{P}^1$ ώστε $p^{(2)} \le D \max_{1\le k\le m} p_k^{(1)}$.*

Απόδειξη: Έστω ότι οι $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^1}$ και $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^2}$ ταυτίζονται. Για κάθε $p^{(1)} \in \mathcal{P}^1$ το $\{x \in X | p^{(1)}(x) < 1\}$ είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^1}$, και, επομένως, και ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^2}$, και περιέχει το 0. Άρα υπάρχουν $p_1^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)} \in \mathcal{P}^2$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ ώστε $\{x \in X | p_1^{(2)}(x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_n^{(2)}(x) < \epsilon_n\} \subseteq \{x \in X | p(x) < 1\}$. Από το προηγούμενο λήμμα συνεπάγεται ότι, με $C = \frac{1}{\min_{1\le k\le n} \epsilon_k}$, ισχύει $p^{(1)} \le C \max_{1\le k\le n} p_k^{(2)}$. Συμμετρικά αποδεικνύεται ότι για κάθε $p^{(2)} \in \mathcal{P}^2$ υπάρχουν $D > 0$ και $p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)} \in \mathcal{P}^1$ ώστε $p^{(2)} \le D \max_{1\le k\le m} p_k^{(1)}$.

Τέλος, η απόδειξη του αντίστροφου είναι παρόμοια και αφήνεται ως εύκολη άσκηση.

3.3.2 Χώροι Fréchet.

Πρόταση 3.37 *Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(1) Ο X είναι μετρικοποιήσιμος.
(2) Υπάρχει αριθμήσιμη βάση ανοικτών περιοχών του 0 στον X.
(3) Υπάρχει αριθμήσιμη διαχωρίζουσα συλλογή $\mathcal{P}$ ημινορμών στον X ώστε η τοπολογία του να ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι ο X είναι μετρικοποιήσιμος, οπότε υπάρχει μετρική d στον X ώστε η τοπολογία του X να ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγεται από την d. Τότε η αριθμήσιμη συλλογή μπαλών $B(0; \frac{1}{n}) = \{x \in X | d(x, 0) < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$, αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0 στον X.
(2) Έστω ότι η $\{V_n | n \in \mathbf{N}\}$ είναι βάση ανοικτών περιοχών του 0 στον X. Έστω $\mathcal{P}'$ συλλογή ημινορμών στον X ώστε η τοπολογία του να ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$. Τότε για κάθε n υπάρχει $U_n^0 = \{x \in X | p_{n,1}(x) < \epsilon_{n,1}\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_{n,m_n}(x) < \epsilon_{n,m_n}\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}'}^0$, με $p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n} \in \mathcal{P}'$, ώστε $U_n^0 \subseteq V_n$.

Θεωρούμε την αριθμήσιμη συλλογή $\mathcal{P} = \cup_{n=1}^{+\infty} \{p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n}\}$.

Αν $x \in X$ με $x \ne 0$, επειδή ο X είναι χώρος Hausdorff, υπάρχει κάποιο n ώστε $x \notin V_n$. Επομένως $p_{n,j}(x) > 0$ για τουλάχιστον ένα $j = 1, \ldots, m_n$. Άρα η $\mathcal{P}$ είναι διαχωρίζουσα.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι οι τοπολογίες $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ και $\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$ ταυτίζονται. Έστω O ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Παίρνουμε τυχόν $x \in O$, οπότε υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ώστε $x + U^0 \subseteq O$. Επειδή, όμως, $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}'}$, (αφού $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$), συνεπάγεται ότι το O είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$. Αντιστρόφως, έστω ότι το O είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}$. Αν $x \in O$, υπάρχει V_n ώστε $x + V_n \subseteq O$. Οπότε για την $U^0_n \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ισχύει ότι $x + U^0_n \subseteq O$ και, επομένως, το O είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.
(3) Τέλος, έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη διαχωρίζουσα συλλογή $\mathcal{P} = \{p_n | n \in \mathbf{N}\}$ ημινορμών στον X ώστε η τοπολογία του να ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbf{R}^+_0$ με τύπο

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

για κάθε $x, y \in X$.

Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθούν οι ιδιότητες της μετρικής για την d. Για παράδειγμα, αν $d(x, y) = 0$, τότε $p_n(x - y) = 0$ για κάθε n και, επειδή η $\mathcal{P}$ είναι διαχωρίζουσα, συνεπάγεται ότι $x = y$. Επίσης, η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της στοιχειώδους ανισότητας $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι η τοπολογία που επάγεται από την d ταυτίζεται με την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Έστω σύνολο $O \subseteq X$ ανοικτό ως προς την d. Παίρνουμε τυχόν $x \in O$, οπότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\{y \in X | d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O$. Θεωρούμε N ώστε $\frac{1}{2^N} < \frac{1}{2}\epsilon$ και το $U^0 = \{z \in X | p_1(z) < \frac{1}{2}\epsilon\} \cap \cdots \cap \{z \in X | p_N(z) < \frac{1}{2}\epsilon\} \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$. Για κάθε $z \in U^0$ ισχύει $d(x, x+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(z)}{1+p_n(z)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} p_n(z) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}\epsilon \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^N} < \epsilon$. Επομένως, $x + U^0 \subseteq \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O$, οπότε το O είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Έστω O ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ και παίρνουμε $x \in O$. Τότε υπάρχουν $p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{P}$ και $U^0 = \{z \in X | p_1(z) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z \in X | p_N(z) < \epsilon_N\} \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{P}}$ ώστε $x + U^0 \subseteq O$. Θεωρούμε $\epsilon = \min(\frac{1}{2} \frac{\epsilon_1}{1+\epsilon_1}, \ldots, \frac{1}{2^N} \frac{\epsilon_N}{1+\epsilon_N})$, οπότε για κάθε $y \in X$ με $d(x, y) < \epsilon$ έχουμε $\frac{1}{2^n} \frac{p_n(y-x)}{1+p_n(y-x)} < \frac{1}{2^n} \frac{\epsilon_n}{1+\epsilon_n}$ για κάθε n με $1 \leq n \leq N$. Τότε $p_n(y - x) < \epsilon_n$ για κάθε n με $1 \leq n \leq N$ και, επομένως, $y \in x + U^0$. Άρα $\{y \in X | d(x, y) < \epsilon\} \subseteq x + U^0 \subseteq O$. Άρα το O είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία που επάγεται από την d.

Ορισμός 3.48 *Ο X ονομάζεται **χώρος Fréchet** αν είναι τοπικά κυρτός, μετρικοποιήσιμος και πλήρης.*

Οι χώροι Banach και οι χώροι Hilbert αποτελούν τα προφανή παραδείγματα χώρων Fréchet και στη συνέχεια θα δούμε αρκετά παραδείγματα τοπικά κυρτών χώρων και χώρων Fréchet οι οποίοι δεν είναι χώροι με νόρμα.

Πρόταση 3.38 *(Kolmogorov) Έστω τοπικά κυρτός χώρος X. Τότε η τοπολογία του X επάγεται από κάποια νόρμα αν και μόνον αν υπάρχει ανοικτή περιοχή V^0 του 0 με την ιδιότητα: για κάθε ανοικτή περιοχή U^0 του 0 υπάρχει $t > 0$ ώστε $tV^0 \subseteq U^0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η τοπολογία του X επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$. Παίρνουμε $V^0 = B(0;1) = \{x \in X| \ \|x\| < 1\}$. Αν U^0 είναι οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή του 0, υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(x;r) \subseteq U^0$, οπότε $rV^0 \subseteq U^0$.

Αντιστρόφως, έστω ανοικτή περιοχή V^0 του 0 με την παραπάνω ιδιότητα. Αυτό σημαίνει ότι η συλλογή $\{tV^0|t > 0\}$ αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0. Αν $\mathcal{P}$ είναι η διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών η οποία επάγει την τοπολογία του X, τότε υπάρχουν $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ ώστε $\{x \in X|p_1(x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X|p_n(x) < \epsilon_n\} \subseteq V^0$.

Ορίζουμε ημινόρμα p με τύπο $p(x) = \max_{1\leq k\leq n} \frac{p_k(x)}{\epsilon_k}$ για κάθε $x \in X$ και ισχύει ότι $\{x \in X|p(x) < 1\} = \{x \in X|p_1(x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X|p_n(x) < \epsilon_n\}$, οπότε $\{x \in X|p(x) < 1\} \subseteq V^0$. Άρα η ανοικτή περιοχή $W^0 = \{x \in X|p(x) < 1\}$ του 0 έχει την ιδιότητα ότι η συλλογή $\{tW^0|t > 0\}$ αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0.

Αν $x \in X$ με $x \neq 0$, υπάρχει $t > 0$ ώστε $x \notin tW^0$, οπότε $p(x) > 0$. Άρα η p είναι νόρμα, $p = \|\cdot\|$, οπότε $W^0 = B(0;1)$. Επομένως, η συλλογή $\{B(0;t)|t > 0\}$ είναι βάση ανοικτών περιοχών του 0, οπότε η $\|\cdot\|$ επάγει την τοπολογία του X.

3.3.3 Χώροι ακολουθιών

Ορισμός 3.49 *Στον s ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ την ημινόρμα p_n με τύπο*

$$p_n(x) = |x_n|$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in s$. Η $\mathcal{P} = \{p_n|n \in \mathbf{N}\}$ είναι διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον s και, επομένως, επάγει τοπικά κυρτή τοπολογία στον s. Επειδή η $\mathcal{P}$ είναι αριθμήσιμη, ο s είναι μετρικοποιήσιμος.

Μετρική στον s είναι η d με τύπο

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in s$.

Πρόταση 3.39 *Αν $\{x^{(m)}\}$ είναι ακολουθία στοιχείων του s και $x \in s$, τότε $x^{(m)} \to x$, ως προς την τοπολογία του s που μόλις ορίσαμε, αν και μόνον αν $x_n^{(m)} \to x_n$ για κάθε n.*

Απόδειξη: Έστω $x^{(m)} \to x$ στον s. Επειδή κάθε p_n είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $|x_n^{(m)} - x_n| = p_n(x^{(m)} - x) \to 0$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $x_n^{(m)} \to x_n$ για κάθε n. Παίρνουμε τυχόν ανοικτό O με $x \in O$, οπότε υπάρχουν N και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N > 0$ ώστε $\{y \in s|p_1(y-x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{y \in s|p_N(y-x) < \epsilon_N\} \subseteq O$. Επειδή το N είναι πεπερασμένο, υπάρχει M ώστε $p_1(x^{(m)} - x) = |x_1^{(m)} - x_1| < \epsilon_1, \ldots, p_N(x^{(m)} - x) = |x_N^{(m)} - x_N| < \epsilon_N$ για κάθε $m \geq M$. Αυτό σημαίνει ότι $x^{(m)} \in O$ για κάθε $m \geq M$ και, επομένως, $x^{(m)} \to x$.

Ορισμός 3.50 *Εξ αιτίας του αποτελέσματος της προηγούμενης πρότασης, η τοπο-λογία στον s η οποία επάγεται από την $\mathcal{P} = \{p_n | n \in \mathbf{N}\}$ ονομάζεται **τοπολογία της κατά συντεταγμένη σύγκλισης**.*

Θεώρημα 3.38 *Ο s με την τοπολογία της κατά συντεταγμένη σύγκλι- σης είναι χώρος Fréchet.*

Απόδειξη: Απομένει να αποδείξουμε ότι ο s είναι πλήρης. Έστω, λοιπόν, ακολουθία $\{x^{(m)}\}$ στον s με $d(x^{(k)}, x^{(l)}) \to 0$. Τότε για κάθε n έχουμε $\frac{1}{2^n} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|}{1+|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|} \leq d(x^{(k)}, x^{(l)}) \to 0$, οπότε για κάθε n ισχύει ότι $|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \to 0$. Άρα για κάθε n υπάρχει $x_n \in F$ ώστε $x_n^{(m)} \to x_n$. Θέτουμε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in s$ και έχουμε $x^{(m)} \to x$ στον s.

3.3.4 Χώροι συναρτήσεων

Το επόμενο παράδειγμα είναι γενίκευση του s.

Ορισμός 3.51 *Έστω μη-κενό σύνολο A και θεωρούμε το γραμμικό χώρο F^A. Για κάθε $a \in A$ ορίζουμε την ημινόρμα p_a στον F^A με τύπο*

$$p_a(f) = |f(a)|$$

για κάθε $f \in F^A$. Είναι προφανές ότι η $\mathcal{P} = \{p_a | a \in A\}$ είναι διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών, οπότε επάγει τοπικά κυρτή τοπολογία στον F^A.

Τα σύνολα $U^0 = \{f \in F^A | p_{a_1}(f) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{f \in F^A | p_{a_n}(f) < \epsilon_n\} = \{f \in F^A || f(a_1)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{f \in F^A || f(a_n)| < \epsilon_n\}$, όπου τα $n \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ είναι αυθαίρετα, αποτελούν βάση ανοικτών περιοχών του 0 στον F^A με αυτήν την τοπολογία.

Πρόταση 3.40 *Αν $\{f_m\}$ είναι ακολουθία στοιχείων του F^A και $f \in F^A$, τότε $f_m \to f$, ως προς την τοπολογία του F^A που μόλις ορίσαμε, αν και μόνον αν $f_m(a) \to f(a)$ για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη: Έστω $f_m \to f$ στον F^A. Επειδή κάθε p_a είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $|f_m(a) - f(a)| = p_a(f_m - f) \to 0$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $f_m(a) \to f(a)$ για κάθε $a \in A$. Παίρνουμε τυχόν ανοικτό O με $f \in O$, οπότε υπάρχουν n, $a_1, \ldots, a_n \in A$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ ώστε $\{g \in F^A || g(a_1) - f(a_1)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{g \in F^A || g(a_n) - f(a_n)| < \epsilon_n\} \subseteq O$. Επειδή το n είναι πεπερασμένο, υπάρχει M ώστε $|f_m(a_1) - f(a_1)| < \epsilon_1, \ldots, |f_m(a_n) - f(a_n)| < \epsilon_n$ για κάθε $m \geq M$. Αυτό σημαίνει ότι $f_m \in O$ για κάθε $m \geq M$ και, επομένως, $f_m \to f$.

Ορισμός 3.52 *Η τοπικά κυρτή τοπολογία που επάγεται στο F^A από τη συλλογή ημινορμών $\{p_a | a \in A\}$ ονομάζεται **τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης**.*

Επομένως, έχουμε αποδείξει το

Θεώρημα 3.39 *Το F^A με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης είναι τοπικά κυρτός χώρος.*

Ορισμός 3.53 *Έστω τοπολογικός χώρος A. Για κάθε συμπαγές $K \subseteq A$ ορίζουμε ημινόρμα p_K στον $C(A)$ με τύπο*

$$p_K(f) = \max_{a \in K} |f(a)|$$

για $f \in C(A)$. Η συλλογή $\mathcal{P} = \{p_K | K$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $A\}$ είναι διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών στον $C(A)$ και ορίζει τοπικά κυρτή τοπολογία στον $C(A)$.

Πρόταση 3.41 *Αν $\{f_m\}$ είναι ακολουθία στοιχείων του $C(A)$ και $f \in C(A)$, τότε $f_m \to f$, ως προς την τοπολογία του $C(A)$ που μόλις ορίσαμε, αν και μόνον αν, για κάθε συμπαγές $K \subseteq A$, $f_m \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Απόδειξη: Έστω $f_m \to f$ στον $C(A)$. Επειδή κάθε p_K είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $\max_{a \in K} |f_m(a) - f(a)| = p_K(f_m - f) \to 0$. Άρα $f_m \to f$ ομοιόμορφα στο K.

Αντιστρόφως, έστω ότι $f_m \to f$ ομοιόμορφα στο K για κάθε συμπαγές $K \subseteq A$. Παίρνουμε τυχόν ανοικτό O με $f \in O$, οπότε υπάρχουν συμπαγή $K_1, \ldots, K_n \subseteq A$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ ώστε $\{g \in C(A) | \max_{a \in K_1} |g(a) - f(a)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{g \in C(A) | \max_{a \in K_n} |g(a) - f(a)| < \epsilon_n\} \subseteq O$. Επειδή το n είναι πεπερασμένο, υπάρχει M ώστε $\max_{a \in K_1} |f_m(a) - f(a)| < \epsilon_1, \ldots, \max_{a \in K_n} |f_m(a) - f(a)| < \epsilon_n$ για κάθε $m \geq M$. Αυτό σημαίνει ότι $f_m \in O$ για κάθε $m \geq M$ και, επομένως, $f_m \to f$.

Ορισμός 3.54 *Έστω τοπολογικός χώρος A. Η τοπικά κυρτή τοπολογία που επάγεται στον $C(A)$ από τη συλλογή $\{p_K | K$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $A\}$ ονομάζεται* ***τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του A.***

Μία αρκετά χρήσιμη ειδική περίπτωση περιγράφεται παρακάτω.

Ορισμός 3.55 *Έστω τοπολογικός χώρος A.*
(1) Αν υπάρχει μία ακολουθία $\{K_k\}$ συμπαγών υποσυνόλων του A με τις ιδιότητες:
(i) $K_k \subseteq K_{k+1}$ για κάθε k,
(ii) για κάθε συμπαγές $K \subseteq A$ υπάρχει k ώστε $K \subseteq K_k$,
τότε ο A ονομάζεται ***σ-συμπαγώς παραγόμενος.***
(2) Αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x ώστε το $cl(V)$ να είναι συμπαγές, τότε ο A ονομάζεται ***τοπικά συμπαγής.***

Ένα παράδειγμα είναι όταν ο ίδιος ο A είναι συμπαγής, οπότε παίρνουμε $K_k = A$ για κάθε k και $V = A$.

Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι όταν $A = U$ είναι οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R^n}$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε k το σύνολο

$$U_k = \{x \in U | \, \|x\|_2 < k, \|x - y\|_2 > \frac{1}{k} \text{ για κάθε } y \notin U\}$$

είναι ανοικτό, ότι $U_k \subseteq U_{k+1}$ και ότι $U = \cup_{k=1}^{+\infty} U_k$. Επίσης, ότι το

$$K_k = cl(U_k) = \{x \in U | \, \|x\|_2 \leq k, \|x-y\|_2 \geq \frac{1}{k} \text{ για κάθε } y \notin U\}$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του U, ότι $K_k \subseteq U_{k+1} \subseteq K_{k+1}$ για κάθε k και ότι για κάθε συμπαγές $K \subseteq U$ υπάρχει k ώστε $K \subseteq K_k$.

Επίσης, για κάθε $x \in U$ υπάρχει μικρό $r > 0$ ώστε $cl(B(x;r)) \subseteq U$.

Άρα κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R^n}$ είναι σ-συμπαγώς παραγόμενο και τοπικά συμπαγές.

Θεώρημα 3.40 *Έστω σ-συμπαγώς παραγόμενος και τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος A. Στον $C(A)$ η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του A επάγεται από τη διαχωρίζουσα αριθμήσιμη συλλογή ημινορμών $\{p_{K_k} | k \in \mathbf{N}\}$, όπου K_k είναι τα σύνολα του προηγούμενου ορισμού, και ο $C(A)$ είναι χώρος Fréchet.*

Απόδειξη: Αν $\mathcal{P} = \{p_K | K$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $A\}$ και $\mathcal{P}' = \{p_{K_k} | k \in \mathbf{N}\}$, τότε κάθε p_{K_k} ανήκει στην $\mathcal{P}$ και για κάθε $p_K \in \mathcal{P}$ υπάρχει $K_k \supseteq K$ και, επομένως, $p_K \leq p_{K_k}$. Από την Πρόταση 3.36 συνεπάγεται ότι οι $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}'$ επάγουν την ίδια τοπολογία στον $C(A)$.

Επειδή η $\mathcal{P}'$ είναι αριθμήσιμη, συνεπάγεται ότι ο $C(A)$ είναι μετρικοποιήσιμος με μετρική d με τύπο

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{a \in K_k} |f(a) - g(a)|}{1 + \max_{a \in K_k} |f(a) - g(a)|}$$

για κάθε $f, g \in C(A)$. Μένει να αποδείξουμε ότι ο $C(A)$ είναι πλήρης.

Έστω $\{f_m\}$ στον $C(A)$ με $d(f_m, f_l) \to 0$. Τότε για κάθε k έχουμε ότι $\max_{a \in K_k} |f_m(a) - f_l(a)| \to 0$ και, επειδή ο $C(K_k)$ με την ομοιόμορφη νόρμα είναι πλήρης, συνεπάγεται ότι υπάρχει $f^{(k)} \in C(K_k)$ ώστε $\max_{a \in K_k} |f_m(a) - f^{(k)}(a)| \to 0$. Είναι προφανές ότι, επειδή $K_k \subseteq K_{k+1}$, κάθε $f^{(k+1)}$ είναι επέκταση της $f^{(k)}$ στο K_{k+1} και, επομένως, ορίζεται f στο A η οποία είναι κοινή επέκταση όλων των $f^{(k)}$.

Παίρνουμε τυχόν $x \in A$ και ανοικτή περιοχή V του x ώστε το $cl(V)$ να είναι συμπαγές. Τότε $cl(V) \subseteq K_k$ για κατάλληλο k, οπότε η $f = f^{(k)}$ είναι συνεχής στην V. Άρα η f είναι συνεχής στο x και, επομένως, στο A.

Άρα $f \in C(A)$ και η $\{f_m\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε K_k. Άρα η $\{f_m\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq A$ και, επομένως, $f_m \to f$ στον $C(A)$.

Ορισμός 3.56 *Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbf{R^n}$. Στο χώρο $C^\infty(U)$ με στοιχεία όλες τις απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : U \to F$ ορίζουμε για κάθε συμπαγές $K \subseteq U$ και κάθε $k \in \mathbf{N}_0$ την ημινόρμα $p_{K,k}$ με τύπο*

$$p_{K,k}(f) = \max_{x \in K, |\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|.$$

Η διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών $\{p_{K,k} | K$ συμπαγές $\subseteq U$ και $k \in \mathbf{N}_0\}$ επάγει τοπικά κυρτή τοπολογία στον $C^\infty(U)$. Ο χώρος αυτός με τη συγκεκριμένη τοπολογία συμβολίζεται $\mathcal{E}(U)$.

Πρόταση 3.42 *Αν $\{f_m\}$ είναι ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{E}(U)$ και $f \in \mathcal{E}(U)$, τότε $f_m \to f$ στον $\mathcal{E}(U)$ αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές $K \subseteq U$ και κάθε $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ ισχύει $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ ομοιόμορφα στο K.*

Απόδειξη: Έστω $f_m \to f$ στον $\mathcal{E}(U)$. Παίρνουμε οποιοδήποτε συμπαγές $K \subseteq U$ και $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Αν $k = |\alpha|$, τότε, επειδή η $p_{K,k}$ είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $\max_{x\in K} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| \leq p_{K,k}(f_m - f) \to 0$. Άρα $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ ομοιόμορφα στο K.

Αντιστρόφως, έστω ότι $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ ομοιόμορφα στο K για κάθε συμπαγές $K \subseteq U$ και κάθε $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Παίρνουμε οποιοδήποτε ανοικτό O στον $\mathcal{E}(U)$ με $f \in O$, οπότε υπάρχουν συμπαγή $K_1, \ldots, K_N \subseteq U$, $k_1, \ldots, k_N \in \mathbf{N}$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N > 0$ ώστε $\{g \in \mathcal{E}(U) | \max_{x\in K_1, |\alpha|\leq k_1} |D^\alpha g(x) - D^\alpha f(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{g \in \mathcal{E}(U) | \max_{x\in K_N, |\alpha|\leq k_N} |D^\alpha g(x) - D^\alpha f(x)| < \epsilon_N\} \subseteq O$. Επειδή το N και όλα τα $k_1, \ldots, k_N$ είναι πεπερασμένα, υπάρχει M ώστε $\max_{x\in K_1, |\alpha|\leq k_1} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \epsilon_1, \ldots, \max_{x\in K_N, |\alpha|\leq k_N} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \epsilon_N$ για κάθε $m \geq M$. Αυτό σημαίνει ότι $f_m \in O$ για κάθε $m \geq M$ και, επομένως, $f_m \to f$.

Θεώρημα 3.41 *Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbf{R^n}$ και U_k, K_k τα σύνολα που περιγράφονται μετά τον Ορισμό 3.54. Τότε η τοπολογία του $\mathcal{E}(U)$ επάγεται από την αριθμήσιμη διαχωρίζουσα συλλογή $\{p_{K_k,k} | k \in \mathbf{N}\}$ και ο $\mathcal{E}(U)$ είναι χώρος Fréchet.*

Απόδειξη: Αν θέσουμε $\mathcal{P} = \{p_{K,k} | K$ είναι συμπαγές $\subseteq A$ και $k \in \mathbf{N}_0\}$ και $\mathcal{P}' = \{p_{K_k,k} | k \in \mathbf{N}\}$, τότε κάθε $p_{K_k,k}$ ανήκει στην $\mathcal{P}$ και για κάθε $p_{K,k} \in \mathcal{P}$ υπάρχει l ώστε $K_l \supseteq K$ και $l \geq k$, και, επομένως, $p_{K,k} \leq p_{K_l,l}$. Από την Πρόταση 3.36 συνεπάγεται ότι οι $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}'$ επάγουν την ίδια τοπολογία στον $\mathcal{E}(U)$.

Επειδή η $\mathcal{P}'$ είναι αριθμήσιμη, συνεπάγεται ότι ο $\mathcal{E}(U)$ είναι μετρικοποιήσιμος με μετρική d με τύπο

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{x\in K_k, |\alpha|\leq k} |D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)|}{1 + \max_{x\in K_k, |\alpha|\leq k} |D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)|}$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{E}(U)$. Μένει να αποδείξουμε ότι ο $\mathcal{E}(U)$ είναι πλήρης.

Έστω $\{f_m\}$ στον $\mathcal{E}(U)$ με $d(f_m, f_l) \to 0$. Τότε για κάθε k έχουμε ότι $\max_{x\in K_k, |\alpha|\leq k} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_l(x)| \to 0$, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.8 στο σύνολο $U_k \subseteq K_k$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $f^{(k)} \in C^{k,\infty}(U_k)$ ώστε $\max_{x\in U_k, |\alpha|\leq k} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f^{(k)}(x)| \to 0$. Επειδή $U_k \subseteq U_{k+1}$, είναι προφανές ότι κάθε $f^{(k+1)}$ είναι επέκταση της $f^{(k)}$ στο U_{k+1} και, επομένως, ορίζεται f στο U η οποία είναι κοινή επέκταση όλων των $f^{(k)}$.

Για τυχόν $x \in U$ υπάρχει k_0 ώστε $x \in U_k$ για κάθε $k \geq k_0$. Άρα $f = f^{(k)} \in C^{k,\infty}(U_k) \subseteq C^{k,\infty}(U_{k_0})$ για κάθε $k \geq k_0$. Άρα η f είναι απείρως παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in U$ και, επομένως, $f \in \mathcal{E}(U)$.

Αν πάρουμε τυχόν συμπαγές $K \subseteq U$ και $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, τότε υπάρχει k ώστε $K \subseteq K_k$ και $|\alpha| \leq k$. Η $\{D^\alpha f_m\}$ συγκλίνει στην $D^\alpha f$ ομοιόμορφα στο U_{k+1}, οπότε και στο $K \subseteq K_k \subseteq U_{k+1}$. Άρα $f_m \to f$ στον $\mathcal{E}(U)$.

Ορισμός 3.57 *Μία $f \in C^\infty(\mathbf{R^n})$ ονομάζεται* ***συνάρτηση Schwartz*** *αν για κάθε $k \in \mathbf{N}_0$ ισχύει $\sup_{x\in\mathbf{R^n},|\alpha|\leq k}(1+\|x\|_2)^k|D^\alpha f(x)| < +\infty$.*

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων Schwartz ονομάζεται ***χώρος Schwartz*** *και συμβολίζεται $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$.*

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο χώρος Schwartz είναι γραμμικός χώρος επί του F.

Ορισμός 3.58 *Στον $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$ ορίζουμε για κάθε k την ημινόρμα p_k με τύπο*

$$p_k(f) = \sup_{x\in\mathbf{R^n},|\alpha|\leq k}(1+\|x\|_2)^k|D^\alpha f(x)|$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R^n})$. Η αριθμήσιμη συλλογή ημινορμών $\mathcal{P} = \{p_k | k \in \mathbf{N}_0\}$ επάγει τοπικά κυρτή τοπολογία στον $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$.

Θεώρημα 3.42 *Ο $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$ είναι χώρος Fréchet.*

Απόδειξη: Η μετρική d στον $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$ δίνεται από τον τύπο

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\,\frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)}$$

για κάθε $f,g \in \mathcal{S}(\mathbf{R^n})$.

Αν η $\{f_m\}$ είναι στον $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$ και $d(f_m - f_l) \to 0$, τότε για κάθε k ισχύει ότι $\sup_{x\in\mathbf{R^n},|\alpha|\leq k}|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_l(x)| \leq p_k(f_m - f_l) \to 0$. Επομένως, υπάρχει $f^{(k)} \in C^{k,\infty}(\mathbf{R^n})$ ώστε για κάθε α με $|\alpha| \leq k$ να έχουμε ότι $D^\alpha f_m \to D^\alpha f^{(k)}$ ομοιόμορφα στον $\mathbf{R^n}$. Ειδικότερα, $f_m \to f^{(k)}$ ομοιόμορφα στον $\mathbf{R^n}$, οπότε όλες οι $f^{(k)}$ ταυτίζονται με μία κοινή συνάρτηση $f \in C^\infty(\mathbf{R^n})$ ώστε για κάθε α να ισχύει $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ ομοιόμορφα στον $\mathbf{R^n}$. Μένει να δείξουμε ότι $d(f_m, f) \to 0$.

Έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Παίρνουμε N ώστε $\frac{1}{2^N} \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Κατόπιν, επειδή το N είναι πεπερασμένο, υπάρχει M ώστε $\sup_{x\in\mathbf{R^n},|\alpha|\leq k}(1+\|x\|_2)^k|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f_l(x)| = p_k(f_m - f_l) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ για κάθε $k \leq N$ όταν $m, l \geq M$. Παίρνοντας όριο όταν $l \to +\infty$, βρίσκουμε $p(f_m - f) = \sup_{x\in\mathbf{R^n},|\alpha|\leq k}(1+\|x\|_2)^k|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ για κάθε $k \leq N$ όταν $m \geq M$. Άρα $d(f_m, f) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{p_k(f_m-f)}{1+p_k(f-g)} \leq \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2}\epsilon + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2^N} \leq \epsilon$ όταν $m \geq M$.

3.4 Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι

Ορισμός 3.59 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και μία τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X με τις ιδιότητες:*
(i) ο X με την $\mathcal{T}$ είναι χώρος Hausdorff,
(ii) οι πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : F \times X \to X$ είναι συνεχείς.

Τότε ο X ονομάζεται ***τοπολογικός γραμμικός χώρος****.*

Όπως είδαμε, οι χώροι με νόρμα, οπότε και οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο, αλλά και οι γενικότεροι τοπικά κυρτοί χώροι είναι ειδικές περιπτώσεις τοπολογικών γραμμικών χώρων.

Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με τη γενική θεωρία των τοπολογικών γραμμικών χώρων, αλλά μόνον θα δούμε δύο γνωστά παραδείγματα τα οποία εντάσσονται σε αυτό το πλαίσιο.

Ορισμός 3.60 *Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$. Στο γραμμικό χώρο $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ ορίζουμε*

$$d(f, g) = \int_\Omega \frac{|f(a) - g(a)|}{1 + |f(a) - g(a)|}\, d\mu(a)$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η d έχει τις ιδιότητες $d(f, g) = d(g, f)$ και $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ μίας μετρικής, αλλά $d(f, g) = 0$ αν και μόνον αν $f(a) = g(a)$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$.

Αν θέσουμε $Y = \{f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma) | f(a) = 0$ για μ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega\}$, τότε είναι προφανές ότι ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$.

Ορισμός 3.61 *Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < +\infty$. Στον γραμμικό χώρο-πηλίκο $M(\Omega, \Sigma, \mu) = \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)/Y$, ορίζουμε μετρική d_0 με τύπο*

$$d_0([f]_Y, [g]_Y) = d(f, g) = \int_\Omega \frac{|f(a) - g(a)|}{1 + |f(a) - g(a)|}\, d\mu(a)$$

για κάθε $[f]_Y, [g]_Y \in M(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Είναι προφανές ότι η τιμή του $d_0([f]_Y, [g]_Y)$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]_Y$ και $[g]_Y$.

Όπως και για τους χώρους $\mathcal{L}^p$ και L^p, ακολουθούμε και τώρα τη συνήθη πρακτική να ταυτίζουμε την κλάση $[f]_Y$ με το οποιοδήποτε στοιχείο της f. Δηλαδή, ταυτίζουμε κάθε δύο συναρτήσεις f, g αν αυτές είναι ίσες μ-σχεδόν παντού στο Ω. Γράφουμε, λοιπόν,

$$d_0(f, g) = \int_\Omega \frac{|f(a) - g(a)|}{1 + |f(a) - g(a)|}\, d\mu(a)$$

για κάθε $f, g \in M(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Πρόταση 3.43 *Αν η $\{f_n\}$ και η f είναι στον $M(\Omega, \Sigma, \mu)$, τότε $d_0(f_n, f) \to 0$ αν και μόνον αν $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $\mu(\{a \in \Omega || f_n(a) - f(a)| \geq \delta\}) \to 0$.*

Απόδειξη: Έστω $d_0(f_n, f) \to 0$ και τυχόν $\delta > 0$. Θέτουμε $A_{n,\delta} = \{a \in \Omega || f_n(a) - f(a)| \geq \delta\}$, οπότε $\frac{\delta}{1+\delta}\, \mu(A_{n,\delta}) \leq \int_{A_{n,\delta}} \frac{|f_n(a) - f(a)|}{1 + |f_n(a) - f(a)|}\, d\mu(a) \leq d_0(f_n, f)$ $\to 0$. Άρα $\mu(A_{n,\delta}) \to 0$ και, επομένως, $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Έστω $f_n \to f$ κατά μέτρο. Παίρνουμε $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε $\frac{\delta}{1+\delta} \leq \frac{\epsilon}{2\mu(\Omega)}$. Κατόπιν, βρίσκουμε N ώστε $\mu(A_{n,\delta}) \leq \frac{1}{2}\, \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Τότε

$d_0(f_n,f)=\int_{A_{n,\delta}}\frac{|f_n(a)-f(a)|}{1+|f_n(a)-f(a)|}\,d\mu(a)+\int_{\Omega\setminus A_{n,\delta}}\frac{|f_n(a)-f(a)|}{1+|f_n(a)-f(a)|}\,d\mu(a)\le\mu(A_{n,\delta})+\frac{\delta}{1+\delta}\,\mu(\Omega\setminus A_{n,\delta})\le\frac{1}{2}\,\epsilon+\frac{\epsilon}{2\mu(\Omega)}\,\mu(\Omega)\le\epsilon$ για κάθε $n\ge N$. Άρα $d_0(f_n,f)\to 0$.

Θεώρημα 3.43 *Έστω (Ω,Σ,μ) ένας χώρος μέτρου με $\mu(\Omega)<+\infty$. Ο $M(\Omega,\Sigma,\mu)$ με τη μετρική d_0 είναι πλήρης τοπολογικός γραμμικός χώρος.*

Απόδειξη: Ο $M(\Omega,\Sigma,\mu)$ είναι χώρος Hausdorff, αφού είναι μετρικός χώρος.

Έστω $d_0(f_n,f)\to 0$ και $d_0(g_n,g)\to 0$. Τότε, από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $f_n\to f$ και $g_n\to g$ κατά μέτρο. Άρα, όπως εύκολα φαίνεται, $f_n+g_n\to f+g$ κατά μέτρο, οπότε $d_0(f_n+g_n,f+g)\to 0$.

Ομοίως, αν $|\kappa_n-\kappa|\to 0$ και $d_0(f_n,f)\to 0$, τότε $d_0(\kappa_n f_n,\kappa f)\to 0$.

Επομένως, οι πράξεις είναι συνεχείς και ο $M(\Omega,\Sigma,\mu)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Έστω $d_0(f_n,f_m)\to 0$. Αν πάρουμε $\delta>0$ και ορίσουμε $A_{n,m,\delta}=\{a\in\Omega\,||f_n(a)-f_m(a)|\ge\delta\}$, τότε $\frac{\delta}{1+\delta}\,\mu(A_{n,m,\delta})\le\int_{A_{n,m,\delta}}\frac{|f_n(a)-f_m(a)|}{1+|f_n(a)-f_m(a)|}\,d\mu(a)\le d(f_n,f_m)\to 0$. Μπορούμε, τώρα, να βρούμε $n_1<n_2<\cdots$ ώστε $\mu(A_{n_k,n_{k+1},\frac{1}{2^k}})\le\frac{1}{2^k}$ για κάθε k. Αν θέσουμε $A_m=\cup_{k=m}^{+\infty}A_{n_k,n_{k+1},\frac{1}{2^k}}$, τότε $\mu(A_m)\le\frac{1}{2^{m-1}}$. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η $\{f_{n_k}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $\Omega\setminus A_m$. Πράγματι, για κάθε $a\in\Omega\setminus A_m$, έχουμε $|f_{n_{k+1}}(a)-f_{n_k}(a)|\le\frac{1}{2^k}$ για κάθε $k\ge m$ και $\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{1}{2^k}<+\infty$. Άρα η σειρά $f_{n_1}(a)+\sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}}(a)-f_{n_k}(a))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\Omega\setminus A_m$, οπότε υπάρχει το $f(a)=\lim f_{n_k}(a)=\lim\bigl(f_{n_1}(a)+\sum_{j=1}^{k-1}(f_{n_{j+1}}(a)-f_{n_j}(a))\bigr)$ ομοιόμορφα στο $\Omega\setminus A_m$.

Άρα η $f=\lim f_{n_k}$ ορίζεται στο $\cup_{m=1}^{+\infty}(\Omega\setminus A_m)$ και, επειδή $\mu(A_m)\to 0$, συνεπάγεται ότι το συμπλήρωμα του $\cup_{m=1}^{+\infty}(\Omega\setminus A_m)$ έχει μ-μέτρο μηδέν. Επομένως η f μπορεί να ορισθεί παντού στο Ω, θέτοντας $f=0$ στο συμπλήρωμα του $\cup_{m=1}^{+\infty}(\Omega\setminus A_m)$. Επομένως, $\limsup\int_{\Omega}\frac{|f_{n_k}(a)-f(a)|}{1+|f_{n_k}(a)-f(a)|}\,d\mu(a)\le\mu(A_m)+\limsup\int_{\Omega\setminus A_m}\frac{|f_{n_k}(a)-f(a)|}{1+|f_{n_k}(a)-f(a)|}\,d\mu(a)\le\frac{1}{2^{m-1}}$, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης στο $\Omega\setminus A_m$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $d_0(f_{n_k},f)\to 0$ και, επομένως, $d_0(f_k,f)\le d_0(f_k,f_{n_k})+d_0(f_{n_k},f)\to 0$.

Πρόταση 3.44 *Ο $M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ δεν είναι τοπικά κυρτός.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η μοναδική κυρτή, ανοικτή περιοχή του 0 στον $M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ είναι ο ίδιος ο $M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$. Πράγματι, αν ο χώρος ήταν τοπικά κυρτός, τότε θα υπήρχε βάση ανοικτών περιοχών του 0 αποτελούμενη από κυρτά σύνολα.

Έστω κυρτή, ανοικτή περιοχή V του 0.

Τότε υπάρχει $r>0$ ώστε $\{f\,|\,d_0(f,0)<r\}\subseteq V$.

Θεωρούμε τυχούσα $f\in M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ και υποθέτουμε αρχικά ότι $|f(a)|\ge 1$ για κάθε $a\in[0,1]$. Έστω $A=\int_0^1\frac{|f(a)|}{1+|f(a)|}\,dm(a)$ και παίρνουμε $n>\frac{2A}{r}-1$. Κατόπιν βρίσκουμε $a_0,\dots,a_n$ ώστε $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1$ και $\int_{a_{j-1}}^{a_j}\frac{|f(a)|}{1+|f(a)|}\,dm(a)=\frac{A}{n}$ για κάθε $j=1,\dots,n$. Ορίζουμε $g_j=n\chi_{[a_{j-1},a_j)}f$ για κάθε $j=1,\dots,n-1$ και $g_n=n\chi_{[a_{n-1},a_n]}f$, οπότε $\int_0^1\frac{|g_j(a)|}{1+|g_j(a)|}\,dm(a)\le$

$\frac{2n}{n+1}\int_{a_{j-1}}^{a_j}\frac{|f(a)|}{1+|f(a)|}\,dm(a)=\frac{2A}{n+1}<r$ για κάθε j. Άρα όλα τα g_j ανήκουν στην V. Επειδή η V είναι κυρτή και $f=\frac{1}{n}(g_1+\cdots+g_n)$, συνεπάγεται ότι το f ανήκει στην V.

Παρατηρούμε ότι κάθε $f\in M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ γράφεται $f=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ με $f_1,f_2\in M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ και $|f_1(a)|,|f_2(a)|\geq 1$ για κάθε $a\in[0,1]$. Πράγματι, μπορούμε να ορίσουμε $f_1(a)=f(a)$ αν $|f(a)|\geq 1$, $f_1(a)=-\frac{f(a)}{|f(a)|}$ αν $0<|f(a)|<1$ και $f_1(a)=-1$ αν $f(a)=0$ και να ορίσουμε $f_2=2f-f_1$.

Τότε έχουμε $f_1,f_2\in V$ και, επειδή η V είναι κυρτή και $f=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$, συνεπάγεται $f\in V$.

Άρα η V περιέχει κάθε στοιχείο του $M([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$.

Ορισμός 3.62 *Έστω χώρος μέτρου (Ω,Σ,μ) και $0<p<1$. Ορίζουμε για κάθε $f,g\in\mathcal{L}^p(\Omega,\Sigma,\mu)$*

$$d_p(f,g)=\int_\Omega |f(a)-g(a)|^p\,d\mu(a).$$

Οι ιδιότητες $d_p(f,g)=d_p(g,f)$ και $d_p(f,h)\leq d_p(f,g)+d_p(g,h)$ είναι εύκολο να αποδειχθούν. Η δεύτερη βασίζεται στη στοιχειώδη $(\alpha+\beta)^p\leq\alpha^p+\beta^p$ για κάθε $\alpha,\beta\geq 0$. Αυτή είναι απλή: $1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\leq\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^p+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^p=\frac{\alpha^p+\beta^p}{(\alpha+\beta)^p}$. Επειδή $d_p(f,g)=0$ αν και μόνον αν $f(a)=g(a)$ για μ-σχεδόν κάθε $a\in\Omega$, ορίζουμε, ως συνήθως, το γραμμικό υπόχωρο $Y=\{f\in\mathcal{L}^p(\Omega,\Sigma,\mu)\,|\,f=0\ \mu-$ σχεδόν παντού στο $\Omega\}$ του $\mathcal{L}^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Ορισμός 3.63 *Έστω χώρος μέτρου (Ω,Σ,μ) και $0<p<1$. Ορίζουμε στο γραμμικό χώρο $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)=\mathcal{L}^p(\Omega,\Sigma,\mu)/Y$ μετρική d_p με τύπο*

$$d_p([f]_Y,[g]_Y)=d_p(f,g)=\int_\Omega |f(a)-g(a)|^p\,d\mu(a)$$

για κάθε $[f]_Y,[g]_Y\in L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Είναι προφανές ότι η d_p ορίζεται καλώς και ότι είναι μετρική στον $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Ως συνήθως, ταυτίζουμε την $[f]_Y$ με το f.

Θεώρημα 3.44 *Έστω χώρος μέτρου (Ω,Σ,μ) και $0<p<1$. Ο χώρος $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ με τη μετρική d_p είναι πλήρης τοπολογικός γραμμικός χώρος.*

Απόδειξη: Ο $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ είναι χώρος Hausdorff, αφού είναι μετρικός χώρος.

Έστω $d_p(f_n,f)\to 0$ και $d_p(g_n,g)\to 0$. Τότε $d(f_n+g_n,f+g)\leq d_p(f_n,f)+d_p(g_n,g)\to 0$. Ομοίως, αν $|\kappa_n-\kappa|\to 0$ και $d_p(f_n,f)\to 0$, τότε $d_p(\kappa_n f_n,\kappa f)\leq|\kappa_n|^p d_p(f_n,f)+|\kappa_n-\kappa|^p d_p(f,0)\to 0$.

Επομένως, οι πράξεις είναι συνεχείς και ο $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος. Η πληρότητα του χώρου αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που αποδεικνύεται η πληρότητα στην περίπτωση $p\geq 1$.

Πρόταση 3.45 *Ο $L^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ δεν είναι τοπικά κυρτός.*

Απόδειξη: Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.44, αρκεί να αποδείξουμε ότι η μοναδική κυρτή, ανοικτή περιοχή του 0 στον $L^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ είναι ο ίδιος ο $L^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ και έστω κυρτή, ανοικτή περιοχή V του 0.

Τότε υπάρχει $r>0$ ώστε $\{f \,|\, d_p(f,0)<r\}\subseteq V$.

Θεωρούμε τυχούσα $f\in L^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ και $A=\int_0^1|f(a)|^p\,dm(a)$. Κατόπιν παίρνουμε $n>(\frac{A}{r})^{\frac{1}{1-p}}$ και βρίσκουμε $a_0,\dots,a_n$ ώστε $0=a_0<a_1<\dots<a_n=1$ και $\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(a)|^p\,dm(a)=\frac{A}{n}$ για κάθε $j=1,\dots,n$. Ορίζουμε $g_j=n\chi_{[a_{j-1},a_j)}f$ για κάθε $j=1,\dots,n-1$ και $g_n=n\chi_{[a_{n-1},a_n]}f$, οπότε $\int_0^1|g_j(a)|^p\,dm(a)=n^p\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(a)|^p\,dm(a)=An^{p-1}<r$ για κάθε j. Άρα όλα τα g_j ανήκουν στην V. Επειδή η V είναι κυρτή και $f=\frac{1}{n}(g_1+\dots+g_n)$, συνεπάγεται ότι η f ανήκει στην V.

Άρα η V περιέχει κάθε στοιχείο του $L^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$.

3.5 Ασκήσεις

1. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in X$ και $r\in\mathbf{R}^+$:
(1) $cl(\{y\in X|\,\|y-x\|<r\})=\{y\in X|\,\|y-x\|\le r\}$,
(2) $\partial(\{y\in X|\,\|y-x\|<r\})=\{y\in X|\,\|y-x\|=r\}$.

2. Έστω $\{p_i\,|\,i\in I\}$ ένα σύνολο ημινορμών στον γραμμικό χώρο X. Αν $0<\sup_{i\in I}p_i(x)<+\infty$ για κάθε $x\in X\setminus\{0\}$, αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|:X\to\mathbf{R}_\mathbf{0}^+$ με τύπο $\|x\|=\sup_{i\in I}p_i(x)$ για κάθε $x\in X$ είναι νόρμα στον X.

3. Έστω χώρος X με νόρμα και $A,B\subseteq X$.
(1) Αν τα A,B είναι ανοικτά, αποδείξτε ότι το $A+B$ είναι ανοικτό.
(2) Αν τα A,B είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $A+B$ είναι συμπαγές.
(3) Αν το A είναι κλειστό και το B συμπαγές, αποδείξτε ότι το $A+B$ είναι κλειστό.
(4) Στον $\mathbf{R^2}$ τα $A=\{(x,0)|x\in\mathbf{R}\}$ και $B=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R},xy=1\}$ είναι κλειστά, αλλά το $A+B$ δεν είναι κλειστό.

4. (1) Έστω γραμμικός χώρος X και κυρτά $A_1,\dots,A_n\subseteq X$. Αποδείξτε ότι $co(A_1\cup\dots\cup A_n)=\{t_1a_1+\dots+t_na_n|a_1\in A_1,\dots,a_n\in A_n,t_1,\dots,t_n\ge 0,$ $t_1+\dots+t_n=1\}$.
(2) Έστω χώρος X με νόρμα και κυρτά συμπαγή $A_1,\dots,A_n\subseteq X$. Αποδείξτε ότι το $co(A_1\cup\dots\cup A_n)$ είναι συμπαγές.
(3) Έστω χώρος X με νόρμα και ολικά φραγμένο $K\subseteq X$. Αποδείξτε ότι το $co(K)$ είναι ολικά φραγμένο.
(4) Αν ο X είναι χώρος Banach και το $K\subseteq X$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι το $cl[co(K)]$ είναι συμπαγές.

5. Αποδείξτε ότι οποιοιδήποτε χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι τοπολογικά ισομορφικοί αν και μόνον αν έχουν την ίδια διάσταση.

Ορισμός: *Έστω X γραμμικός χώρος επί του F με νόρμα $\|\cdot\|$ και $x_1,x_2,\ldots\in X$.*

*Λέμε ότι **η σειρά** $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ **συγκλίνει στον** X αν η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών αθροισμάτων $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ συγκλίνει στον X. Σε αυτήν την περίπτωση, αν $s_n \to s$, γράφουμε $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j = s$. Λέμε ότι **η σειρά συγκλίνει απολύτως** αν η $\sum_{j=1}^{+\infty} \|x_j\|$ συγκλίνει.*

6. (1) Αποδείξτε ότι ένας χώρος X με νόρμα είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στοιχείων του X συγκλίνει στον X.
(2) Θεωρείστε τον l^1 με την 1-νόρμα και τον υπόχωρο $X =< \{e_j \,|\, j \in \mathbf{N}\} >$. Αποδείξτε ότι στον X η $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} e_j$ συγκλίνει απολύτως αλλά δε συγκλίνει.

Ορισμός: *Εστω X χώρος Banach. Το $\{b_j | j \in \mathbf{N}\}$ ονομάζεται **βάση Schauder του** X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \in F$ ώστε $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j$.*

7. Βρείτε βάση Schauder για τους l^p, $1 \leq p < +\infty$.

8. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία μίας βάσης Schauder σε χώρο Banach είναι μεμονωμένα.

9. Έστω χώρος X με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X.
(1) Αν οι $Y, X/Y$ είναι πλήρεις, αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης.
(2) Αν οι $Y, X/Y$ είναι διαχωρίσιμοι, αποδείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

10. (1) Αν ο X είναι χώρος με νόρμα και ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι $int(Y) = \emptyset$.
(2) Αν ο X είναι χώρος Banach και Y_n είναι γνήσιοι υπόχωροι του X πεπερασμένης διάστασης, αποδείξτε ότι $int(\cup_{n=1}^{+\infty} Y_n) = \emptyset$.
(3) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απειροδιάστατος χώρος Banach με αριθμήσιμη βάση.

11. (1) Έστω χώρος X πεπερασμένης διάστασης με νόρμα $\|\cdot\|$ και γραμμικός υπόχωρος $Y \neq X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = \inf\{\|y - x\| \; |y \in Y\} = 1$.
(2) Στον $C([0,1]) = BC([0,1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{f \in C([0,1]) | f(0) = 0\}$ και τον $Y = \{f \in X | \int_0^1 f = 0\}$. Αποδείξτε ότι ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $C([0,1])$, ότι $Y \neq X$ και ότι, για οποιοδήποτε $f \in X$ με $\|f\|_u = 1$, ισχύει $\inf\{\|g - f\|_u \,|g \in Y\} < 1$.

12. (1) Έστω χώρος X με νόρμα, M κλειστός υπόχωρος του X και Y υπόχωρος του X με $dim(Y) < +\infty$ και $M \cap Y = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.
(2) Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα με τις ίδιες υποθέσεις εκτός της $M \cap Y = \{0\}$.

13. Έστω χώρος X με νόρμα, M κλειστός υπόχωρος του X με $codim(M) < +\infty$ και Y υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

14. Στον χώρο l^2 θεωρούμε τους υπόχωρους $M = cl(< \{e_{2j} | j \in \mathbf{N}\} >)$ και $Y = cl(< \{e_{2j} + \frac{1}{j} e_{2j-1} | j \in \mathbf{N}\} >)$. Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι πυκνός στον

l^2 και $(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots) \notin M + Y$. Άρα ο $M + Y$ δεν είναι κλειστός.

15. Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F ο οποίος είναι απειροδιάστατος και έστω B μία βάση του X. Ορίζουμε $\|\cdot\|^{(1)}$ και $\|\cdot\|^{(2)}$ στον X με τύπο

$$\|x\|^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} |\kappa_j|, \qquad \|x\|^{(2)} = \max_{1 \le j \le n} |\kappa_j|$$

για κάθε $x \in X$, όπου $x = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j x_j$ με $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ και $x_1, \ldots, x_n \in B$. Αποδείξτε ότι οι $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$ είναι νόρμες στον X και ότι δεν είναι ισοδύναμες.

16. Θεωρούμε τον l^1 και για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$ ορίζουμε $\|x\|' = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} |x_j|$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον l^1 η οποία δεν είναι ισοδύναμη με την 1-νόρμα του l^1 και ότι ο l^1 δεν είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|'$.

Ορισμός: *Μία συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to F$ ονομάζεται **συνάρτηση φραγμένης κύμανσης** αν υπάρχει $M \ge 0$ ώστε $\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \le M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$ με $t_1 < \cdots < t_n$.*

Ορίζουμε το σύνολο $BV(\mathbf{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $\mathbf{R}$ και για κάθε $f \in BV(\mathbf{R})$ ορίζουμε

$$\|f\|_{BV} = |f(0)| + \sup\{\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \,|\, n \in \mathbf{N}, t_1 < \cdots < t_n\}.$$

17. Αποδείξτε ότι ο $BV(\mathbf{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F, ότι η $\|\cdot\|_{BV}$ είναι νόρμα στον $BV(\mathbf{R})$ και ότι ο $BV(\mathbf{R})$ είναι χώρος Banach με αυτήν τη νόρμα.

Ορισμός: *Έστω $0 < \alpha \le 1$. Μία συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to F$ ονομάζεται **συνάρτηση Lipschitz τάξης** α αν υπάρχει $M \ge 0$ ώστε $|f(t) - f(s)| \le M\delta^\alpha$ για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $t, s \in \mathbf{R}$ με $|t - s| \le \delta$.*

Ορίζουμε Lip_α τον χώρο με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις Lipschitz τάξης α και για κάθε $f \in Lip_\alpha$ ορίζουμε $\omega_\delta(f) = \sup\{|f(t) - f(s)| \,|\, |t - s| \le \delta\}$ και

$$\|f\|_{Lip_\alpha} = |f(0)| + \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha}.$$

18. Αποδείξτε ότι ο Lip_α είναι γραμμικός χώρος επί του F, ότι η $\|\cdot\|_{Lip_\alpha}$ είναι νόρμα στον Lip_α και ότι ο Lip_α είναι χώρος Banach.

Ορισμός: *Έστω $0 < \alpha \le 1$. Ορίζουμε το σύνολο lip_α με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f \in Lip_\alpha$ με την ιδιότητα $\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} = 0$.*

19. Αποδείξτε ότι ο lip_α είναι κλειστός υπόχωρος του Lip_α. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του lip_1 είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

Ορισμός: *Έστω $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbf{C}$.*

Για $1 \le p < +\infty$ *θεωρούμε το σύνολο* $H^p(\Delta)$ *με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες στο* Δ *με την ιδιότητα* $\sup_{0\le r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$.

Για κάθε $f \in H^p(\Delta)$ *ορίζουμε*

$$\|f\|_p = \sup_{0\le r<1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

20. Αποδείξτε ότι το $H^p(\Delta)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$, ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $H^p(\Delta)$ και ότι ο $H^p(\Delta)$ είναι χώρος Banach.

Ορισμός: *Ορίζουμε το σύνολο* $H^\infty(\Delta)$ *με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες στο* Δ *και έχουν την ιδιότητα* $\sup_{z\in\Delta}|f(z)| < +\infty$.

Για κάθε $f \in H^\infty(\Delta)$ *ορίζουμε*

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

21. Αποδείξτε ότι το $H^\infty(\Delta)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$, ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $H^\infty(\Delta)$ και ότι ο $H^\infty(\Delta)$ είναι χώρος Banach.

Ορισμός: *Ορίζουμε το σύνολο* $A(\Delta)$ *με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις* f *οι οποίες είναι συνεχείς στο* $cl(\Delta) = \{z \in \mathbf{C}|\,|z| \le 1\}$ *και ολόμορφες στο* Δ.

Για κάθε $f \in A(\Delta)$ *ορίζουμε*

$$\|f\|_\infty = \max_{z\in cl(\Delta)}|f(z)|.$$

22. Αποδείξτε ότι το $A(\Delta)$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$, ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $A(\Delta)$ και ότι ο $A(\Delta)$ είναι χώρος Banach.

23. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$.
(1) Αν οι $\{x_n\}, \{y_n\}$ είναι στον X με $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$ και $(x_n|y_n) \to 1$, αποδείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.
(2) Αν η $\{x_n\}$ και το x είναι στον X με $\|x_n\| \to \|x\|$ και $(x_n|y) \to (x|y)$ για κάθε $y \in X$, αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

24. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και έστω ότι ισχύει η ταυτότητα του παραλληλογράμμου.
(1) Αν $F = \mathbf{R}$ και ορίσουμε $(x|y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 + \frac{1}{4}\|x-y\|^2$ για κάθε $x, y \in X$, αποδείξτε ότι το $(\cdot|\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον X και επάγει την $\|\cdot\|$.
(2) Αν $F = \mathbf{C}$, αποδείξτε το ίδιο πράγμα με $(x|y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2$ για κάθε $x, y \in X$.

25. Αποδείξτε ότι κάθε ορθογώνιο σύνολο σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

26. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Αν $x, y \in X$, προσδιορίστε όλες τις περιπτώσεις ώστε να ισχύει η ισότητα $\|x+y\| =$

$\|x\| + \|y\|$.

27. Αποδείξτε ότι, αν $1 \leq p \leq +\infty$ και $p \neq 2$, ο l^p με την p-νόρμα δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε το ίδιο για τον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ με την p-νόρμα, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις τις οποίες πρέπει να προσδιορίσετε.

28. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, $s \in X$ και $\{x_i\}_{i \in I}$ στον X. Αποδείξτε ότι $\sum_{i \in I} x_i = s$ χωρίς προϋποθέσεις αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $I_\epsilon \subseteq I$ ώστε $\left\|\sum_{i \in J} x_i - s\right\| < \epsilon$ για κάθε πεπερασμένο J με $I_\epsilon \subseteq J \subseteq I$.

29. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$.
(1) Αν $x, a_1, \ldots, a_n \in X$ και το $\{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι ορθοκανονικό, αποδείξτε ότι το μόνο στοιχείο του $< \{a_1, \ldots, a_n\} >$ το οποίο έχει την ελάχιστη απόσταση από το x είναι το $(x|a_1)a_1 + \cdots + (x|a_n)a_n$.
(2) Αν A είναι ορθοκανονική βάση του X, αποδείξτε ότι $x = \sum_{a \in A}(x|a)a$ για κάθε $x \in X$.

30. Θεωρούμε τον υπόχωρο c_{00} του l^2 με στοιχεία όλες τις ακολουθίες $x = (x_1, x_2, \ldots)$ οι οποίες έχουν το πολύ πεπερασμένου πλήθους μη-μηδενικές συντεταγμένες.
(1) Αποδείξτε ότι το $K = \{y \in c_{00} | \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} y_j = 1\}$ είναι κλειστό και κυρτό αλλά ότι δεν υπάρχει $y_0 \in K$ με $\|y_0\|_2 = \inf_{y \in K} \|y\|_2$.
(2) Αν $Y = \{y \in c_{00} | \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} y_j = 0\}$, αποδείξτε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του c_{00}, αλλά $Y \neq (Y^\perp)^\perp$.

31. Αποδείξτε ότι στον υπόχωρο $Y =< \{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k, e_2, e_3, \ldots\} >$ του l^2 το $\{e_2, e_3, \ldots\}$ είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο αλλά όχι ορθοκανονική βάση.

Ορισμός: *(Ευθύ άθροισμα χώρων με εσωτερικό γινόμενο) Έστω ότι για κάθε* $i \in I$ *ο* X_i *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο* $(\cdot|\cdot)_i$ *και επαγώμενη νόρμα* $\|\cdot\|_i$. *Ορίζουμε* $\bigoplus_{i \in I} X_i$ *να είναι το σύνολο όλων των* $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ *με* $\sum_{i \in I} \|x_i\|_i^2 < +\infty$.

32. Για $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} X_i$ ορίζουμε $(x|y) = \sum_{i \in I}(x_i|y_i)_i$.
(1) Αποδείξτε ότι η σειρά που ορίζει το $(x|y)$ συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις και το $(\cdot|\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\bigoplus_{i \in I} X_i$.
(2) Αποδείξτε ότι, αν κάθε X_i είναι πλήρης, τότε και ο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι πλήρης.

Ορισμός: *Έστω* $X_i = F$ *για κάθε* $i \in I$. *Ορίζουμε* $l^2(I) = \bigoplus_{i \in I} F$. *Δηλαδή, για κάθε* $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} F$ *είναι* $(x|y) = \sum_{i \in I} x_i y_i$ *και* $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2$.

33. Αποδείξτε ότι ο $l^2(I)$ είναι χώρος Hilbert.

34. Αποδείξτε ότι κάθε δύο maximal ορθοκανονικά σύνολα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.

Ορισμός: *Αν X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και A είναι οποιοδήποτε maximal ορθοκανονικό σύνολο του X, ο $card(A)$ ονομάζεται* ***διάσταση Hilbert του*** *X.*

35. Έστω χώρος Hilbert X με ορθοκανονική βάση $\{x_i|i \in I\}$. Αποδείξτε ότι $X \overset{iso}{=} l^2(I)$.

36. Έστω ο χώρος $H^2(\Delta)$ ο οποίος ορίσθηκε ακριβώς πρίν από την άσκηση 41. Κάθε $f \in H^2(\Delta)$ γράφεται $f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ για κάθε $z \in \Delta$, όπου η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Δ.
(1) Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in [0,1)$ ισχύει $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
(2) Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r και ότι $\|f\|_2 = \lim_{r\to 1-}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$.
(3) Αν η f είναι ολόμορφη στο Δ και $f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ για κάθε $z \in \Delta$, αποδείξτε ότι $f \in H^2(\Delta)$ αν και μόνον αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, $\|f\|_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2$.
(4) Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in H^2(\Delta)$ με $f(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ και $g(z) = \sum_{n=0} b_n z^n$ για κάθε $z \in \Delta$, η σειρά $\sum_{n=0} a_n \overline{b_n}$ συγκλίνει και ότι, αν ορίσουμε $(f|g)_2 = \sum_{n=0} a_n \overline{b_n}$, τότε το $(\cdot|\cdot)_2$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H^2(\Delta)$ το οποίο επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

37. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R^n}$ και $k \in \mathbf{N}_0$. Για κάθε $f, g \in C^{k,2}(U)$ ορίζουμε $(f|g)_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k}\int_U D^\alpha f \overline{D^\alpha g}\, dm$. Αποδείξτε ότι το $(\cdot|\cdot)_{k,2}$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $C^{k,2}(U)$ και ότι επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_{k,2}$.

Ορισμός: *(Συναρτήσεις με τιμές σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο). Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_X$ και χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ). Αν $f : \Omega \to X$, λέμε ότι η f είναι* ***μετρήσιμη*** *αν για κάθε $x \in X$ η $(f(\cdot)|x)_X : \Omega \to F$ είναι μετρήσιμη.*

38. Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_X$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|_X$. Αν οι $f, g : \Omega \to X$ είναι μετρήσιμες, αποδείξτε ότι οι $\|f(\cdot)\|_X : \Omega \to \mathbf{R_0^+}$ και $(f(\cdot)|g(\cdot))_X : \Omega \to F$ είναι μετρήσιμες.

Ορισμός: *(Συναρτήσεις με τιμές σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο). Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_X$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|_X$. Ορίζουμε το $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων $f : \Omega \to X$ με $\int_\Omega \|f(a)\|_X^2\, d\mu(a) < +\infty$.*

39. Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_X$, επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|_X$ και ορθοκανονική βάση $\{x_1, x_2, \ldots\}$.
(1) Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ το $(f|g) = \int_\Omega (f(a)|g(a))_X\, d\mu(a)$ συγκλίνει και ότι το $(\cdot|\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$.
(2) Για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ αποδείξτε ότι $f(\cdot) = \sum_{k=1}^{+\infty}(f(\cdot)|x_k)_X x_k$ και $(f|g) = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_\Omega (f(a)|x_k)_X \overline{(g(a)|x_k)_X}\, d\mu(a)$.

40. Έστω μ_1 και μ_2 δύο μέτρα στον ίδιο μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ), τα οποία είναι αμοιβαία ιδιάζοντα, $\mu_1 \perp \mu_2$. Αποδείξτε ότι $L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1 + \mu_2) \stackrel{iso}{=} L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1) \oplus L^2(\Omega, \Sigma, \mu_2)$.

41. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_X$. Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$ θέτουμε $G(x_1, \ldots, x_n) = \det\big((x_i|x_j)\big)$.
(1) Αποδείξτε ότι $G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ και ότι ισχύει $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ αν και μόνον αν το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.
(2) Αν $x \in X$, $M =< \{x_1, \ldots, x_n\} >$ και το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αποδείξτε ότι $\min_{y \in M} \|x - y\|^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$.
(3) Αν το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στον $\mathbf{R^n}$, αποδείξτε ότι ο όγκος του παραλληλεπίπεδου $P = \{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n | 0 \leq t_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq t_n \leq 1\}$ είναι ίσος με $\sqrt{G(x_1, \ldots, x_n)}$.

42. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο και ορθοκανονικό σύνολο A. Αν η σειρά $\sum_{a \in A} \kappa_a a$ συγκλίνει χωρίς προϋποθέσεις, αποδείξτε ότι $\sum_{a \in A} |\kappa_a|^2 < +\infty$.

Ορισμός: *Τα πολυώνυμα Hermite ορίζονται για κάθε* $n \in \mathbf{N_0}$ *με τον τύπο* $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n(e^{-t^2})$.

43. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n(t) e^{-\frac{1}{2} t^2}$, $n \in \mathbf{N_0}$, αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), m)$.

Ορισμός: *Τα πολυώνυμα Laguerre ορίζονται με τον τύπο* $L_n(t) = e^t D^n(t^n e^{-t})$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N_0}$.

44. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\phi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t) e^{-\frac{1}{2} t}$, $n \in \mathbf{N_0}$, αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{B}(\mathbf{R}^+), m)$.

Ορισμός: *Ορίζουμε τις συναρτήσεις Rademacher* r_k, $k \in \mathbf{N_0}$, *να είναι οι* $1-$ *περιοδικές συναρτήσεις στο* $\mathbf{R}$ *με* $r_0(t) = 1$, *αν* $0 \leq t < \frac{1}{2}$, *και* $r_0(t) = -1$, *αν* $\frac{1}{2} \leq t < 1$ *και με* $r_k(t) = r_0(\frac{1}{2^k} t)$ *για κάθε* $k \geq 1$ *και* $t \in \mathbf{R}$.

Οι συναρτήσεις Walsh W_n, $n \in \mathbf{N_0}$, *ορίζονται ως εξής:* $W_0(t) = 1$ *για κάθε* $t \in \mathbf{R}$ *και, αν* $n \geq 1$, *γράφουμε τη δυαδική αναπαράσταση* $n = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k 2^k$ *(με αναγκαστικά πεπερασμένου πλήθους όρους) του* n, *όπου* $\xi_k \in \{0, 1\}$ *για κάθε* k, *και θέτουμε* $W_n(t) = \prod_{k=0}^{+\infty} (r_k(t))^{\xi_k}$.

45. Αποδείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων Walsh αποτελεί ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

46. Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbf{R^n}$ και $C_c(U)$ το σύνολο όλων των $f : U \to F$ συνεχών και με συμπαγή φορέα $supp(f) \subseteq U$. Παίρνουμε οποιαδήποτε συμπαγή $K_k \subseteq U$, $k \in \mathbf{N}$, με $K_k \subseteq K_{k+1}$ για κάθε k ώστε για κάθε συμπαγές $K \subseteq U$ να υπάρχει k με $K \subseteq K_k$. Κατόπιν, για κάθε ακολουθία $E = \{\epsilon_k\}$ στο $\mathbf{R}^+$, θεωρούμε τα $B_k(\epsilon_k) = \{f \in C(U) | \, supp(f) \subseteq K_k, \|f\|_u < \epsilon_k\}$ για κάθε k και το $U_E^0 = co\big(\cup_{k=1}^{+\infty} B_k(\epsilon_k)\big)$.

Αποδείξτε ότι ορίζεται τοπικά κυρτή τοπολογία στον $C_c(U)$ ώστε η συλλογή $\mathcal{N}^0 = \{U_E^0 | E\}$ να αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0.

47. Έστω $\{f_m\}$ και f στον $C_c(U)$. Αποδείξτε ότι $f_m \to f$ ως προς την τοπολογία που ορίσθηκε στην προηγούμενη άσκηση αν και μόνον αν υπάρχει k ώστε $supp(f_m) \subseteq K_k$ για κάθε m και $f_m \to f$ ομοιόμορφα στο U.

48. Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbf{R^n}$ και $C_c^\infty(U)$ το σύνολο όλων των $f : U \to F$ απείρως παραγωγίσιμων και με συμπαγή φορέα $supp(f) \subseteq U$. Παίρνουμε οποιαδήποτε συμπαγή $K_k \subseteq U$, $k \in \mathbf{N}$, με $K_k \subseteq K_{k+1}$ για κάθε k ώστε για κάθε συμπαγές $K \subseteq U$ να υπάρχει k με $K \subseteq K_k$. Κατόπιν, για κάθε ακολουθία $E = \{\epsilon_k\}$ στο $\mathbf{R}^+$ και για κάθε ακολουθία $N = \{n_k\}$ στο $\mathbf{N}_0$, θεωρούμε τα $B_k(\epsilon_k, n_k) = \{f \in C(U) |\, supp(f) \subseteq K_k,\, p_{K_k,n_k}(f) < \epsilon_k\}$ για κάθε k και το $U_{E,N}^0 = co\big(\cup_{k=1}^{+\infty} B_k(\epsilon_k, n_k)\big)$.

Αποδείξτε ότι ορίζεται τοπικά κυρτή τοπολογία στον $C_c^\infty(U)$ ώστε η συλλογή $\mathcal{N}^0 = \{U_{E,N}^0 | E, N\}$ να αποτελεί βάση ανοικτών περιοχών του 0.

Ορισμός: *Ο $C_c^\infty(U)$ με την τοπικά κυρτή τοπολογία που ορίσθηκε στην προηγούμενη άσκηση συμβολίζεται $\mathcal{D}(U)$ και ονομάζεται* ***χώρος των test functions στο U.***

49. Έστω $\{f_m\}$ και f στον $\mathcal{D}(U)$. Αποδείξτε ότι $f_m \to f$ ως προς την τοπολογία που ορίσθηκε στην προηγούμενη άσκηση αν και μόνον αν υπάρχει k ώστε $supp(f_m) \subseteq K_k$ για κάθε m και $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ ομοιόμορφα στο U για κάθε α.

50. Έστω τοπικά κυρτός χώρος X του οποίου η τοπολογία επάγεται από την συλλογή ημινορμών $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Αποδείξτε ότι η $p = \max(p_1, \ldots, p_n)$ είναι νόρμα στον X και ότι επάγει την τοπολογία του X.

51. Αποδείξτε ότι κάθε τοπικά κυρτή τοπολογία σε χώρο πεπερασμένης διάστασης X ταυτίζεται με την τοπολογία η οποία επάγεται στον X από οποιαδήποτε νόρμα του.

52. Έστω X οποιοσδήποτε τοπικά κυρτός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε γραμμικός υπόχωρος Y του X με $\dim(Y) < +\infty$ είναι πλήρης.

53. Έστω X οποιοσδήποτε τοπικά κυρτός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του X έχει κενό εσωτερικό.

54. Έστω τοπικά κυρτός χώρος X του οποίου η τοπολογία επάγεται από την διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών $\mathcal{P}$.
(1) Αν p είναι οποιαδήποτε ημινόρμα στον X, αποδείξτε ότι η p είναι συνεχής στον X αν και μόνον αν υπάρχουν $C > 0$ και $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ ώστε $p \leq C \max(p_1, \ldots, p_n)$.
(2) Αν $\mathcal{P}_0$ είναι η συλλογή όλων των ημινορμών στον X οι οποίες είναι συνεχείς στον X, αποδείξτε ότι η τοπικά κυρτή τοπολογία του X η οποία επάγεται από την $\mathcal{P}_0$ ταυτίζεται με την αρχική τοπολογία του X.

Κεφάλαιο 4

Ο δυικός χώρος

4.1 Φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή

Ορισμός 4.1 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και γραμμικό συναρτησοειδές $x' : X \to F$. Το x' ονομάζεται* ***φραγμένο*** *αν υπάρχει $C \geq 0$ ώστε*

$$|x'(x)| \leq C\,\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 4.1 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και γραμμικό συναρτησοειδές $x' : X \to F$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(1) Το x' είναι συνεχής συνάρτηση στον X.
(2) Το x' είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in X$.
(3) Το x' είναι φραγμένο.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι το (1) συνεπάγεται το (2).

Αν το x' δεν είναι φραγμένο, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ με $|x'(x_n)| > n\,\|x_n\|$. Τότε $x_n \neq 0$ και, θέτοντας $y_n = \frac{1}{n\|x_n\|}\,x_n$, έχουμε $y_n \to 0$ αλλά $|x'(y_n)| > 1$, οπότε το x' δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο 0.

Έστω ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε $|x'(x)| \leq C\,\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αν $x_n \to x$ στον X, τότε $|x'(x_n) - x'(x)| = |x'(x_n - x)| \leq C\,\|x_n - x\| \to 0$ και, επομένως, το x' είναι συνεχής συνάρτηση στον X.

Ορισμός 4.2 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Το σύνολο όλων των συνεχών στον X ή, ισοδύναμα, φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X ονομάζεται* ***δυικός χώρος του*** *X και συμβολίζεται X^*.*

Είναι φανερό ότι ο χώρος X^* είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου X' όλων των γραμμικών συναρτησοειδών του X. Θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του X^* με τα σύμβολα x^*, y^* κλπ.

Είναι γνωστό ότι ο μηδενόχωρος ενός γραμμικού συναρτησοειδούς είναι γραμμικός υπόχωρος συνδιάστασης 1 ή 0. Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει σχετικό χαρα-κτηρισμό της συνέχειας.

Πρόταση 4.2 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και $x^* \in X^*$. Το x^* είναι φραγμένο αν και μόνον αν ο $N(x^*)$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη: Αν το x^* είναι συνεχές, τότε το $N(x^*) = (x^*)^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου.

Έστω ότι το $N(x^*)$ είναι κλειστό. Αν x^* είναι το μηδενικό συναρτησοειδές τότε είναι, προφανώς, συνεχές. Αν όχι, τότε υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x^*(x_0) = 1$. Επειδή οι μεταφορές είναι ομοιομορφισμοί του X, το υπερεπίπεδο $x_0 + N(x^*) = \{x \in X | x^*(x) = 1\}$ είναι κλειστό στον X. Και, επειδή $0 \notin x_0 + N(x^*)$, υπάρχει $R > 0$ ώστε $B(0; R) \cap (x_0 + N(x^*)) = \emptyset$. Έστω, τώρα, ότι $|x^*(x)| > \frac{1}{R}\|x\|$ για κάποιο $x \in X$. Βρίσκουμε $\kappa \in F$ ώστε $|\kappa| < 1$ και $\kappa x^*(x) = \frac{1}{R}\|x\|$ και θέτουμε $y = \frac{\kappa R}{\|x\|} x$. Τότε $y \in B(0; R)$ και $x^*(y) = \frac{\kappa R}{\|x\|} x^*(x) = 1$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε $|x^*(x)| \leq \frac{1}{R}\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Πρόταση 4.3 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και $x^* \in X^*$. Τότε υπάρχει το $\min\{C \geq 0 \,|\, |x^*(x)| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X\}$.*

Απόδειξη: Έστω $C_0 = \inf\{C \geq 0 \,|\, |x^*(x)| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X\}$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $C \geq 0$ με $|x^*(x)| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και, κρατώντας σταθερό το τυχόν $x \in X$, παίρνουμε το infimum της δεξιάς πλευράς ως προς το C. Βρίσκουμε $|x^*(x)| \leq C_0\|x\|$ για το τυχόν $x \in X$.

Ορισμός 4.3 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και $x^* \in X^*$. Ορίζουμε τη* ***νόρμα του*** *x^* με τον τύπο*

$$\|x^*\| = \min\{C \geq 0 \,|\, |x^*(x)| \leq C\|x\| \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Άρα

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \, \|x\|$$

για κάθε $x \in X$ και κάθε $x^* \in X^*$.

Πρόταση 4.4 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και $x^* \in X^*$. Τότε*

$$\|x^*\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |x^*(x)| = \sup_{x \in X, \|x\| = 1} |x^*(x)| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $C = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|}$, οπότε $|x^*(x)| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$. Επειδή αυτό ισχύει και για $x = 0$, ο ορισμός της νόρμας του x^* δίνει την πρώτη από τις ανισο/ισότητες $\|x^*\| \leq \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, x \neq 0} |x^*(\frac{x}{\|x\|})| = \sup_{x \in X, \|x\| = 1} |x^*(x)| \leq \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |x^*(x)| \leq \|x^*\|$.

Πρόταση 4.5 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X^* \to \mathbf{R}_0^+$ που ορίσθηκε στον τελευταίο ορισμό είναι νόρμα στον X^* και ο X^* είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Αν $x^* \in X^*$ και $\|x^*\| = 0$, τότε $x^*(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, οπότε το x^* είναι το μηδενικό στοιχείο του X^*.

Για κάθε $x \in X$ και κάθε $x_1^*, x_2^* \in X^*$ έχουμε $|(x_1^* + x_2^*)(x)| \leq |x_1^*(x)| + |x_2^*(x)| \leq \|x_1^*\| \|x\| + \|x_2^*\| \|x\| = (\|x_1^*\| + \|x_2^*\|) \|x\|$. Επομένως $\|x_1^* + x_2^*\| \leq \|x_1^*\| + \|x_2^*\|$.

Για κάθε $x^* \in X^*$ και $\kappa \in F$ έχουμε $\|\kappa x^*\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |(\kappa x^*)(x)| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\kappa||x^*(x)| = |\kappa| \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |x^*(x)| = |\kappa| \|x^*\|$.

Άρα η $\|\cdot\| : X^* \to \mathbf{R}_0^+$ είναι νόρμα στον X^*.

Έστω $\{x_n^*\}$ στον X^* με $\|x_n^* - x_m^*\| \to 0$. Για τυχόν $x \in X$ έχουμε $|x_n^*(x) - x_m^*(x)| = |(x_n^* - x_m^*)(x)| \leq \|x_n^* - x_m^*\| \|x\| \to 0$, οπότε η $\{x_n^*(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο F. Άρα υπάρχει το όριό της στο F. Ορίζουμε $x^* : X \to F$ με τύπο $x^*(x) = \lim x_n^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Επειδή κάθε x_n^* είναι γραμμικό, ισχύει για κάθε $x, y \in X$ και $\kappa \in F$ ότι $x^*(x+y) = \lim x_n^*(x+y) = \lim x_n^*(x) + \lim x_n^*(y) = x^*(x) + x^*(y)$ και $x^*(\kappa x) = \lim x_n^*(\kappa x) = \kappa \lim x_n^*(x) = \kappa x^*(x)$. Άρα το x^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές του X.

Επειδή υπάρχει N ώστε $\|x_n^* - x_m^*\| \leq 1$ για κάθε $n, m \geq N$, έχουμε $|x_n^*(x) - x_N^*(x)| \leq \|x_n^* - x_N^*\| \|x\| \leq \|x\|$ για κάθε $n \geq N$ και $x \in X$ και, παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$, βρίσκουμε $|x^*(x) - x_N^*(x)| \leq \|x\|$. Άρα $|x^*(x)| \leq |x_N^*(x)| + \|x\| \leq (\|x_N^*\| + 1) \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επομένως το x^* είναι φραγμένο και $x^* \in X^*$.

Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $\|x_n^* - x_m^*\| \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq N$. Τότε $|x_n^*(x) - x_m^*(x)| \leq \|x_n^* - x_m^*\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|$ για κάθε $n, m \geq N$ και κάθε $x \in X$. Παίρνοντας όριο όταν $m \to +\infty$ βρίσκουμε $|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq \epsilon \|x\|$ για κάθε $n \geq N$ και κάθε $x \in X$, οπότε $\|x_n^* - x^*\| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Άρα $x_n^* \to x^*$ στον X^*.

4.2 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Θεώρημα 4.1 *Αν ο X είναι χώρος με νόρμα και $dim(X) < +\infty$, τότε $X^* \cong X$.*

Απόδειξη: Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X και $\{b_1, \ldots, b_n\}$ μία βάση του. Επειδή όλες οι νόρμες του X είναι ισοδύναμες, υπάρχουν $C, c > 0$ ώστε $c \|z\| \leq \|z\|_2 \leq C \|z\|$ για κάθε $z \in X$.

Παίρνουμε τυχόν $x \in X$, γράφουμε $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ και ορίζουμε $l_x(y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ για κάθε $y = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n \in X$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $l_x : X \to F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές του X. Επίσης, $|l_x(y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \leq C \|x\|_2 \|y\|$ και, επομένως, $l_x \in X^*$ με $\|l_x\| \leq C \|x\|_2 \leq C^2 \|x\|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T : X \to X^*$ με τύπο $T(x) = l_x$ για κάθε $x \in X$. Αν $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ και $x' = x'_1 b_1 + \cdots + x'_n b_n$, τότε $l_{x+x'}(y) = (x_1 + x'_1) y_1 + \cdots + (x_n + x'_n) y_n = l_x(y) + l_{x'}(y)$ για κάθε $y \in X$, οπότε $l_{x+x'} = l_x + l_{x'}$. Άρα $T(x + x') = T(x) + T(x')$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $T(\kappa x) = \kappa T(x)$, οπότε ο $T : X \to X^*$ είναι γραμμικός τελεστής.

Αν $T(x) = T(x')$, τότε $x_j = l_x(b_j) = l_{x'}(b_j) = x'_j$ για κάθε j και, επομένως, $x = x'$. Άρα ο T είναι $1-1$.

Θεωρούμε τυχόν $l \in X^*$ και ορίζουμε $x = l(b_1) b_1 + \cdots + l(b_n) b_n \in X$. Τότε για κάθε $y = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n \in X$ έχουμε $l_x(y) = l(b_1) y_1 + \cdots + l(b_n) y_n =$

$l(y_1b_1 + \cdots + y_nb_n) = l(y)$, οπότε $T(x) = l_x = l$. Άρα ο T είναι επί.

Ήδη έχουμε ότι $\|T(x)\| = \|l_x\| \leq C^2 \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, για κάθε $x = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n \in X$ με $x \neq 0$ παίρνουμε $z = \overline{x_1}b_1 + \cdots + \overline{x_n}b_n$ και έχουμε ότι $\|T(x)\| = \|l_x\| \geq \frac{|l_x(z)|}{\|z\|} = \frac{\|x\|_2^2}{\|z\|} \geq c\frac{\|x\|_2^2}{\|z\|_2} \geq c^2 \|x\|$. Επομένως ο T είναι τοπολογικός ισομορφισμός.

Είναι προφανές από την προηγούμενη απόδειξη ότι, αν ο X (με $dim(X) < +\infty$) έχει την 2-νόρμα, οπότε $C = c = 1$, τότε $X^* \stackrel{iso}{=} X$.

Αν $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ είναι η βάση του X, $T : X \to X^*$ είναι ο προηγούμενος ισομορφισμός και θέσουμε $b_j^* = T(b_j) = l_{b_j}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, τότε το $B^* = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ αποτελεί βάση του X^* η οποία ονομάζεται **δυική βάση της** B. Κάθε b_j^* χαρακτηρίζεται από τη δράση του στα στοιχεία της βάσης B ως εξής: $b_j^*(b_i) = 1$ αν $i = j$ και $b_j^*(b_i) = 0$ αν $i \neq j$.

4.3 Χώροι ακολουθιών

Θεώρημα 4.2 *Έστω* $1 \leq p < +\infty$ *και* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.
(1) Για κάθε $l \in (l^p)^*$ *υπάρχει μοναδικό* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^q$ *ώστε* $\|l\| = \|x\|_q$ *και* $l(y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots$ *για κάθε* $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$.
(2) $(l^p)^* \stackrel{iso}{=} l^q$.

Στην περίπτωση $p = +\infty, q = 1$ *υπάρχει ισομετρική εμφύτευση του* l^1 *στον* $(l^\infty)^*$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχόν $x = (x_1, x_2 \ldots) \in l^q$ και ορίζουμε $l_x : l^p \to F$ με τύπο $l_x(y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots$ για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$. Είναι προφανές ότι η l_x είναι γραμμικό συναρτησοειδές του l^p. Επίσης, $|l_x(y)| \leq \|x\|_q \|y\|_p$ για κάθε $y \in l^p$ και, επομένως, $l_x \in (l^p)^*$ με $\|l_x\| \leq \|x\|_q$.

Αν $1 < p < +\infty$, οπότε $1 < q < +\infty$, τότε θέτουμε $y_j = \overline{x_j}|x_j|^{q-2}$ αν $x_j \neq 0$ και $y_j = 0$ αν $x_j = 0$. Τότε $|y_1|^p + |y_2|^p + \cdots = |x_1|^q + |x_2|^q + \cdots < +\infty$, οπότε το $y = (y_1, y_2, \ldots)$ ανήκει στον l^p, και $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots = |x_1|^q + |x_2|^q + \cdots$. Επομένως, $\|x\|_q^q = l_x(y) \leq \|l_x\| \|y\|_p = \|l_x\| \|x\|_q^{\frac{q}{p}}$, οπότε $\|x\|_q \leq \|l_x\|$.

Αν $p = +\infty$, οπότε $q = 1$, τότε, επιλέγοντας το ίδιο y, έχουμε $\|x\|_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots = l_x(y) \leq \|l_x\| \|y\|_\infty = \|l_x\|$.

Αν $p = 1$, οπότε $q = +\infty$, τότε $|x_j| = |l_x(e_j)| \leq \|l_x\| \|e_j\|_1 = \|l_x\|$ για κάθε j, οπότε $\|x\|_\infty \leq \|l_x\|$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $\|x\|_q = \|l_x\|$.

Θεωρούμε την $T : l^q \to (l^p)^*$ με τύπο $T(x) = l_x$ για κάθε $x \in l^q$. Όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, είναι εύκολο να δουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\|T(x)\| = \|l_x\| = \|x\|_q$ για κάθε $x \in l^q$. Από την ισότητα αυτή συνεπάγεται ότι ο T είναι 1-1 (διότι, αν $x = 0$, τότε $T(x) = 0$) και ότι, αν δείξουμε ότι ο T είναι επί, τότε ο T είναι ισομετρία.

Έστω, τώρα, οποιοδήποτε $l \in (l^p)^*$.

Έστω, κατ' αρχήν, ότι $1 < p < +\infty$, οπότε θέτουμε $x_j = l(e_j)$ για κάθε j και $z_j = \overline{x_j}|x_j|^{q-2}$ αν $x_j \neq 0$ και $z_j = 0$ αν $x_j = 0$. Τότε για κάθε N έχουμε $|x_1|^q + \cdots + |x_N|^q = x_1z_1 + \cdots + x_Nz_N = l(z_1e_1 + \cdots + z_Ne_N) \leq \|l\| \, (|z_1|^p + \cdots + |z_N|^p)^{\frac{1}{p}} = \|l\| \, (|x_1|^q + \cdots + |x_N|^q)^{\frac{1}{p}}$. Συνεπάγεται ότι $|x_1|^q + \cdots + |x_N|^q \leq \|l\|^q$ για κάθε N, οπότε, αν ορίσουμε $x = (x_1, x_2, \ldots)$, τότε $x \in l^q$ και $\|x\|_q \leq \|l\| < +\infty$.

Αν $p = 1$, θέτοντας πάλι $x_j = l(e_j)$, έχουμε $|x_j| \leq \|l\| \, \|e_j\|_1 = \|l\|$ για κάθε j, οπότε, αν ορίσουμε $x = (x_1, x_2, \ldots)$, τότε $x \in l^\infty$ και $\|x\|_\infty \leq \|l\| < +\infty$.

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $x \in l^q$.

Για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$ παίρνουμε $y^{(N)} = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$ και έχουμε $l_x(y^{(N)}) = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N = l(e_1)y_1 + \cdots + l(e_N)y_N = l(y^{(N)})$. Επειδή τα l_x, l είναι συνεχή και $y^{(N)} \to y$ στον l^p, συνεπάγεται ότι $l_x(y) = l(y)$. Άρα $T(x) = l_x = l$ και ο T είναι επί.

Αξίζει, στην περίπτωση $p = +\infty, q = 1$, να σκεφτούμε σε ποιό σημείο του παρουσιάζει πρόβλημα το μέρος της προηγούμενης απόδειξης το οποίο αφορά στο αν ο T είναι επί. Το πρόβλημα είναι ότι δεν ισχύει για κάθε $y \in l^\infty$ ότι $y^{(N)} \to y$ στον l^∞!

Θεώρημα 4.3 *(1) Για κάθε* $l \in (c_0)^*$ *υπάρχει μοναδικό* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$ *με* $\|l\| = \|x\|_1$ *και* $l(y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots$ *για κάθε* $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$*.*

(2) Για κάθε $l \in c^*$ *υπάρχει μοναδικό* $x = (x_0, x_1, \ldots) \in l^1$ *ώστε* $\|l\| = \|x\|_1$ *και* $l(y) = x_0 \lim y_n + x_1y_1 + \cdots$ *για κάθε* $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c$*.*

(3) Ισχύει ότι $(c_0)^* \overset{iso}{=} l^1$ *και* $c^* \overset{iso}{=} l^1$*.*

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχόν $x = (x_1, x_2 \ldots) \in l^1$ και ορίζουμε $l_x : c_0 \to F$ με τύπο $l_x(y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots$ για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$. Η σειρά αυτή συγκλίνει (απολύτως) διότι η y είναι φραγμένη ακολουθία και είναι προφανές ότι η l_x είναι γραμμικό συναρτησοειδές του c_0. Επίσης, $|l_x(y)| \leq \|x\|_1 \, \|y\|_\infty$ για κάθε $y \in c_0$ και, επομένως, $l_x \in (c_0)^*$ με $\|l_x\| \leq \|x\|_1$.

Θέτουμε $y_j = \frac{\overline{x_j}}{|x_j|}$ αν $x_j \neq 0$ και $y_j = 0$ αν $x_j = 0$. Τότε για κάθε N έχουμε $|x_1| + \cdots + |x_N| = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N = l_x\big((y_1, \ldots, y_N, 0, \ldots)\big) \leq \|l_x\| \, \|(y_1, \ldots, y_N, 0, \ldots)\|_\infty \leq \|l_x\|$. Επειδή το N είναι τυχόν, συνεπάγεται ότι $\|x\|_1 \leq \|l_x\|$ και, επομένως $\|x\|_1 = \|l_x\|$.

Θεωρούμε την $T : l^1 \to (c_0)^*$ με τύπο $T(x) = l_x$ για κάθε $x \in l^1$. Είναι εύκολο να δουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής και έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\|T(x)\| = \|l_x\| = \|x\|_1$ για κάθε $x \in l^1$. Άρα αρκεί να αποδειχθεί ότι ο T είναι επί ώστε να είναι ισομετρία.

Έστω, τώρα, οποιοδήποτε $l \in (c_0)^*$. Θέτουμε $x_j = l(e_j)$ για κάθε j και $z_j = \frac{\overline{x_j}}{|x_j|}$ αν $x_j \neq 0$ και $z_j = 0$ αν $x_j = 0$. Τότε για κάθε N έχουμε $|x_1| + \cdots + |x_N| = x_1z_1 + \cdots + x_Nz_N = l(z_1e_1 + \cdots + z_Ne_N) \leq \|l\| \max(|z_1|, \cdots, |z_N|) \leq \|l\|$. Άρα, αν ορίσουμε $x = (x_1, x_2, \ldots)$, τότε $x \in l^1$ και $\|x\|_1 \leq \|l\|$. Για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ παίρνουμε $y^{(N)} = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$ και έχουμε $l_x(y^{(N)}) = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N = l(e_1)y_1 + \cdots + l(e_N)y_N = l(y^{(N)})$. Επειδή τα l_x, l είναι συνεχή και $y^{(N)} \to y$ στον c_0, συνεπάγεται ότι $l_x(y) = l(y)$. Άρα $T(x) = l$ και ο T είναι επί.

Στην περίπτωση του c χρησιμοποιούμε και το στοιχείο $e = (1, 1, \ldots)$ εκτός από τα e_j και, χάριν ευκολίας, το συμβολισμό $x = (x_0, x_1, \ldots)$ για τα στοιχεία του l^1. Η απόδειξη είναι παρόμοια με τις προηγούμενες, οπότε παίρνουμε $x = (x_0, x_1 \ldots) \in l^1$ και ορίζουμε $l_x : c \to F$ με τύπο $l_x(y) = x_0 \lim y_n + x_1 y_1 + \cdots$ για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c$. Η l_x είναι γραμμικό συναρτησοειδές του c και $|l_x(y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$ για κάθε $y \in c$, οπότε $l_x \in c^*$ με $\|l_x\| \leq \|x\|_1$.

Για $j \geq 0$ θέτουμε $y_j = \frac{\overline{x_j}}{|x_j|}$ αν $x_j \neq 0$ και $y_j = 0$ αν $x_j = 0$. Τότε για κάθε N έχουμε $|x_0| + |x_1| + \cdots + |x_N| + x_{N+1} y_0 + x_{N+2} y_0 + \cdots = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N + x_{N+1} y_0 + x_{N+2} y_0 + \cdots = l_x\big((y_1, \ldots, y_N, y_0, y_0, \ldots)\big) \leq \|l_x\| \|(y_1, \ldots, y_N, y_0, y_0, \ldots)\|_\infty \leq \|l_x\|$. Επειδή το N είναι τυχόν και επειδή $x_{N+1} y_0 + x_{N+2} y_0 + \cdots \to 0$ όταν $N \to +\infty$, συνεπάγεται ότι $\|x\|_1 \leq \|l_x\|$ και, επομένως $\|x\|_1 = \|l_x\|$.

Θεωρούμε την $T : l^1 \to c^*$ με τύπο $T(x) = l_x$ για κάθε $x \in l^1$. Ο T είναι γραμμικός τελεστής και έχουμε αποδείξει ότι $\|T(x)\| = \|l_x\| = \|x\|_1$ για κάθε $x \in l^1$, οπότε απομένει να αποδειχθεί ότι ο T είναι επί.

Έστω, τώρα, οποιοδήποτε $l \in c^*$. Κατ' αρχήν, θέτουμε $x_j = l(e_j)$ για κάθε j και $z_j = \frac{\overline{x_j}}{|x_j|}$ αν $x_j \neq 0$ και $z_j = 0$ αν $x_j = 0$. Τότε για κάθε N έχουμε $|x_1| + \cdots + |x_N| = x_1 z_1 + \cdots + x_N z_N = l(z_1 e_1 + \cdots + z_N e_N) \leq \|l\| \max(|z_1|, \cdots, |z_N|) \leq \|l\|$. Άρα η σειρά $x_1 + x_2 + \cdots$ συγκλίνει (απολύτως) και θέτουμε $x_0 = l(e) - x_1 - x_2 - \cdots$. Συμπληρώνουμε με $z_0 = \frac{\overline{x_0}}{|x_0|}$ αν $x_0 \neq 0$ και $z_0 = 0$ αν $x_0 = 0$ και ορίζουμε $x = (x_0, x_1, \ldots)$, οπότε $x \in l^1$. Για κάθε N παίρνουμε $z^{(N)} = (z_1, \ldots, z_N, z_0, z_0, \ldots) \in c$ και έχουμε $|x_0| + \cdots + |x_N| = x_0 z_0 + \cdots + x_N z_N = z_0 l(e) + (z_1 - z_0) l(e_1) + \cdots + (z_N - z_0) l(e_N) - z_0(x_{N+1} + \cdots) \leq l\big(z_0 e + (z_1 - z_0) e_1 + \cdots + (z_N - z_0) e_N\big) + |z_0|(|x_{N+1}| + \cdots) = l(z^{(N)}) + |x_{N+1}| + \cdots \leq \|l\| \left\|z^{(N)}\right\|_\infty + |x_{N+1}| + \cdots \leq \|l\| + |x_{N+1}| + \cdots$. Παίρνοντας όριο όταν $N \to +\infty$, βρίσκουμε $\|x\|_1 \leq \|l\|$.

Για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c$ θέτουμε $y^{(N)} = (y_1, \ldots, y_N, \lim y_n, \lim y_n, \ldots)$ και έχουμε $l_x(y^{(N)}) = x_0 \lim y_n + x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N + x_{N+1} \lim y_n + \cdots = l(e) \lim y_n + l(e_1)(y_1 - \lim y_n) + \cdots + l(e_N)(y_N - \lim y_n) = l(y^{(N)})$. Επειδή τα l_x, l είναι συνεχή και $y^{(N)} \to y$ στον c, συνεπάγεται ότι $l_x(y) = l(y)$. Άρα $T(x) = l$ και ο T είναι επί.

4.4 Χώροι Hilbert

Ορισμός 4.4 *Έστω γραμμικοί χώροι X, Y επί του F και $T : X \to Y$. Ο T ονομάζεται* ***αντι-γραμμικός τελεστής*** *αν*

$$T(x + x') = T(x) + T(x') \qquad \text{και} \qquad T(\kappa x) = \overline{\kappa} T(x)$$

για κάθε $x, x' \in X$ και $\kappa \in F$.

Αν ο T είναι και 1-1 και επί, τότε ονομάζεται ***αντι-ισομορφισμός****.*

Αν οι X, Y είναι χώροι με νόρμα και, εκτός των ανωτέρω, $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$, τότε ο T ονομάζεται ***αντι-ισομετρία****.*

Θεώρημα 4.4 *(F. Riesz) Έστω χώρος Hilbert X.*
(1) Για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $x^*(u) = (u|x)$ για κάθε $u \in X$.
(2) Υπάρχει αντι-ισομετρία $T : X \to X^*$.

Απόδειξη: Για τυχόν $x \in X$ ορίζουμε $l_x : X \to F$ με τύπο $l_x(u) = (u|x)$ για κάθε $u \in X$. Είναι προφανές ότι η l_x είναι γραμμικό συναρτησοειδές του X και έχουμε ότι $|l_x(u)| \le \|x\| \, \|u\|$ για κάθε $u \in X$. Άρα $l_x \in X^*$ και $\|l_x\| \le \|x\|$.

Επίσης, $\|x\|^2 = (x|x) = l_x(x) \le \|l_x\| \, \|x\|$. Άρα $\|x\| \le \|l_x\|$ και, επομένως, $\|x\| = \|l_x\|$.

Ορίζουμε $T : X \to X^*$ με τύπο $T(x) = l_x$, οπότε εύκολα βλέπουμε ότι $T(x + x') = T(x) + T(x')$ και $T(\kappa x) = \overline{\kappa} T(x)$ για κάθε $x, x' \in X$ και $\kappa \in F$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\|T(x)\| = \|l_x\| = \|x\|$.

Αν $T(x) = T(x')$, τότε $(x - x'|x - x') = (x - x'|x) - (x - x'|x') = l_x(x - x') - l_{x'}(x - x') = 0$, οπότε $x = x'$ και ο T είναι 1-1.

Έστω τυχόν $l \in X^*$. Αν l είναι το μηδενικό συναρτησοειδές, τότε με $x = 0$ έχουμε, προφανώς, ότι $T(x) = l_x = l$. Υποθέτουμε ότι το l δεν είναι το μηδενικό συναρτησοειδές, οπότε ο $N(l)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X, και παίρνουμε $x_0 \in X$ με $l(x_0) = 1$. Τότε το x_0 γράφεται $x_0 = y_0 + z_0$ με $y_0 \in N(l)$ και $z_0 \perp N(l)$, οπότε $l(z_0) = 1$. Κατόπιν, παίρνουμε οποιοδήποτε $u \in X$ και γράφουμε $u = y + z$ με $y \in N(l)$ και $z \perp N(l)$. Υπολογίζουμε $l(z - l(z)z_0) = l(z) - l(z) = 0$, οπότε $z - l(z)z_0 \in N(l)$. Επειδή $z - l(z)z_0 \perp N(l)$ συνεπάγεται $z - l(z)z_0 = 0$ και, επομένως, $z = l(z)z_0$. Άρα $(u|z_0) = (y|z_0) + (z|z_0) = (z|z_0) = l(z) \|z_0\|^2 = l(u) \|z_0\|^2$. Θέτουμε $x = \frac{1}{\|z_0\|^2} z_0$, οπότε $l_x(u) = (u|x) = l(u)$ για κάθε $u \in X$. Δηλαδή, $T(x) = l_x = l$ και ο T είναι επί.

4.5 Χώροι συναρτήσεων

Ορισμός 4.5 *Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και $\nu \in \mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$.*
*(i) Το μ ονομάζεται **σ-πεπερασμένο** αν υπάρχουν $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ με $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ και $\mu(A_j) < +\infty$ για κάθε j.*
*(ii) Το ν ονομάζεται **απολύτως συνεχές ως προς το** μ αν $\nu(A) = 0$ για κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) = 0$.*

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα της κλασσικής θεωρίας μέτρου και εδώ θα δούμε την απόδειξή του από τον von Neumann με μεθόδους χώρων Hilbert.

Θεώρημα 4.5 *(Radon-Nikodym) Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και έστω $\nu \in \mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$. Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο και το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ, τότε υπάρχει μοναδική $h \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε $\nu(A) = \int_A h \, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$.*

Απόδειξη: 1. Κατ' αρχήν θεωρούμε την περίπτωση που το ν είναι μη-αρνητικό και $\mu(\Omega) < +\infty$.

Θέτουμε $\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$, οπότε το $\lambda : \Sigma \to \mathbf{R}$ είναι μη-αρνητικό μέτρο με $\lambda(\Omega) < +\infty$. Κατόπιν, ορίζουμε $l : L^2(\Omega, \Sigma, \lambda) \to F$ με τύπο

$$l(f) = \int_\Omega f\, d\nu\,, \qquad f \in L^2(\Omega, \Sigma, \lambda).$$

Το l είναι γραμμικό συναρτησοειδές του $L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$ και $|l(f)| \le \int_\Omega |f|\, d\nu \le \int_\Omega |f|\, d\lambda \le (\lambda(\Omega))^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |f|^2\, d\lambda)^{\frac{1}{2}} = (\lambda(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$. Επομένως, το l είναι συνεχές και, επειδή ο $L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$ είναι χώρος Hilbert, συνεπάγεται ότι υπάρχει $g \in L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$ ώστε $\int_\Omega f\, d\nu = l(f) = \int_\Omega fg\, d\lambda$ για κάθε $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$.

Παίρνουμε τυχόν $n \in \mathbf{N}$ και το $A_n = \{a \in \Omega |\, \Im g(a) \ge \frac{1}{n}\} \in \Sigma$. Αν στην τελευταία ισότητα θέσουμε $f = \chi_{A_n}$, η οποία ανήκει στον $L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$ (αφού $\lambda(\Omega) < +\infty$), και αν εξισώσουμε τα φανταστικά μέρη των δύο πλευρών, βρίσκουμε $0 \ge \frac{1}{n}\, \lambda(A_n)$. Άρα $\lambda(A_n) = 0$ και, επειδή $\{a \in \Omega | \Im g(a) > 0\} = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$, συνεπάγεται ότι $\lambda(\{a \in \Omega | \Im g(a) > 0\}) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lambda(\{a \in \Omega | \Im g(a) < 0\}) = 0$, οπότε $g(a) \in \mathbf{R}$ για λ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$. Κατόπιν, για τυχόν n θέτουμε $A_n = \{a \in \Omega | \Re g(a) \ge 1 + \frac{1}{n}\}$ και $f = \chi_{A_n}$ στην ισότητα και εξισώνουμε πραγματικά μέρη. Έτσι βρίσκουμε $\nu(A_n) \ge (1 + \frac{1}{n})\lambda(A_n)$ και, επομένως, $\lambda(A_n) = 0$. Άρα $\lambda(\{a \in \Omega | \Re g(a) > 1\}) = 0$. Τέλος, με $A_n = \{a \in \Omega | \Re g(a) \le -\frac{1}{n}\}$ και $f = \chi_{A_n}$, βρίσκουμε $\nu(A_n) \le -\frac{1}{n}\, \lambda(A_n)$, οπότε $\lambda(A_n) = 0$ και $\lambda(\{a \in \Omega | \Re g(a) < 0\}) = 0$.

Άρα $0 \le g(a) \le 1$ για λ-σχεδόν κάθε $a \in \Omega$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \le g(a) \le 1$ για κάθε $a \in \Omega$.

Η ισότητά μας γράφεται ισοδύναμα,

$$\int_\Omega f(1-g)\, d\nu = \int_\Omega fg\, d\mu$$

για κάθε $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$, οπότε, αν θέσουμε $B = \{a \in \Omega | g(a) = 1\}$ και $f = \chi_B$, παίρνουμε $0 = \mu(B)$ και, επομένως, $\nu(B) = 0$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \le g(a) < 1$ για κάθε $a \in \Omega$.

Τώρα για τυχόν $A \in \Sigma$ θέτουμε $f = (1 + g + g^2 + \cdots + g^n)\chi_A$ και παίρνουμε $\int_A (1 - g^{n+1})\, d\nu = \int_A (g + g^2 + \cdots + g^{n+1})\, d\mu$. Παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$ σύμφωνα με το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, βρίσκουμε $\nu(A) = \int_A \frac{g}{1-g}\, d\mu$. Ορίζουμε $h = \frac{g}{1-g}$, οπότε $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$. Ισχύει, προφανώς, ότι $0 \le h(a) < +\infty$ για κάθε $a \in \Omega$ και, με $A = \Omega$, έχουμε $\int_\Omega h\, d\mu = \nu(\Omega) < +\infty$, οπότε $h \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

2. Θεωρούμε, τώρα, την περίπτωση που το ν είναι μη-αρνητικό και υπάρχουν $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ με $A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \Omega$ και $\mu(A_j) < +\infty$ για κάθε j.

Θέτουμε $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$, οπότε τα $B_1, B_2, \ldots \in \Sigma$ είναι ξένα ανά δύο και $B_1 \cup B_2 \cup \cdots = \Omega$ με $\mu(B_j) < +\infty$ για κάθε j.

Έστω η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του B_j που ορίζεται ως $\Sigma_j = \{A \in \Sigma | A \subseteq B_j\}$ και μ_j, ν_j οι περιορισμοί των μ, ν στην Σ_j. Είναι προφανές ότι το ν_j είναι μη-αρνητικό και απολύτως συνεχές ως προς το μ_j, οπότε υπάρχει μη-αρνητική $h_j \in L^1(B_j, \Sigma_j, \mu_j)$ ώστε $\nu_j(A) = \int_A h_j\, d\mu_j$ για κάθε $A \in \Sigma_j$.

Τώρα, ορίζουμε τη μη-αρνητική συνάρτηση h στο Ω με $h(a) = h_j(a)$ αν $a \in B_j$. Για κάθε $A \in \Sigma$ θέτουμε $C_j = A \cap B_j \in \Sigma_j$, οπότε $\nu(A) = \nu(C_1) + \nu(C_2) + \cdots = \nu_1(C_1) + \nu_2(C_2) + \cdots = \int_{C_1} h_1\, d\mu_1 + \int_{C_2} h_2\, d\mu_2 + \cdots = \int_{C_1} h\, d\mu + \int_{C_2} h\, d\mu + \cdots = \int_A h\, d\mu$.

Με $A = \Omega$ έχουμε $\int_\Omega h\, d\mu = \nu(\Omega) < +\infty$, οπότε $h \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

3. Τώρα, υποθέτουμε ότι το ν είναι πραγματικό μέτρο.

Θεωρούμε την απόλυτη κύμανση $|\nu|$ καθώς και τη θετική κύμανση $\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu)$ και την αρνητική κύμανση $\nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu)$ του ν στην Σ. Αν $\mu(A) = 0$ και θεωρήσουμε οποιαδήποτε ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma$ με $A_1 \cup \cdots \cup A_m \subseteq A$, τότε $\mu(A_j) = 0$, οπότε $\nu(A_j) = 0$, για κάθε j. Άρα $|\nu(A_1)| + \cdots + |\nu(A_m)| = 0$, οπότε από τον ορισμό του $|\nu|(A)$ έχουμε $|\nu|(A) = 0$ και, επομένως, $\nu^+(A) = \nu^-(A) = 0$. Άρα τα $|\nu|, \nu^+$ και ν^- είναι απολύτως συνεχή ως προς το μ.

Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος, υπάρχουν $h^+ \geq 0$ και $h^- \geq 0$ στον $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε $\nu^+(A) = \int_A h^+\, d\mu$ και $\nu^-(A) = \int_A h^-\, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε $h = h^+ - h^- \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ και έχουμε $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = \int_A h\, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$.

4. Θεωρούμε, τέλος, τη γενική περίπτωση.

Παίρνουμε τα πραγματικά μέτρα $\Re\nu$ και $\Im\nu$, τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μ, οπότε υπάρχουν πραγματικές $h_1, h_2 \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε $\Re\nu(A) = \int_A h_1\, d\mu$ και $\Im\nu(A) = \int_A h_2\, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$. Τότε με $h = h_1 + ih_2 \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ έχουμε $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$.

5. Αν $h_1, h_2 \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ με $\int_A h_1\, d\mu = \int_A h_2\, d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$, θέτουμε $h = h_1 - h_2 \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ και έχουμε $\int_A h\, d\mu = 0$ για κάθε $A \in \Sigma$. Για κάθε n δοκιμάζουμε $A_n = \{a \in \Omega | \Re h(a) \geq \frac{1}{n}\}$ στην ισότητα, εξισώνουμε τα πραγματικά μέρη των δύο πλευρών και βρίσκουμε $\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq 0$. Άρα $\mu(A_n) = 0$ για κάθε n, οπότε $\mu(\{a \in \Omega | \Re h(a) > 0\}) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\mu(\{a \in \Omega | \Re h(a) < 0\}) = 0$, οπότε $\Re h = 0$ μ-σχεδόν παντού. Ομοίως, $\Im h = 0$ μ-σχεδόν παντού και, επομένως, οι h_1 και h_2 είναι το ίδιο στοιχείο του $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Θεώρημα 4.6 *Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
(1) Για κάθε $l \in \big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$ υπάρχει μοναδική $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε $l(g) = \int_\Omega gf\, d\mu$ για κάθε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.
(2) $\big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^* \overset{iso}{=} L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε τα προηγούμενα ισχύουν και στην περίπτωση $p = 1$, $q = +\infty$.

Στην περίπτωση $p = +\infty, q = 1$ υπάρχει ισομετρική εμφύτευση του $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ στον $\big(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$.

Απόδειξη: Για κάθε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ ορίζουμε $l_f : L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \to F$ με τύπο

$$l_f(g) = \int_\Omega gf\, d\mu$$

για κάθε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Το ολοκλήρωμα είναι καλώς ορισμένο λόγω της ανισότητας Hölder , η l_f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $|l_f(g)| \leq \|f\|_q \|g\|_p$ για κάθε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Άρα $l_f \in \big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$ και $\|l_f\| \leq \|f\|_q$.

Αν $1 < p < +\infty$, οπότε $1 < q < +\infty$, θέτουμε $g(a) = \overline{f(a)}|f(a)|^{q-2}$ αν $f(a) \neq 0$ και $g(a) = 0$ αν $f(a) = 0$ και έχουμε ότι $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, αφού $\int_\Omega |g|^p \, d\mu = \int_\Omega |f|^q \, d\mu < +\infty$. Επίσης, $\int_\Omega fg \, d\mu = \int_\Omega |f|^q \, d\mu$ και, επομένως, $\|f\|_q^q = l_f(g) \leq \|l_f\| \, \|g\|_p = \|l_f\| \, \|f\|_q^{\frac{q}{p}}$. Άρα $\|f\|_q \leq \|l_f\|$.

Αν $p = +\infty, q = 1$, με την ίδια g έχουμε $\|f\|_1 = l_f(g) \leq \|l_f\| \, \|g\|_\infty \leq \|l_f\|$.

Αν $p = 1, q = +\infty$ και το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, υπάρχουν ξένα ανά δύο $B_1, B_2, \ldots \in \Sigma$ με $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots$ και $\mu(B_j) < +\infty$ για κάθε j. Αν $\|f\|_\infty = 0$, τότε $f = 0$, το l_f είναι το μηδενικό συναρτησοειδές και επομένως $\|l_f\| = \|f\|_\infty = 0$. Αν $\|f\|_\infty > 0$, τότε για τυχόντα j και n παίρνουμε $B_{n,j} = \{a \in B_j \,|\, |f(a)| \geq (1 - \frac{1}{n}) \, \|f\|_\infty\}$ και $g = \frac{\overline{f}}{|f|} \, \chi_{B_{n,j}}$. Έχουμε, λοιπόν, $(1 - \frac{1}{n}) \, \|f\|_\infty \, \mu(B_{n,j}) \leq l_f(g) \leq \|l_f\| \, \|g\|_1 = \|l_f\| \, \mu(B_{n,j})$. Επειδή $\mu(B_{n,j}) > 0$ για τουλάχιστον ένα j, συνεπάγεται για κάθε $n \geq 2$ ότι $(1 - \frac{1}{n}) \, \|f\|_\infty \leq \|l_f\|$, οπότε, παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι $\|f\|_\infty \leq \|l_f\|$.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\|l_f\| = \|f\|_q$ για κάθε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Ορίζουμε $T : L^q(\Omega, \Sigma, \mu) \to \big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$ με τύπο $T(f) = l_f$ για κάθε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Είναι προφανές ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής και έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\|T(f)\| = \|f\|_q$ για κάθε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο T είναι 1-1 και ότι αρκεί να είναι επί για να είναι ισομετρία.

1. Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι $\mu(\Omega) < +\infty$ και $1 \leq p < +\infty$.

Παίρνουμε τυχόν $l \in \big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$ και ορίζουμε $\nu(A) = l(\chi_A)$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Προφανώς, $\nu(\emptyset) = 0$. Αν τα $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ είναι ξένα ανά δύο και $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, θέτουμε $C_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, οπότε $\nu(A) - \nu(C_n) = l(\chi_A) - l(\chi_{C_n}) = l(\chi_A - \chi_{C_n}) = l(\chi_{A \setminus C_n}) \leq \|l\| \, \|\chi_{A \setminus C_n}\|_p = \|l\| \, \big(\mu(A \setminus C_n)\big)^{\frac{1}{p}} \to 0$, διότι $1 \leq p < +\infty$, $A \setminus C_n \downarrow \emptyset$ και το μ είναι πεπερασμένο. Άρα $\nu(C_n) \to \nu(A)$. Επομένως, $\nu(A_1) + \cdots + \nu(A_n) = l(\chi_{A_1}) + \cdots + l(\chi_{A_n}) = l(\chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_n}) = l(\chi_{C_n}) = \nu(C_n) \to \nu(A)$. Άρα $\nu(A) = \nu(A_1) + \nu(A_2) + \cdots$ και το ν είναι μιγαδικό μέτρο στην Σ.

Αν $\mu(A) = 0$, τότε $|\nu(A)| = |l(\chi_A)| \leq \|l\| \, \|\chi_A\|_p = \|l\| \, \big(\mu(A)\big)^{\frac{1}{p}} = 0$. Άρα το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ, οπότε υπάρχει $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε $A \in \Sigma$. Αν $g = \kappa_1 \chi_{A_1} + \cdots + \kappa_n \chi_{A_n}$ είναι τυχούσα απλή συνάρτηση, τότε $l(g) = \kappa_1 l(\chi_{A_1}) + \cdots + \kappa_n l(\chi_{A_n}) = \kappa_1 \nu(A_1) + \cdots + \kappa_n \nu(A_n) = \kappa_1 \int_{A_1} f \, d\mu + \cdots + \kappa_n \int_{A_n} f \, d\mu = \int_\Omega fg \, d\mu$. Για οποιαδήποτε $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{g_k\}$ ώστε $g_k \to g$ στον $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Επειδή το μ είναι πεπερασμένο, συνεπάγεται ότι $g_k \to g$ και στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Τώρα, επειδή το l είναι συνεχές, έχουμε ότι $l(g_k) \to l(g)$. Επίσης, $|\int_\Omega fg_k \, d\mu - \int_\Omega fg \, d\mu| \leq \|f\|_1 \, \|g_k - g\|_\infty \to 0$. Άρα $l(g) = \lim l(g_k) = \lim \int_\Omega fg_k \, d\mu = \int_\Omega fg \, d\mu$ για κάθε φραγμένη g.

Αν $1 < p < +\infty$, τότε για τυχόν n θέτουμε $A_n = \{a \in \Omega \,|\, |f(a)| \leq n\}$ και $g(a) = \overline{f(a)}|f(a)|^{q-2} \, \chi_{A_n}(a)$ αν $f(a) \neq 0$ και $g(a) = 0$ αν $f(a) = 0$. Η g είναι φραγμένη, οπότε $\int_{A_n} |f|^q\,d\mu = \int_\Omega fg\,d\mu = l(g) \le \|l\|\,\|g\|_p = \|l\| \left(\int_{A_n} |f|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Άρα $\int_{A_n} |f|^q\,d\mu \le \|l\|^q$ για κάθε n και, επομένως $\|f\|_q \le \|l\| < +\infty$.

Αν $p = 1$ θέτουμε $A_{n,m} = \{a \in \Omega |\, (1+\frac{1}{m})\,\|l\| \le |f(a)| \le n\}$ και $g = \frac{\overline{f}}{|f|}\chi_{A_{n,m}}$, οπότε $(1+\frac{1}{m})\,\|l\|\,\mu(A_{n,m}) \le \int_{A_{n,m}} |f|\,d\mu = \int_\Omega fg\,d\mu \le \|l\|\,\|g\|_1 = \|l\|\,\mu(A_{n,m})$. Άρα $\mu(A_{n,m}) = 0$ για κάθε n, m και, επομένως $|f| \le \|l\|$ μ-σχεδόν παντού. Άρα $\|f\|_\infty \le \|l\| < +\infty$.

Άρα σε κάθε περίπτωση, $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Τότε για κάθε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ παίρνουμε ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{g_k\}$ με $g_k \to g$ στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ και, επειδή το l είναι συνεχές και λόγω της ανισότητας Hölder, συνεπάγεται ότι $l(g) = \lim l(g_k) = \lim \int_\Omega f g_k\,d\mu = \int_\Omega fg\,d\mu = l_f(g)$. Άρα $l = l_f = T(f)$ και ο T είναι επί.

2. Τώρα υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο, οπότε υπάρχουν $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ με $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ και $\mu(A_j) < +\infty$ για κάθε j. Θέτουμε $D_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \Sigma$, οπότε $D_n \uparrow \Omega$ και $\mu(D_n) < +\infty$ για κάθε n. Έστω $l \in \left(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\right)^*$.

Θεωρούμε τη σ-άλγεβρα $\Sigma_n = \{A \in \Sigma | A \subseteq D_n\}$ υποσυνόλων του D_n και τον περιορισμό μ_n του μ στην Σ_n. Για κάθε $g_n \in L^p(D_n, \Sigma_n, \mu_n)$ παίρνουμε την επέκτασή της με τύπο $g(a) = g_n(a)$ αν $a \in D_n$ και $g(a) = 0$ αν $a \in \Omega \setminus D_n$ και ορίζουμε $l_n(g_n) = l(g)$. Είναι προφανές ότι το l_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές του $L^p(D_n, \Sigma_n, \mu_n)$ και $|l_n(g_n)| \le \|l\|\,\|g\|_p = \|l\| \left(\int_{D_n} |g_n|^p\,d\mu_n\right)^{\frac{1}{p}}$ για κάθε $g_n \in L^p(D_n, \Sigma_n, \mu_n)$. Άρα $l_n \in \left(L^p(D_n, \Sigma_n, \mu_n)\right)^*$ και $\|l_n\| \le \|l\|$. Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι υπάρχει $f_n \in L^q(D_n, \Sigma_n, \mu_n)$ με $\|f_n\|_q = \|l_n\|$ και $l_n(g_n) = \int_{D_n} g_n f_n\,d\mu_n = \int_{D_n} g_n f_n\,d\mu$ για κάθε $g_n \in L^p(D_n, \Sigma_n, \mu_n)$. Αν f_n' είναι ο περιορισμός της f_{n+1} στο D_n και g_{n+1} είναι η επέκταση της οποιασδήποτε $g_n \in L^p(D_n, \Sigma_n, d\mu_n)$ στο D_{n+1} με $g_{n+1}(a) = 0$ αν $a \in D_{n+1} \setminus D_n$, τότε οι g_n, g_{n+1} έχουν την ίδια επέκταση g στο Ω, οπότε $l_n(g_n) = l(g) = l_{n+1}(g_{n+1}) = \int_{D_{n+1}} g_{n+1} f_{n+1}\,d\mu = \int_{D_n} g_n f_n'\,d\mu$. Λόγω μοναδικότητας της f_n, συνεπάγεται ότι $f_n' = f_n$. Επομένως, ορίζεται καλώς η κοινή επέκταση f όλων των f_n στο Ω.

Αν $p = 1$, τότε είναι προφανές ότι $\|f\|_\infty = \sup_n \|f_n\|_\infty = \sup_n \|l_n\| \le \|l\| < +\infty$. Αν $1 < p < +\infty$, τότε $\int_{D_n} |f|^q\,d\mu = \int_{D_n} |f_n|^q\,d\mu = \|l_n\|^q \le \|l\|^q$ για κάθε n, οπότε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ και $\|f\|_q \le \|l\|$.

Για τυχούσα $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ θεωρούμε τον περιορισμό g_n στο D_n και την $g_n' = g\chi_{D_n}$. Τότε $\int_\Omega g_n' f\,d\mu = \int_{D_n} g_n f_n\,d\mu = l_n(g_n) = l(g_n')$ από τον ορισμό του l_n. Επειδή $g_n' \to g$ στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, επειδή το l είναι συνεχές και λόγω της ανισότητας Hölder, συνεπάγεται ότι $\int_\Omega gf\,d\mu = l(g)$. Άρα $l = l_f = T(f)$ και ο T είναι επί.

3. Τέλος, θεωρούμε τη γενική περίπτωση με $1 < p < +\infty$ και τυχόν $l \in \left(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\right)^*$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $B \in \Sigma$ με $\mu(B) < +\infty$ και θεωρούμε τη σ-άλγεβρα $\Sigma_B = \{A \in \Sigma | A \subseteq B\}$ υποσυνόλων του B και τον περιορισμό μ_B του μ στην Σ_B. Για κάθε $g_B \in L^p(B, \Sigma_B, \mu_B)$ θεωρούμε την επέκταση g στο Ω με $g = 0$ στο $\Omega \setminus B$ και ορίζουμε $l_B(g_B) = l(g)$. Τότε το l_B είναι γραμμικό συναρτησοειδές του $L^p(B, \Sigma_B, \mu_B)$ και μάλιστα συνεχές, αφού $|l_B(g_B)| \le \|l\|\,\|g\|_p = \|l\| \left(\int_B |g_B|^p\,d\mu_B\right)^{\frac{1}{p}}$, οπότε $\|l_B\| \le \|l\|$. Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδική $f_B \in L^q(B, \Sigma_B, \mu_B)$ με $\left(\int_B |f_B|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|l_B\|$ και $l_B(g_B) = \int_B g_B f_B \, d\mu_B = \int_B g_B f_B \, d\mu$ για κάθε $g_B \in L^p(B, \Sigma_B, \mu_B)$.

Όπως αποδείξαμε στο δεύτερο μέρος, αν $B \subseteq B'$ με $\mu(B') < +\infty$, τότε ο περιορισμός της $f_{B'}$ στο B ταυτίζεται με την f_B. Οπότε εύκολα βλέπουμε ότι, γενικότερα, αν $\mu(B), \mu(B') < +\infty$, τότε οι περιορισμοί των $f_B, f_{B'}$ στο $B \cap B'$ ταυτίζονται με την $f_{B\cap B'}$. Επίσης, είναι προφανές ότι, αν $\mu(B), \mu(B') < +\infty$ και $B \cap B' = \emptyset$, τότε $\int_{B\cup B'} |f_{B\cup B'}|^q \, d\mu = \int_B |f_B|^q \, d\mu + \int_{B'} |f_{B'}|^q \, d\mu$.

Ορίζουμε $M = \sup\{\left(\int_B |f_B|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \mid B \in \Sigma \text{ με } \mu(B) < +\infty\} \leq \|l\|$ και παίρνουμε $\{B_n\}$ με $\mu(B_n) < +\infty$ και $\left(\int_{B_n} |f_{B_n}|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \to M$. Σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση στην προηγούμενη παράγραφο, αν θέσουμε $D_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n \in \Sigma$ και $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots$, έχουμε $D_n \uparrow D$ και $\left(\int_{D_n} |f_{D_n}|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \uparrow M$.

Επειδή ο περιορισμός της $f_{D_{n+1}}$ στο D_n ταυτίζεται με την f_{D_n}, ορίζεται καλώς η κοινή επέκταση f όλων των f_{D_n} στο D και έχουμε ότι $\left(\int_D |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = M$. Θεωρούμε την f επεκτεταμένη με $f = 0$ στο $\Omega \setminus D$, οπότε $\left(\int_\Omega |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_D |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = M$.

Έστω τυχόν $B \in \Sigma$ με $\mu(B) < +\infty$ και $B \cap D = \emptyset$. Από τον ορισμό του M έχουμε $M^q \geq \int_{B\cup D_n} |f_{B\cup D_n}|^q \, d\mu = \int_B |f_B|^q \, d\mu + \int_{D_n} |f_{D_n}|^q \, d\mu \uparrow \int_B |f_B|^q \, d\mu + M^q$ και, επομένως, $\int_B |f_B|^q \, d\mu = 0$. Δηλαδή, $f_B = 0$ και το l_B είναι το μηδενικό συναρτησοειδές στον $L^p(B, \Sigma_B, \mu_B)$.

Θεωρούμε, τώρα, οποιαδήποτε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ και τις $g^{(1)} = g\chi_D$ και $g^{(2)} = g\chi_{\Omega\setminus D}$. Επίσης, θέτουμε $B_n = \{a \in \Omega \setminus D \,|\, |g(a)| \geq \frac{1}{n}\}$ και $g_n^{(2)} = g^{(2)}\chi_{B_n} = g\chi_{B_n}$.

Επειδή $\frac{1}{n^p}\mu(B_n) \leq \int_\Omega |g|^p \, d\mu < +\infty$, συνεπάγεται ότι $\mu(B_n) < +\infty$ και, επειδή $B_n \cap D = \emptyset$, συνεπάγεται (από τον ορισμό του l_{B_n}) ότι $l(g_n^{(2)}) = l_{B_n}(g_n^{(2)}) = 0$. Επομένως, επειδή το l είναι συνεχές και $g_n^{(2)} \to g^{(2)}$ στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, συνεπάγεται ότι $l(g^{(2)}) = 0$. Άρα $l(g) = l(g^{(1)}) = \lim l(g^{(1)}\chi_{D_n}) = \lim \int_{D_n} g^{(1)}\chi_{D_n} f \, d\mu = \int_D g^{(1)} f \, d\mu = \int_\Omega g f \, d\mu = l_f(g)$, αφού $f = 0$ έξω από το D.

Άρα $T(f) = l_f = l$ και ο T είναι επί.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ειδική περίπτωση ενός γνωστού Λήμματος του Urysohn.

Λήμμα του Urysohn: Αν X είναι συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος και K, L δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, τότε υπάρχει συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ συνεχής στον X με $f = 0$ στο K και $f = 1$ στο L.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε (Πρόταση 1.16) ότι κάθε υποσύνολο του X είναι κλειστό αν και μόνον αν είναι συμπαγές.

Έστω κλειστό A και ανοικτό B με $A \subseteq B \subseteq X$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.19, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα O, Q ώστε $A \subseteq O$ και $X \setminus B \subseteq Q$. Τότε το $X \setminus Q$ είναι κλειστό και περιέχει το O, οπότε $A \subseteq O \subseteq cl(O) \subseteq B$.

Συμβολίζουμε $A_0 = K$ και $B_1 = X \setminus L$. Τότε υπάρχει ανοικτό $B_{\frac{1}{2}}$ ώστε

$A_0 \subseteq B_{\frac{1}{2}} \subseteq cl(B_{\frac{1}{2}}) \subseteq B_1$. Ομοίως, υπάρχουν ανοικτά $B_{\frac{1}{4}}$ και $B_{\frac{3}{4}}$ ώστε $A_0 \subseteq B_{\frac{1}{4}} \subseteq cl(B_{\frac{1}{4}}) \subseteq B_{\frac{1}{2}} \subseteq cl(B_{\frac{1}{2}}) \subseteq B_{\frac{3}{4}} \subseteq cl(B_{\frac{3}{4}}) \subseteq B_1$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, σε κάθε ρητό της μορφής $r = \frac{k}{2^n}$ με $0 < k \leq 2^n$ αντιστοιχίζουμε ένα ανοικτό σύνολο B_r, με την ιδιότητα $A_0 \subseteq B_r \subseteq cl(B_r) \subseteq B_s$ για κάθε δύο τέτοιους ρητούς r, s με $r < s$. Έστω $\mathbf{Q}_d$ το σύνολο με στοιχεία όλους αυτούς τους ρητούς.

Ορίζουμε $f(x) = \inf\{r \in \mathbf{Q}_d | x \in B_r\}$ αν $x \in B_1$ και $f(x) = 1$ αν $x \in X \setminus B_1$.

Αμέσως βλέπουμε ότι $f = 0$ στο K και $f = 1$ στο L καθώς και ότι $f : X \to [0, 1]$ και μένει να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στον X.

Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Αν $0 < f(x) < 1$ υπάρχουν $r, r', s \in \mathbf{Q}_d$ ώστε $f(x) - \epsilon < r < r' < f(x) < s < f(x) + \epsilon$. Αν $y \in B_s$, τότε $f(y) \leq s < f(x) + \epsilon$. Αν $y \in (X \setminus cl(B_r))$, τότε $y \notin B_r$, οπότε $f(y) \geq r > f(x) - \epsilon$. Επίσης, $x \in B_s$ και $x \notin B_{r'}$, οπότε $x \in (X \setminus cl(B_r))$. Επομένως, το ανοικτό σύνολο $V = B_s \cap (X \setminus cl(B_r))$ περιέχει το x και $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$ για κάθε $y \in V$. Άρα η f είναι συνεχής στο x.

Αν $f(x) = 1$, παίρνουμε, όπως πριν, $r, r' \in \mathbf{Q}_d$ ώστε $1 - \epsilon < r < r' < 1$ και βλέπουμε ότι το ανοικτό $V = X \setminus cl(B_r)$ περιέχει το x και $1 - \epsilon < f(y) \leq 1 < 1 + \epsilon$ για κάθε $y \in V$. Ομοίως, αν $f(x) = 0$, παίρνουμε $s \in \mathbf{Q}_d$ ώστε $0 < s < \epsilon$ και έχουμε ότι το ανοικτό $V = B_s$ περιέχει το x και $-\epsilon < 0 \leq f(y) < \epsilon$ για κάθε $y \in V$. Άρα σε κάθε περίπτωση η f είναι συνεχής στο x.

Πρέπει να πούμε ότι το τελευταίο λήμμα ισχύει γενικότερα στους **κανονικούς** τοπολογικούς χώρους, δηλαδή στους χώρους Hausdorff στους οποίους για κάθε δύο ξένα κλειστά τους υποσύνολα υπάρχουν δύο ξένα ανοικτά υποσύνολα που τα περιέχουν. Αυτή είναι η μόνη ιδιότητα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του λήμματος. Μία κατηγορία τέτοιων χώρων είναι, όπως είδαμε, οι συμπαγείς Hausdorff τοπολογικοί χώροι και μία άλλη είναι οι μετρικοί χώροι. Μάλιστα, στην περίπτωση μετρικού χώρου X το λήμμα έχει ιδιαίτερα απλή απόδειξη: θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{d(x,K)}{d(x,K)+d(x,L)}$ για κάθε $x \in X$, όπου $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ για οποιοδήποτε $A \subseteq X$.

Λήμμα 4.1 *(Διαμερίσεις της μονάδας) Έστω X συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος, συμπαγές $K \subseteq X$ και ανοικτά $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ ώστε $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Υπάρχουν $f_1, \ldots, f_n : X \to [0, 1]$ συνεχείς στον X ώστε $supp(f_j) \subseteq U_j$ για κάθε j και $f_1 + \cdots + f_n = 1$ στο K.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $K \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq U_1$ οπότε υπάρχει ανοικτό V_1 ώστε $K \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq V_1 \subseteq cl(V_1) \subseteq U_1$. Τότε $K \subseteq V_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ και, επομένως, $K \setminus (V_1 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq U_2$. Άρα υπάρχει ανοικτό V_2 ώστε $K \setminus (V_1 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq V_2 \subseteq cl(V_2) \subseteq U_2$. Τότε $K \subseteq V_1 \cup V_2 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n$. Συνεχίζοντας επαγωγικά αντικαθιστούμε διαδοχικά τα $U_1, \ldots, U_n$ με ανοικτά $V_1, \ldots, V_n$ ώστε $K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$ και $cl(V_j) \subseteq U_j$ για κάθε j.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται, οπότε υπάρχουν ανοικτά $W_1, \ldots, W_n$ ώστε $K \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_n$ και $cl(W_j) \subseteq V_j \subseteq cl(V_j) \subseteq U_j$ για κάθε j.

Σύμφωνα με το Λήμμα του Urysohn υπάρχουν $g_1, \ldots, g_n : X \to [0, 1]$ ώστε $g_j = 1$ στο $cl(W_j)$ και $g_j = 0$ έξω από το V_j. Επίσης υπάρχει $g_0 : X \to [0, 1]$ ώστε

$g_0 = 0$ στο K και $g_0 = 1$ έξω από το $W_1 \cup \cdots \cup W_n$. Θέτουμε $f_j = \frac{g_j}{g_0+g_1+\cdots+g_n}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Αν για το $x \in X$ δεν ισχύει $g_0(x) = 1$, τότε $x \in W_1 \cup \cdots \cup W_n$, οπότε $g_j(x) = 1$ για κάποιο $j = 1, \ldots, n$. Άρα $g_0 + g_1 + \cdots + g_n \geq 1$ στον X, οπότε οι $f_1, \ldots, f_n : X \to [0,1]$ είναι συνεχείς στον X.

Αν $x \notin V_j$, τότε $g_j(x) = 0$, οπότε $f_j(x) = 0$. Άρα $supp(f_j) \subseteq cl(V_j) \subseteq U_j$. Επίσης, $f_1 + \cdots + f_n = \frac{g_1+\cdots+g_n}{g_0+g_1+\cdots+g_n} = 1$ στο K, διότι $g_0 = 0$ στο K.

Ορισμός 4.6 *Έστω τοπολογικός χώρος X, K συμπαγές, $U_1, \ldots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X και $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Αν οι $f_1, \ldots, f_n : X \to [0,1]$ είναι συνεχείς στον X με $supp(f_j) \subseteq U_j$ για κάθε j και $f_1 + \cdots + f_n = 1$ στο K, τότε η συλλογή $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση της μονάδας για το** K **ως προς την ανοικτή του κάλυψη** $\{U_1, \ldots, U_n\}$.*

Υπενθυμίζεται ότι ένα Borel-μέτρο μ σε τοπολογικό χώρο X είναι μέτρο ορισμένο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel-συνόλων του X με $\mu(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$.

Λήμμα 4.2 *Έστω τοπολογικός χώρος X και μ ένα μιγαδικό Borel-μέτρο στον X. Για κάθε $f \in C(X)$ ισχύει $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d|\mu| \leq \|f\|_u \|\mu\|$.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την αριστερή ανισότητα. Αυτή είναι γνωστή αν η f είναι πραγματική και το μ είναι μη-αρνητικό.

Αν η f είναι πραγματική και το μ πραγματικό, γράφουμε $\mu = \mu^+ - \mu^-$, οπότε $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \left|\int_X f\, d\mu^+\right| + \left|\int_X f\, d\mu^-\right| \leq \int_X |f|\, d\mu^+ + \int_X |f|\, d\mu^- = \int_X |f|\, d|\mu|$.

Αν η f είναι μιγαδική και το μ είναι μιγαδικό, τότε $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \left|\int_X \Re f\, d\Re\mu\right| + \left|\int_X \Re f\, d\Im\mu\right| + \left|\int_X \Im f\, d\Re\mu\right| + \left|\int_X \Im f\, d\Im\mu\right| \leq \int_X |\Re f|\, d|\Re\mu| + \int_X |\Re f|\, d|\Im\mu| + \int_X |\Im f|\, d|\Re\mu| + \int_X |\Im f|\, d|\Im\mu| \leq 4\int_X |f|\, d|\mu|$.

Τώρα διαμερίζουμε το δίσκο $\{\kappa \in \mathbf{C}\,|\, |\kappa| \leq \|f\|_u\}$ σε ξένα ανά δύο Borel-σύνολα $Q_1, \ldots, Q_n$ όπου το καθένα από αυτά έχει διάμετρο το πολύ $\epsilon > 0$ και θέτουμε $A_j = \{x \in X|\, f(x) \in Q_j\}$. Επίσης, επιλέγουμε για κάθε j ένα $\kappa_j \in Q_j$ και υπολογίζουμε $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \sum_{j=1}^n \left|\int_{A_j} f\, d\mu\right| \leq \sum_{j=1}^n \left|\int_{A_j} (f - \kappa_j)\, d\mu\right| + \sum_{j=1}^n |\kappa_j||\mu(A_j)| \leq 4\sum_{j=1}^n \epsilon|\mu|(A_j) + \sum_{j=1}^n |\kappa_j||\mu|(A_j) \leq 4\epsilon|\mu|(X) + \sum_{j=1}^n \int_{A_j} |f|\, d|\mu| + \sum_{j=1}^n \int_{A_j} |f - \kappa_j|\, d|\mu| \leq 5\epsilon|\mu|(X) + \int_X |f|\, d|\mu|$. Επειδή το ϵ είναι τυχόν, συνεπάγεται $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d|\mu|$.

Ορισμός 4.7 *Έστω τοπολογικός χώρος X και μ ένα Borel-μέτρο στον X. Το μ ονομάζεται **ομαλό** αν για κάθε Borel-σύνολο A ισχύει:*
(i) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) | U$ *ανοικτό και* $A \subseteq U \subseteq X\}$ *και*
(ii) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) | K$ *συμπαγές και* $K \subseteq A\}$.

Αν το μ είναι πραγματικό Borel-μέτρο στον X, τότε το μ ονομάζεται ομαλό αν τα μ^+, μ^- είναι ομαλά.

Αν το μ είναι μιγαδικό Borel-μέτρο στον X, τότε το μ ονομάζεται ομαλό αν τα $\Re\mu, \Im\mu$ είναι ομαλά. Το σύνολο όλων των μιγαδικών Borel-μέτρων στον X συμβολίζεται $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}(X, \mathcal{B}(X))$.

Είναι προφανές ότι, αν το μ είναι Borel-μέτρο και $\mu(A) < +\infty$, τότε τα (i) και (ii) στον ορισμό είναι ισοδύναμα με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτό $O \supseteq A$ και συμπαγές $K \subseteq A$ ώστε $\mu(O \setminus K) < \epsilon$.

Πρόταση 4.6 *Έστω τοπολογικός χώρος X και μ ένα μιγαδικό Borel-μέτρο στον X. Το μ είναι ομαλό αν και μόνον αν το $|\mu|$ είναι ομαλό.*

Απόδειξη: Έστω ότι το μ είναι πραγματικό. Αν το μ είναι ομαλό, τότε τα μ^+ και μ^- είναι ομαλά, οπότε για κάθε Borel-σύνολο A και $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά $O^+, O^- \supseteq A$ και συμπαγή $K^+, K^- \subseteq A$ ώστε $\mu^+(O^+ \setminus K^+) < \epsilon$ και $\mu^-(O^- \setminus K^-) < \epsilon$. Θέτουμε $K = K^+ \cup K^- \subseteq A$ και $O = O^+ \cap O^- \supseteq A$, οπότε $\mu^+(O \setminus K) < \epsilon$ και $\mu^-(O \setminus K) < \epsilon$. Προσθέτουμε και βρίσκουμε $|\mu|(O \setminus K) < 2\epsilon$ και, επομένως, το $|\mu|$ είναι ομαλό.

Έστω ότι το $|\mu|$ είναι ομαλό. Τότε για κάθε Borel-σύνολο A και $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτό $O \supseteq A$ και συμπαγές $K \subseteq A$ με $|\mu|(O \setminus K) < \epsilon$ και, επειδή $\mu^+, \mu^- \leq |\mu|$, έχουμε τις ίδιες ανισότητες για τα μ^+ και μ^-. Επομένως, τα μ^+ και μ^- είναι ομαλά, οπότε και το μ είναι ομαλό.

Αν το μ είναι μιγαδικό, η απόδειξη είναι παρόμοια και χρησιμοποιεί τις ανισότητες $|\Re\mu|, |\Im\mu| \leq |\mu|$ και $|\mu| \leq |\Re\mu| + |\Im\mu|$.

Θεώρημα 4.7 *Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος, τότε ο $\mathcal{A}_\mathcal{R}(X, \mathcal{B}(X))$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{A}(X, \mathcal{B}(X))$ και, επομένως, είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Αν μ_1 και μ_2 είναι ομαλά μιγαδικά Borel-μέτρα στον X, τότε τα $|\mu_1|$ και $|\mu_2|$ είναι ομαλά. Άρα για κάθε Borel-σύνολο A και $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά $O_1, O_2 \supseteq A$ και συμπαγή $K_1, K_2 \subseteq A$ ώστε $|\mu_1|(O_1 \setminus K_1) < \epsilon$ και $|\mu_2|(O_2 \setminus K_2) < \epsilon$. Θέτουμε $K = K_1 \cup K_2 \subseteq A$ και $O = O_1 \cap O_2 \supseteq A$, οπότε παίρνουμε τις ίδιες ανισότητες για τα K και O. Προσθέτουμε χρησιμοποιώντας την $|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$ και βρίσκουμε $|\mu_1 + \mu_2|(O \setminus K) < 2\epsilon$ και, επομένως, το $|\mu_1 + \mu_2|$ είναι ομαλό. Άρα το $\mu_1 + \mu_2$ είναι ομαλό.

Ακόμη πιό απλά αποδεικνύεται ότι, αν το μ είναι ομαλό και $\kappa \in F$, τότε το $\kappa\mu$ είναι ομαλό.

Άρα ο $\mathcal{A}_\mathcal{R}(X, \mathcal{B}(X))$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{A}(X, \mathcal{B}(X))$.

Έστω, τώρα, ότι η $\{\mu_n\}$ είναι ακολουθία ομαλών μιγαδικών Borel-μέτρων στον X και $\mu_n \to \mu$, όπου το μ είναι μιγαδικό Borel-μέτρο. Παίρνουμε τυχόν Borel-σύνολο A και $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε N ώστε $\|\mu_N - \mu\| < \epsilon$ και, κατόπιν, επειδή το $|\mu_N|$ είναι ομαλό, βρίσκουμε ανοικτό $O \supseteq A$ και συμπαγές $K \subseteq A$ ώστε $|\mu_N|(O \setminus K) < \epsilon$. Επομένως, $|\mu|(O \setminus K) \leq |\mu_N|(O \setminus K) + \|\mu_N - \mu\| < 2\epsilon$, οπότε το μ είναι ομαλό. Δηλαδή, ο $\mathcal{A}_\mathcal{R}(X, \mathcal{B}(X))$ είναι κλειστός.

Ισχύει ότι αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος ή αν ο X είναι συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος του οποίου κάθε ανοικτό υποσύνολο είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους συμπαγών συνόλων, τότε $\mathcal{A}_\mathcal{R}(X, \mathcal{B}(X)) = \mathcal{A}(X, \mathcal{B}(X))$.

Θεώρημα 4.8 *(F.Riesz-Radon-Banach-Kakutani) Έστω X συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος.*

(1) Για κάθε $l \in C(X)^*$ υπάρχει μοναδικό ομαλό μιγαδικό Borel-μέτρο μ στον X ώστε $\|l\| = \|\mu\|$ και $l(f) = \int_X f\, d\mu$ για κάθε $f \in C(X)$.

Αν το l είναι μη-αρνητικό, δηλαδή $l(f) \geq 0$ για κάθε μη-αρνητική $f \in C(X)$, τότε το μ είναι μη-αρνητικό.

Αν το l είναι πραγματικό, δηλαδή $l(f) \in \mathbf{R}$ για κάθε πραγματική $f \in C(X)$, τότε το μ είναι πραγματικό.

(2) $C(X)^* \overset{iso}{=} \mathcal{A}_{\mathcal{R}}(X, \mathcal{B}(X))$.

Απόδειξη: Για κάθε ομαλό μιγαδικό Borel-μέτρο μ στον X ορίζουμε $l_\mu : C(X) \to F$ με τύπο

$$l_\mu(f) = \int_X f\, d\mu$$

για κάθε $f \in C(X)$. Η l_μ είναι γραμμικό συναρτησοειδές του $C(X)$ και $|l_\mu(f)| = \left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \|\mu\|\, \|f\|_u$ για κάθε $f \in C(X)$. Άρα $l_\mu \in C(X)^*$ και $\|l_\mu\| \leq \|\mu\|$.

Από τον ορισμό του $\|\mu\|$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο Borel-σύνολα $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ ώστε $\|\mu\| - \epsilon < |\mu(A_1)| + \cdots + |\mu(A_n)|$. Επειδή το μ είναι ομαλό, για κάθε j υπάρχει συμπαγές $K_j \subseteq A_j$ ώστε $|\mu|(A_j \setminus K_j) < \frac{1}{n}\epsilon$. Επομένως, $\|\mu\| - 2\epsilon < |\mu(K_1)| + \cdots + |\mu(K_n)|$. Επειδή τα $K_1, \ldots, K_n$ είναι ξένα ανά δύο, είναι εύκολο να αποδείξουμε βάσει της Πρότασης 1.19 ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά $O_1, \ldots, O_n$ ώστε $K_j \subseteq O_j$ για κάθε j και, παίρνοντάς τα μικρότερα αν χρειαστεί, $|\mu|(O_j \setminus K_j) < \frac{1}{n}\epsilon$ για κάθε j. Για κάθε j υπάρχει $f_j : X \to [0,1]$ συνεχής στον X ώστε $f_j = 1$ στο K_j και $f_j = 0$ έξω από το O_j. Τέλος, θέτουμε $\kappa_j = \frac{\overline{\int_{O_j} f_j\, d\mu}}{\left|\int_{O_j} f_j\, d\mu\right|}$ αν $\int_{O_j} f_j\, d\mu \neq 0$ και $\kappa_j = 0$ αν $\int_{O_j} f_j\, d\mu = 0$ και $f = \kappa_1 f_1 + \cdots + \kappa_n f_n$. Υπολογίζουμε $\|l_\mu\| \geq \|f\|_u \|l_\mu\| \geq \left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\sum_{j=1}^n \kappa_j \int_{O_j} f_j\, d\mu\right| = \sum_{j=1}^n \left|\int_{O_j} f_j\, d\mu\right| \geq \sum_{j=1}^n |\mu(K_j)| - \sum_{j=1}^n \left|\int_{O_j \setminus K_j} f_j\, d\mu\right| > \|\mu\| - 2\epsilon - \sum_{j=1}^n |\mu|(O_j \setminus K_j) > \|\mu\| - 3\epsilon$. Επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, συμπεραίνουμε $\|l_\mu\| \geq \|\mu\|$ και, επομένως, $\|l_\mu\| = \|\mu\|$.

Έστω ότι $l_\mu(f) \in \mathbf{R}$ για κάθε πραγματική $f \in C(X)$. Θεωρούμε τυχόν Borel-σύνολο A, συμπαγές $K \subseteq A$ και ανοικτό $O \supseteq A$ με $|\mu|(O \setminus K) < \epsilon$. Παίρνουμε $f : X \to [0,1]$ συνεχή στο X με $f = 1$ στο K και $f = 0$ έξω από το O. Τότε $0 = \left|\Im \int_X f\, d\mu\right| \geq |\Im\mu(K)| - \left|\Im \int_{O \setminus K} f\, d\mu\right| \geq |\Im\mu(A)| - |\Im\mu(A \setminus K)| - |\mu|(O \setminus K) \geq |\Im\mu(A)| - 2|\mu|(O \setminus K) \geq |\Im\mu(A)| - 2\epsilon$. Άρα $\Im\mu(A) = 0$ και το μ είναι πραγματικό μέτρο.

Έστω ότι $l_\mu(f) \geq 0$ για κάθε μη-αρνητική $f \in C(X)$. Με την ίδια επιλογή των A, K, O, f όπως στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε $0 \leq \int_X f\, d\mu = \mu(K) + \int_{O \setminus K} f\, d\mu \leq \mu(A) + 2|\mu|(O \setminus K) \leq \mu(A) + 2\epsilon$. Άρα $\mu(A) \geq 0$ και το μ είναι μη-αρνητικό.

Ορίζουμε $T : \mathcal{A}_{\mathcal{R}}(X, \mathcal{B}(X)) \to C(X)^*$ με τύπο $T(\mu) = l_\mu$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός και είδαμε ήδη ότι $\|T(\mu)\| = \|l_\mu\| = \|\mu\|$ για κάθε $\mu \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}(X, \mathcal{B}(X))$. Αρκεί, επομένως, να αποδειχθεί ότι ο T είναι επί. Δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $l \in C(X)^*$ υπάρχει μιγαδικό (αν $F = \mathbf{C}$) ή πραγματικό (αν $F = \mathbf{R}$) Borel-μέτρο μ ώστε $l(f) = \int_X f\, d\mu$ για κάθε

$f \in C(X)$.
(A) Έστω $l \in C(X)^*$ και υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι το l είναι μη-αρνητικό.

Για κάθε ανοικτό $O \subseteq X$ και κάθε $f \in C(X)$ συμβολίζουμε $f \prec O$ όταν $f : X \to [0,1]$ και $supp(f) \subseteq O$.

Για κάθε ανοικτό O ορίζουμε

$$\mu(O) = \sup\{l(f) \,|\, f \prec O\}$$

και, κατόπιν, για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(O) \,|\, O \text{ ανοικτό } \supseteq E\}.$$

Αν τα O, O' είναι ανοικτά και $O \subseteq O'$, τότε $f \prec O$ συνεπάγεται $f \prec O'$, οπότε $\mu(O) \leq \mu(O')$. Άρα $\mu^*(O) = \mu(O)$ για κάθε ανοικτό O.

Αν $f \prec O$, τότε $l(f) \leq \|l\| \, \|f\|_u \leq \|l\|$. Άρα $\mu(O) \leq \|l\|$ και, επομένως, $\mu^*(E) \leq \|l\|$ για κάθε $E \subseteq X$.

Είναι προφανές ότι $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$, όπως, επίσης, ότι $\mu^*(E) \leq \mu^*(E')$ για κάθε E, E' με $E \subseteq E'$. Έστω, τώρα, $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$. Για κάθε j βρίσκουμε ανοικτό $O_j \supseteq E_j$ ώστε $\mu(O_j) < \mu^*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ και θέτουμε $O = O_1 \cup O_2 \cup \cdots$. Έστω $f \prec O$, οπότε θέτουμε $K = supp(f) \subseteq O$. Υπάρχει, επομένως, N ώστε $K \subseteq O_1 \cup \cdots \cup O_N$ και θεωρούμε διαμέριση της μονάδας $\{f_1, \ldots, f_N\}$ για το K ως προς την $\{O_1, \ldots, O_N\}$. Τότε $f = ff_1 + \cdots + ff_N$ και $supp(ff_j) \prec O_j$ για κάθε j, οπότε $l(f) = l(ff_1) + \cdots + l(ff_N) \leq \mu(O_1) + \cdots + \mu(O_N) \leq \mu(O_1) + \mu(O_N) + \cdots$. Συνεπάγεται ότι $\mu(O) \leq \mu(O_1) + \mu(O_N) + \cdots \leq \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \cdots + \epsilon$ και, επειδή $E \subseteq O$, έχουμε $\mu^*(E) \leq \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \cdots + \epsilon$. Το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, οπότε $\mu^*(E) \leq \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \cdots$. Άρα το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο ορισμένο στο δυναμοσύνολο του X.

Σύμφωνα με τη διαδικασία Caratheodory, ορίζεται η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X στην οποία περιορισμένο το μ^* αποτελεί μέτρο.

Θεωρούμε τυχόν ανοικτό O και οποιοδήποτε E. Παίρνουμε ανοικτό $O' \supseteq E$ με $\mu(O') < \mu^*(E) + \epsilon$ και $f \prec O' \cap O$ ώστε $l(f) > \mu(O' \cap O) - \epsilon$. Το $O' \setminus supp(f)$ είναι ανοικτό, οπότε παίρνουμε $g \prec O' \setminus supp(f)$ ώστε $l(g) > \mu(O' \setminus supp(f)) - \epsilon$. Παρατηρούμε ότι $f + g \prec O'$, οπότε $\mu^*(E) + \epsilon > \mu(O') \geq l(f + g) = l(f) + l(g) > \mu(O' \cap O) + \mu(O' \setminus supp(f)) - 2\epsilon \geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \setminus O) - 2\epsilon$. Άρα $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap O) + \mu^*(E \setminus O)$ και αυτό σημαίνει ότι το O είναι μ^*-μετρήσιμο. Επομένως, η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων συνόλων έχει ως στοιχεία όλα τα ανοικτά σύνολα, οπότε περιέχει την $\mathcal{B}(X)$. Ορίζουμε μ να είναι ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{B}(X)$, οπότε το μ είναι μη-αρνητικό Borel-μέτρο μ στον X. (Το μ ταυτίζεται με το ήδη ορισμένο μ στα ανοικτά σύνολα, αφού έχει ήδη αποδειχθεί ότι $\mu^*(O) = \mu(O)$ για κάθε ανοικτό O.)

Τώρα θα αποδείξουμε ότι

$$(\sharp) \qquad \mu(K) = \inf\{l(f) \,|\, f \in C(X) \text{ και } \chi_K \leq f \text{ στον } X\}$$

για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$.

Παίρνουμε οποιαδήποτε $f \in C(X)$ με $f \geq \chi_K$ (δηλαδή, $f \geq 0$ στον X και, ειδικά, $f \geq 1$ στο K) και θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $O = \{x \in X | \, f(x) >$

$1-\epsilon\} \supseteq K$. Αν $g \prec O$, τότε $g \leq \frac{1}{1-\epsilon} f$ στον X, οπότε $l(g) \leq \frac{1}{1-\epsilon} l(f)$ αφού το l είναι μη-αρνητικό. Άρα $\mu(O) \leq \frac{1}{1-\epsilon} l(f)$, οπότε $\mu(K) \leq \frac{1}{1-\epsilon} l(f)$. Επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, συνεπάγεται ότι $\mu(K) \leq l(f)$ και, επομένως, $\mu(K) \leq \inf\{l(f) \,|\, f \in C(X) \text{ και } \chi_K \leq f \text{ στον } X\}$. Τώρα, παίρνουμε ανοικτό $O \supseteq K$ με $\mu(O) < \mu(K) + \epsilon$ και, κατόπιν, μία $f : X \to [0,1]$ συνεχή στο X με $f = 1$ στο K και $supp(f) \subseteq O$. Τότε $f \geq \chi_K$ και $f \prec O$, οπότε $l(f) \leq \mu(O) < \mu(K) + \epsilon$. Αφού το ϵ είναι τυχόν, $\inf\{l(f) \,|\, f \in C(X) \text{ και } \chi_K \leq f \text{ στον } X\} \leq \mu(K)$.

Κατόπιν θα αποδείξουμε την ομαλότητα του μ.

Για κάθε Borel-σύνολο E έχουμε $\mu(E) = \mu^*(E) = \inf\{\mu(O) \,|\, O \text{ ανοικτό } \supseteq E\}$ και αυτή είναι η πρώτη συνθήκη ομαλότητας. Παίρνουμε τυχόν Borel-σύνολο E και βρίσκουμε ανοικτό $O \supseteq E$ ώστε $\mu(O) < \mu(E) + \epsilon$. Κατόπιν, βρίσκουμε $g \prec O$ ώστε $l(g) > \mu(O) - \epsilon$ και θέτουμε $K = supp(g) \subseteq O$. Για κάθε $f \in C(X)$ με $f \geq \chi_K$, συνεπάγεται ότι $f \geq g$, οπότε $l(f) \geq l(g)$. Από την ($\sharp$) συνεπάγεται ότι $\mu(K) \geq l(g)$. Άρα έχουμε συμπαγές $K \subseteq O$ με $\mu(K) > \mu(O) - \epsilon$. Επειδή $\mu(O \setminus E) = \mu(O) - \mu(E) < \epsilon$, υπάρχει ανοικτό $O' \supseteq O \setminus E$ ώστε $\mu(O') < 2\epsilon$. Τώρα θέτουμε $L = K \setminus O'$ και παρατηρούμε ότι το L είναι συμπαγές υποσύνολο του E και ότι $E \setminus L \subseteq (O \setminus K) \cup O'$. Άρα $\mu(E) - \mu(L) \leq \mu(O \setminus K) + \mu(O') < 3\epsilon$ και, επομένως, $\mu(E) = \sup\{\mu(L) | L \text{ συμπαγές } \subseteq E\}$. Αυτή είναι η δεύτερη συνθήκη ομαλότητας.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $l(f) = \int_X f\,d\mu$ για κάθε $f \in C(X)$ και, λόγω γραμμικότητας, αρκεί να το αποδείξουμε για πραγματική f. (Φυσικά, αν $F = \mathbf{R}$, τότε όλες οι συναρτήσεις που μελετάμε είναι πραγματικές.) Αν η f είναι πραγματική, γράφουμε $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \geq 0$ και $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geq 0$, οπότε $f = f^+ - f^-$. Άρα αρκεί να θεωρήσουμε $f \geq 0$ και, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη θετική σταθερά, υποθέτουμε ότι $f \in C(X)$ και $0 \leq f \leq 1$ στον X.

Παίρνουμε τυχόν N και θέτουμε $K_k = \{x \in X | \, f(x) \geq \frac{k}{N}\}$ για $0 \leq k \leq N$. Κάθε K_k είναι συμπαγές σύνολο και, προφανώς, $K_0 = X$. Επίσης, για κάθε $j = 0, \ldots, N-1$ θέτουμε

$$f_j = \min\Big(\max\big(f, \frac{j}{N}\big), \frac{j+1}{N}\Big) - \frac{j}{N}\,,$$

οπότε κάθε f_j είναι συνεχής στον X και ισχύει

$$\frac{1}{N}\chi_{K_{j+1}} \leq f_j \leq \frac{1}{N}\chi_{K_j}$$

για κάθε $j = 0, \ldots, N-1$ καθώς και

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1}.$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες ανισότητες και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\frac{1}{N}(\mu(K_1) + \cdots + \mu(K_N)) \leq \int_X f\,d\mu \leq \frac{1}{N}(\mu(K_0) + \cdots + \mu(K_{N-1})).$$

Από την $\chi_{K_{j+1}} \leq Nf_j$ και την ($\sharp$) συνεπάγεται ότι $\mu(K_{j+1}) \leq l(Nf_j) = Nl(f_j)$. Από την $Nf_j \leq \chi_{K_j}$ συνεπάγεται $Nf_j \prec O$ και, επομένως, $Nl(f_j) \leq$

$\mu(O)$ για κάθε ανοικτό $O \supseteq K_j$. Άρα, από τον ορισμό του $\mu(K_j) = \mu^*(K_j)$ έχουμε ότι $Nl(f_j) \leq \mu(K_j)$. Άρα

$$\frac{1}{N}\mu(K_{j+1}) \leq l(f_j) \leq \frac{1}{N}\mu(K_j)$$

και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\frac{1}{N}(\mu(K_1) + \cdots + \mu(K_N)) \leq l(f) \leq \frac{1}{N}(\mu(K_0) + \cdots + \mu(K_{N-1})).$$

Επομένως $\left|\int_X f\,d\mu - l(f)\right| \leq \frac{1}{N}(\mu(K_0) + \cdots + \mu(K_{N-1})) - \frac{1}{N}(\mu(K_1) + \cdots + \mu(K_N)) = \frac{1}{N}\mu(K_0 \backslash K_N) \leq \frac{1}{N}\mu(X)$ και, επειδή το N είναι αυθαίρετο, συνεπάγεται

$$l(f) = \int_X f\,d\mu$$

και τελειώσαμε με την περίπτωση που το l είναι μη-αρνητικό.
(B) Έστω, τώρα, ότι το l είναι πραγματικό. Για κάθε μη-αρνητική $f \in C(X)$ ορίζουμε

$$l^+(f) = \sup\{l(g) \,|\, g \in C(X), 0 \leq g \leq f \text{ στον } X\}.$$

Προφανώς, $l^+(f) \geq l(0) = 0$ και $l^+(f) \geq l(f)$. Επίσης, αν $0 \leq g \leq f$, τότε $|l(g)| \leq \|l\|\,\|g\|_u \leq \|l\|\,\|f\|_u$, οπότε $l^+(f) = |l^+(f)| \leq \|l\|\,\|f\|_u < +\infty$.

Για κάθε $\kappa > 0$ και μη-αρνητική $f \in C(X)$ έχουμε $l^+(\kappa f) = \sup\{l(g) \,|\, g \in C(X), 0 \leq g \leq \kappa f \text{ στον } X\} = \sup\{l(\kappa h) \,|\, h \in C(X), 0 \leq h \leq f \text{ στον } X\} = \kappa \sup\{l(h) \,|\, h \in C(X), 0 \leq h \leq f \text{ στον } X\} = \kappa l^+(f)$.

Αν $f_1, f_2 \in C(X)$ είναι μη-αρνητικές, $0 \leq g_1 \leq f_1$ και $0 \leq g_2 \leq f_2$, τότε $l(g_1) + l(g_2) = l(g_1 + g_2)$ και, επειδή $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, συνεπάγεται $l(g_1) + l(g_2) \leq l^+(f_1 + f_2)$. Παίρνοντας supremum ως προς τις g_1 και g_2 βρίσκουμε $l^+(f_1) + l^+(f_2) \leq l^+(f_1 + f_2)$. Τώρα, έστω $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. Θέτουμε $g_1 = \min(f_1, g)$, οπότε $0 \leq g_1 \leq f_1$ και $g_1 \leq g$. Αν θέσουμε $g_2 = g - g_1$, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $0 \leq g_2 \leq f_2$ και, φυσικά, $g = g_1 + g_2$. Άρα $l(g) = l(g_1) + l(g_2) \leq l^+(f_1) + l^+(f_2)$, οπότε $l^+(f_1 + f_2) \leq l^+(f_1) + l^+(f_2)$. Συμπεραίνουμε ότι $l^+(f_1 + f_2) = l^+(f_1) + l^+(f_2)$.

Μέχρι τώρα το $l^+(f)$ είναι ορισμένο μόνον για μη-αρνητικές $f \in C(X)$. Για οποιαδήποτε πραγματική $f \in C(X)$ θέτουμε $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \geq 0$ και $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geq 0$, οπότε $f = f^+ - f^-$. Ορίζουμε, λοιπόν, για κάθε πραγματική $f \in C(X)$

$$l^+(f) = l^+(f^+) - l^+(f^-).$$

Παρατηρούμε ότι αν $f = g - h$ για οποιεσδήποτε μη-αρνητικές $g, h \in C(X)$, τότε $f^+ + h = f^- + g$, οπότε $l^+(f^+) + l^+(h) = l^+(f^+ + h) = l^+(f^- + g) = l^+(f^-) + l^+(g)$. Άρα $l^+(f) = l^+(g) - l^+(h)$.

Αν $f_1, f_2 \in C(X)$ είναι πραγματικές, τότε από την τελευταία ταυτότητα έχουμε $f_1 + f_2 = (f_1^+ + f_2^+) - (f_1^- + f_2^-)$, οπότε $l(f_1 + f_2) = l(f_1^+ + f_2^+) - l(f_1^- + f_2^-) = l(f_1^+) + l(f_2^+) - l(f_1^-) - l(f_2^-) = l(f_1) + l(f_2)$.

Αν $f \in C(X)$ είναι πραγματική και $\kappa \geq 0$, τότε $l^+(\kappa f) = l^+(\kappa f^+) - l^+(\kappa f^-) = \kappa l^+(f^+) - \kappa l^+(f^-) = \kappa l^+(f)$, ενώ αν $\kappa < 0$, τότε $l^+(\kappa f) = l^+(|\kappa| f^-) - l^+(|\kappa| f^+) = |\kappa| l^+(f^-) - |\kappa| l^+(f^+) = \kappa l^+(f)$.

Αν $F = \mathbf{R}$, έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $l^+ : C(X) \to \mathbf{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές.

Αν $F = \mathbf{C}$, για κάθε μιγαδική $f \in C(X)$ ορίζουμε

$$l^+(f) = l^+(\Re f) + il^+(\Im f)$$

και είναι εύκολο να δούμε ότι η $l^+ : C(X) \to \mathbf{C}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Αν η $f \in C(X)$ είναι πραγματική, τότε $|l^+(f)| = |l^+(f^+) - l^+(f^-)| \leq \max(l^+(f^+), l^+(f^-)) \leq \max(\|l\| \, \|f^+\|_u, \|l\| \, \|f^-\|_u) = \|l\| \, \|f\|_u$. Ενώ, αν η f είναι μιγαδική, τότε, με κατάλληλο $\kappa \in \mathbf{C}$ με $|\kappa| = 1$ έχουμε $|l^+(f)| = \kappa l^+(f) = l^+(\kappa f) = \Re\big(l^+(\kappa f)\big) = l^+(\Re(\kappa f)) \leq \|l\| \, \|\Re(\kappa f)\|_u \leq \|l\| \, \|f\|_u$. Επομένως, το l^+ είναι μη-αρνητικό συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές του $C(X)$ με $\|l^+\| \leq \|l\|$.

Ορίζουμε, επίσης, $l^- = l^+ - l : C(X) \to F$. Αυτό είναι, προφανώς, συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές του $C(X)$ και είναι μη-αρνητικό, αφού για κάθε μη-αρνητική $f \in C(X)$ ισχύει $l^-(f) = l^+(f) - l(f) \geq 0$.

Σύμφωνα με το μέρος (Α), υπάρχουν δύο μη-αρνητικά Borel-μέτρα μ_1 και μ_2 στον X ώστε $l^+(f) = \int_X f \, d\mu_1$ και $l^-(f) = \int_X f \, d\mu_2$ για κάθε $f \in C(X)$. Άρα για το πραγματικό Borel-μέτρο $\mu = \mu_1 - \mu_2$ έχουμε $l(f) = l^+(f) - l^-(f) = \int_X f \, d\mu_1 - \int_X f \, d\mu_2 = \int_X f \, d\mu$ για κάθε $f \in C(X)$.

Στο σημείο αυτό τελειώνει η απόδειξη, αν $F = \mathbf{C}$ και το l είναι πραγματικό ή αν $F = \mathbf{R}$ (οπότε το l είναι αυτομάτως πραγματικό).

(Γ) Αν $F = \mathbf{C}$ και το l είναι μιγαδικό, τότε τα $\Re l$ και $\Im l$ είναι συνεχή πραγματικά $\mathbf{R}$-γραμμικά συναρτησοειδή στον $C(X)$ και, επομένως, είναι συνεχή $\mathbf{R}$-γραμμικά συναρτησοειδή στον $C_{\mathbf{R}}(X)$, τον $\mathbf{R}$-γραμμικό χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στον X. Σύμφωνα με το (Β), υπάρχουν δύο πραγματικά Borel-μέτρα μ_1 και μ_2, ώστε $\Re l(f) = \int_X f \, d\mu_1$ και $\Im l(f) = \int_X f \, d\mu_2$ για κάθε πραγματική $f \in C(X)$. Άρα, αν θέσουμε $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, τότε το μ είναι μιγαδικό Borel-μέτρο στον X και για κάθε πραγματική $f \in C(X)$ έχουμε $l(f) = \Re l(f) + i\Im l(f) = \int_X f \, d\mu_1 + i\int_X f \, d\mu_2 = \int_X f \, d\mu$. Επομένως, για κάθε $f \in C(X)$ ισχύει $l(f) = l(\Re f) + il(\Im f) = \int_X \Re f \, d\mu + i\int_X \Im f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

4.6 Το θεώρημα Hahn-Banach

Το επόμενο είναι ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας των χώρων με νόρμα.

Θεώρημα 4.9 *(Hahn-Banach) Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και υπόχωρος Y του X. Για κάθε $y^* \in Y^*$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(y) = y^*(y)$ για κάθε $y \in Y$ και $\|x^*\| = \|y^*\|$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την ημινόρμα $p : X \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο $p(x) = \|y^*\| \, \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Τότε το γραμμικό συναρτησοειδές y^* του Y ικανοποιεί την $|y^*(y)| \leq p(y)$ για κάθε $y \in Y$.

Αν $F = \mathbf{C}$, τότε από το Θεώρημα 2.2 συνεπάγεται ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές x^* του X με $x^*(y) = y^*(y)$ για κάθε $y \in Y$ και $|x^*(x)| \leq p(x) = \|y^*\| \, \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επομένως $x^* \in X^*$ και $\|x^*\| \leq \|y^*\|$. Όμως,

$\|y^*\| = \sup_{y\in Y,\|y\|\le 1}|y^*(y)| = \sup_{y\in Y,\|y\|\le 1}|x^*(y)| \le \sup_{x\in X,\|x\|\le 1}|x^*(x)| = \|x^*\|$. Άρα $\|x^*\| = \|y^*\|$.

Αν $F = \mathbf{R}$, επειδή $y^*(y) \le p(y)$ για κάθε $y \in Y$, από το Θεώρημα 2.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές x^* του X με $x^*(y) = y^*(y)$ για κάθε $y \in Y$ και $x^*(x) \le p(x) = \|y^*\|\,\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αν στην ανισότητα αυτή θέσουμε $-x$ στη θέση του x, παίρνουμε $-\|y^*\|\,\|x\| \le x^*(x)$ και, επομένως, $|x^*(x)| \le \|y^*\|\,\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Όπως προηγουμένως, συνεπάγεται ότι $\|x^*\| = \|y^*\|$.

Ορισμός 4.8 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$.*
(i) Αν $S \subseteq X$, ορίζουμε $S^\perp = \{x^* \in X^* | x^*(a) = 0$ για κάθε $a \in S\}$.
(ii) Αν $S \subseteq X^*$, ορίζουμε ${}^\perp S = \{x \in X | a^*(x) = 0$ για κάθε $a^* \in S\}$

Στην περίπτωση που ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και $S \subseteq X$, τότε το $S^\perp$ έχει ορισθεί με δύο τρόπους: $S^\perp = \{x \in X | (a|x) = 0$ για κάθε $a \in S\}$ και $S^\perp = \{x^* \in X^* | x^*(a) = 0$ για κάθε $a \in S\}$. Γνωρίζουμε από το πρώτο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 4.4 ότι υπάρχει 1-1 απεικόνιση $X \ni x \mapsto l_x \in X^*$ ώστε $\|x\| = \|l_x\|$ για κάθε $x \in X$. Το l_x έχει τύπο $l_x(u) = (u|x)$ για κάθε $u \in X$, οπότε $(a|x) = 0$ αν και μόνον αν $l_x(a) = 0$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η εικόνα του πρώτου $S^\perp$ μέσα στον X^* μέσω της παραπάνω εμφύτευσης περιέχεται στο δεύτερο $S^\perp$. Αν, επιπλέον, ο X είναι χώρος Hilbert, οπότε η απεικόνιση $x \mapsto l_x$ είναι επί, τότε η εικόνα του πρώτου $S^\perp$ ταυτίζεται με το δεύτερο $S^\perp$.

Πρόταση 4.7 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$.*
(1) Αν $S \subseteq X$, τότε το $S^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.
(2) Αν $S \subseteq X^*$, τότε το ${}^\perp S$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Απόδειξη: Άσκηση.

Θεώρημα 4.10 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, $x \in X$ και Y υπόχωρος του X. Τότε*

$$\max_{x^*\in Y^\perp,\|x^*\|\le 1}|x^*(x)| = \inf_{y\in Y}\|x-y\| \ .$$

Απόδειξη: Για κάθε $x^* \in Y^\perp$ με $\|x^*\| \le 1$ και για κάθε $y \in Y$ έχουμε $|x^*(x)| = |x^*(x) - x^*(y)| = |x^*(x-y)| \le \|x^*\|\,\|x-y\| \le \|x-y\|$. Άρα

$$\sup_{x^*\in Y^\perp,\|x^*\|\le 1}|x^*(x)| \le \inf_{y\in Y}\|x-y\| \ .$$

Επομένως, μένει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x^* \in Y^\perp$ με $\|x^*\| \le 1$ και $|x^*(x)| = \inf_{y\in Y}\|x-y\|$.

Αν $x \in Y$, τότε $\inf_{y\in Y}\|x-y\| = 0$ και $|x^*(x)| = 0$ για κάθε $x^* \in Y^\perp$. Άρα, στην περίπτωση αυτή, η απόδειξη είναι πλήρης. Έστω, λοιπόν, ότι $x \notin Y$, οπότε θεωρούμε τον γραμμικό υπόχωρο Y_1 του X ο οποίος παράγεται από το $Y \cup \{x\}$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο του Y_1 γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $y + \kappa x$ με $y \in Y$ και $\kappa \in F$: $Y_1 = \{y + \kappa x \,|\, y \in Y, \kappa \in F\}$. Ορίζουμε, τώρα, $y^* : Y_1 \to F$ με τύπο

$$y^*(y + \kappa x) = \kappa d$$

για κάθε $y \in Y$ και $\kappa \in F$, όπου θέτουμε $d = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$. Είναι προφανές ότι η y^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές του Y_1.

Αν $\kappa = 0$, τότε $|y^*(y + \kappa x)| = |\kappa| d = 0 \le \|y + \kappa x\|$, ενώ αν $\kappa \ne 0$, τότε $|y^*(y + \kappa x)| = |\kappa| d \le |\kappa| \left\|x - \left(-\frac{1}{\kappa} y\right)\right\| = \|y + \kappa x\|$. Άρα $y^* \in Y_1^*$ και $\|y^*\| \le 1$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(y + \kappa x) = \kappa d$ για κάθε $y \in Y$ και $\kappa \in F$ και $\|x^*\| = \|y^*\| \le 1$. Τώρα, $x^*(y) = x^*(y + 0x) = 0d = 0$ για κάθε $y \in Y$, οπότε $x^* \in Y^\perp$, και $|x^*(x)| = |x^*(0 + 1x)| = 1d = d$.

Θεώρημα 4.11 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε για κάθε $x \in X$*

$$\|x\| = \max_{\|x^*\| \le 1} |x^*(x)| .$$

Απόδειξη: Είναι άμεση εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος με $Y = \{0\}$. Τότε $\{0\}^\perp = X^*$ και $\inf_{y \in \{0\}} \|x - y\| = \|x - 0\| = \|x\|$.

Θεώρημα 4.12 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, $S \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε $x \in cl(< S >)$ αν και μόνον αν $x^*(x) = 0$ για κάθε $x^* \in S^\perp$.*

Απόδειξη: Αν $x^* \in S^\perp$, τότε $x^*(a) = 0$ για κάθε $a \in S$, οπότε, λόγω γραμμικότητας, $x^*(a) = 0$ για κάθε a το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S, δηλαδή για κάθε $a \in < S >$. Άρα, αν $x \in cl(< S >)$, οπότε υπάρχει $\{a_n\}$ στο $< S >$ με $a_n \to x$, έχουμε, λόγω συνέχειας, $x^*(x) = \lim x^*(a_n) = 0$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $x^*(x) = 0$ για κάθε $x^* \in S^\perp$, αλλά $x \notin Y$, όπου θέτουμε $Y = cl(< S >)$. Επειδή ο Y είναι κλειστός, συνεπάγεται ότι $\inf_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Άρα, από το Θεώρημα 4.10 συνεπάγεται ότι υπάρχει $x^* \in Y^\perp$ με $x^*(x) \ne 0$. Όμως, επειδή $S \subseteq Y$, έχουμε ότι $x^* \in S^\perp$ και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Λήμμα 4.3 *Έστω χώρος X επί του $\mathbf{C}$ με νόρμα $\|\cdot\|$.*
(1) Για κάθε $\mathbf{C}$-γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές $x^* : X \to \mathbf{C}$ το πραγματικό του μέρος $\Re x^* : X \to \mathbf{R}$ είναι $\mathbf{R}$-γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές, $x^*(x) = \Re x^*(x) - i\Re x^*(ix)$ για κάθε $x \in X$ και $\|x^*\| = \|\Re x^*\|$.
(2) Για κάθε $\mathbf{R}$-γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές $x^*_{\mathbf{R}} : X \to \mathbf{C}$, υπάρχει μοναδικό $\mathbf{C}$-γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές $x^* : X \to \mathbf{C}$ ώστε να ισχύει $\Re x^* = x^*_{\mathbf{R}}$ στον X και τότε $\|x^*\| = \|x^*_{\mathbf{R}}\|$.

Απόδειξη: Το μόνο που απομένει από το Λήμμα 2.2 είναι να αποδειχθεί η ισότητα των νορμών. Είναι προφανές ότι $|\Re x^*(x)| \le |x^*(x)| \le \|x^*\| \, \|x\|$ για κάθε $x \in X$, οπότε $\|\Re x^*\| \le \|x^*\|$.

Για κάθε $x \in X$ έχουμε, με κατάλληλο $\kappa \in \mathbf{C}$ με $|\kappa| = 1$, ότι $|x^*(x)| = \kappa x^*(x) = x^*(\kappa x) = \Re x^*(\kappa x) \le |\Re x^*(\kappa x)| \le \|\Re x^*\| \, \|\kappa x\| = \|\Re x^*\| \, \|x\|$. Άρα $\|x^*\| \le \|\Re x^*\|$.

Θεώρημα 4.13 *(Mazur) Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, κυρτό σύνολο A το οποίο έχει το 0 ως εσωτερικό σημείο και κυρτό σύνολο B ξένο προς το A. Τότε*
(1) Υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $\Re x^*(a) \le 1$ για κάθε $a \in A$ και $\Re x^*(b) \ge 1$ για κάθε $b \in B$. Αν $B(0; R) \subseteq A$, τότε $\|x^*\| \le \frac{1}{R}$.
(2) Αν, ακόμη, το A είναι ανοικτό, τότε $\Re x^*(a) < 1$ για κάθε $a \in A$.

Απόδειξη: Έστω $B(0;R) \subseteq A$. Είναι προφανές ότι η μπάλα $B(0;R)$ και, επομένως, το A απορροφούν τον X. Επίσης, αν το A είναι ανοικτό, τότε το A απορροφά τον X με κέντρο κάθε σημείο του.

Αν $F = \mathbf{R}$, από το Θεώρημα 2.5 συνεπάγεται ότι υπάρχουν μη-μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $x^* : X \to \mathbf{R}$ και $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ ώστε το A να περιέχεται σε έναν από τους κλειστούς ημιχώρους οι οποίοι ορίζονται και το B να περιέχεται στον άλλο. Επειδή $0 \in A$ και $x^*(0) = 0$, αποκλείεται το A να περιέχεται στον $\{x \in X | x^*(x) \geq 1\}$. Αν πάρουμε x_0 με $x^*(x_0) \neq 0$, τότε και τα δύο σημεία $\pm\frac{R}{2\|x_0\|}\,x_0$ ανήκουν στην $B(0;R)$ και σ' αυτά το x^* έχει αντίθετες τιμές. Άρα το A δεν περιέχεται σε κανέναν από τους ημιχώρους $\{x \in X | x^*(x) \leq 0\}$ και $\{x \in X | x^*(x) \geq 0\}$.

Επομένως, $x^*(a) \leq 1$ για κάθε $a \in A$ και $x^*(b) \geq 1$ για κάθε $b \in B$. Επίσης, αν το A είναι ανοικτό, τότε $x^*(a) < 1$ για κάθε $a \in A$.

Παίρνουμε, τώρα, οποιοδήποτε $t > 1$ και $x \in X$ με $x \neq 0$. Τότε $\pm\frac{R}{t\|x\|}\,x \in B(0;R)$, οπότε $x^*(\pm\frac{R}{t\|x\|}\,x) \leq 1$. Άρα $|x^*(x)| \leq \frac{t}{R}\,\|x\|$ και, επειδή το $t > 1$ είναι τυχόν, συνεπάγεται ότι $|x^*(x)| \leq \frac{1}{R}\,\|x\|$. Η ανισότητα αυτή ισχύει και για $x = 0$, οπότε το x^* είναι φραγμένο και $\|x^*\| \leq \frac{1}{R}$.

Αν $F = \mathbf{C}$, θεωρούμε τον X ως $\mathbf{R}$-γραμμικό χώρο και βρίσκουμε, από το πρώτο μέρος, $\mathbf{R}$-γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές $x^*_{\mathbf{R}}$ με $\|x^*_{\mathbf{R}}\| \leq \frac{1}{R}$ ώστε $x^*_{\mathbf{R}}(a) \leq 1$ για κάθε $a \in A$ και $x^*_{\mathbf{R}}(b) \geq 1$ για κάθε $b \in B$. Τα υπόλοιπα είναι απλή εφαρμογή του Λήμματος 4.3(2).

Πρόταση 4.8 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Έστω $\{x_n^* | n \in \mathbf{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Για κάθε n παίρνουμε $x_n \in X$ ώστε $\|x_n\| = 1$ και $|x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\,\|x_n^*\|$ και θέτουμε $S = \{x_n | n \in \mathbf{N}\}$.

Αν υπάρχει $x \in X$ με $x \notin cl(< S >)$, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $x^* \in S^\perp$ με $x^*(x) \neq 0$. Δηλαδή, $x^*(x_n) = 0$ για κάθε n, ενώ το x^* δεν είναι το μηδενικό συναρτησοειδές και, επομένως, $\|x^*\| > 0$.

Επειδή το $\{x_n^* | n \in \mathbf{N}\}$ είναι πυκνό, υπάρχει N ώστε $\|x^* - x_N^*\| < \frac{1}{3}\,\|x^*\|$. Τότε $\|x_N^*\| \geq \|x^*\| - \|x^* - x_N^*\| > 2\,\|x^* - x_N^*\|$, οπότε $\frac{1}{2}\,\|x_N^*\| \leq |x_N^*(x_N)| = |x_N^*(x_N) - x^*(x_N)| \leq \|x_N^* - x^*\| < \frac{1}{2}\,\|x_N^*\|$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα κάθε $x \in X$ ανήκει στον $cl(< S >)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbf{N}$ και $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in F$ ώστε $\|x - (\kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_n x_n)\| < \epsilon$. Τώρα παίρνουμε ρητούς $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ ώστε $|\lambda_j - \kappa_j| < \frac{\epsilon}{n\|x_j\|}$ για κάθε j και βρίσκουμε εύκολα ότι $\|x - (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)\| < 2\epsilon$.

Άρα το αριθμήσιμο σύνολο με στοιχεία όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του S με ρητούς συντελεστές είναι πυκνό στον X.

Πόρισμα Ο l^1 δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $(l^\infty)^*$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει γραμμικός τελεστής $T : l^1 \to (l^\infty)^*$ ο οποίος είναι επί και σταθερές $c, C > 0$ ώστε $c\,\|x\|_1 \leq \|T(x)\| \leq C\,\|x\|_1$ για κάθε $x \in l^1$.

Ο l^1 είναι διαχωρίσιμος, οπότε υπάρχει πυκνό υποσύνολό του, $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$. Τότε το $\{T(x_n) | n \in \mathbf{N}\}$ είναι πυκνό στον $(l^\infty)^*$. Πράγματι, αν $l \in (l^\infty)^*$, παίρνουμε $x \in l^1$ με $T(x) = l$ και n ώστε $\|x - x_n\|_1 < \epsilon$. Τότε $\|l - T(x_n)\| = \|T(x) - T(x_n)\| < C\epsilon$.

Επομένως, ο $(l^\infty)^*$ είναι διαχωρίσιμος, οπότε και ο l^∞ είναι διαχωρίσιμος. Αυτό, όμως, είναι λάθος.

Θεώρημα 4.14 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, υπόχωρος Y του X και $x^* \in X^*$. Τότε*

$$\sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |x^*(y)| = \min_{z^* \in Y^\perp} \|x^* - z^*\|.$$

Απόδειξη: Για κάθε $y \in Y$ με $\|y\| \le 1$ και κάθε $z^* \in Y^\perp$ έχουμε $|x^*(y)| = |x^*(y) - z^*(y)| \le \|x^* - z^*\| \|y\| \le \|x^* - z^*\|$. Άρα

$$\sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |x^*(y)| \le \inf_{z^* \in Y^\perp} \|x^* - z^*\|.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $z^* \in Y^\perp$ ώστε $\sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |x^*(y)| = \|x^* - z^*\|$.

Αν ονομάσουμε y^* τον περιορισμό του x^* στον Y, τότε έχουμε ότι $\|y^*\| = \sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |y^*(y)| = \sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |x^*(y)|$. Από το θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_1^* \in X^*$ ώστε $x_1^*(y) = y^*(y) = x^*(y)$ για κάθε $y \in Y$ και $\|x_1^*\| = \|y^*\|$. Θέτουμε $z^* = x^* - x_1^* \in X^*$, οπότε $\|x^* - z^*\| = \|y^*\| = \sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |x^*(y)|$ και $z^*(y) = x^*(y) - x_1^*(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, οπότε $z^* \in Y^\perp$.

4.7 Δύο θεωρήματα παρεμβολής

Θεώρημα 4.15 *Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, ένα σύνολο δεικτών I, $\{x_i | i \in I\} \subseteq X$, $\{a_i | i \in I\} \subseteq F$ και $M \ge 0$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(1) Υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \le M$ και $x^*(x_i) = a_i$ για κάθε $i \in I$.
(2) Ισχύει $|\kappa_1 a_{i_1} + \cdots + \kappa_n a_{i_n}| \le M \|\kappa_1 x_{i_1} + \cdots + \kappa_n x_{i_n}\|$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ και $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$.

Απόδειξη: Αν ισχύει το (1), τότε $|\kappa_1 a_{i_1} + \cdots + \kappa_n a_{i_n}| = |x^*(\kappa_1 x_{i_1} + \cdots + \kappa_n x_{i_n})| \le M \|\kappa_1 x_{i_1} + \cdots + \kappa_n x_{i_n}\|$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει το (2). Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = < \{x_i | i \in I\} >$, οπότε κάθε $y \in Y$ γράφεται $y = \kappa_1 x_{i_1} + \cdots + \kappa_n x_{i_n}$, και ορίζουμε $y^*(y) = \kappa_1 a_{i_1} + \cdots + \kappa_n a_{i_n}$. Αν το y γράφεται με δύο τρόπους $y = \kappa_1 x_{i_1} + \cdots + \kappa_n x_{i_n} = \kappa_1' x_{i_1} + \cdots + \kappa_n' x_{i_n}$, τότε $|(\kappa_1 a_{i_1} + \cdots + \kappa_n a_{i_n}) - (\kappa_1' a_{i_1} + \cdots + \kappa_n' a_{i_n})| = |(\kappa_1 - \kappa_1') a_{i_1} + \cdots + (\kappa_n - \kappa_n') a_{i_n}| \le M \|(\kappa_1 - \kappa_1') x_{i_1} + \cdots + (\kappa_n - \kappa_n') x_{i_n}\| = \|y - y\| = 0$. Επομένως, ο ορισμός του $y^*(y)$ είναι καλός και είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι το y^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές του Y και ότι $|y^*(y)| = |\kappa_1 a_{i_1} + \cdots + \kappa_n a_{i_n}| \le M \|\kappa_1 x_{i_1} + \cdots + \kappa_n x_{i_n}\| \le M \|y\|$ για κάθε $y \in Y$.

Άρα $y^* \in Y^*$ και $\|y^*\| \le M$, οπότε υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = \|y^*\| \le M$ και $x^*(y) = y^*(y)$ για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $x^*(x_i) = y^*(x_i) = a_i$ για κάθε $i \in I$.

Λήμμα 4.4 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και γραμμικά συναρτησοειδή $x', x'_1, \ldots, x'_n$ του X ώστε $x'(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ με $x'_1(x) = \cdots = x'_n(x) = 0$. Τότε υπάρχουν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ ώστε $x' = \kappa_1 x'_1 + \cdots + \kappa_n x'_n$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή και αρχίζουμε με $n = 1$: $x'(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ με $x'_1(x) = 0$. Αν x' είναι το μηδενικό συναρτησοειδές, τότε $x' = 0x'_1$. Αν όχι, τότε υπάρχει x_0 ώστε $x'(x_0) \neq 0$ και, επομένως, $x'_1(x_0) \neq 0$. Υπολογίζουμε: $x'_1\big(x'_1(x_0)x - x'_1(x)x_0\big) = x'_1(x_0)x'_1(x) - x'_1(x)x'_1(x_0) = 0$. Άρα $x'\big(x'_1(x_0)x - x'_1(x)x_0\big) = 0$ και, επομένως, $x'_1(x_0)x'(x) - x'_1(x)x'(x_0) = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα $x'(x) = \kappa x'_1(x)$ για κάθε $x \in X$, όπου $\kappa = \frac{x'(x_0)}{x'_1(x_0)}$.

Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για οποιονδήποτε X και κάθε $x', x'_1, \ldots, x'_n$ και έστω $x'(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ με $x'_1(x) = \cdots = x'_n(x) = x'_{n+1}(x) = 0$. Θεωρούμε τον $N(x'_{n+1})$, οπότε $x'(x) = 0$ για κάθε $x \in N(x'_{n+1})$ με $x'_1(x) = \cdots = x'_n(x) = 0$. Άρα υπάρχουν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ ώστε $x' = \kappa_1 x'_1 + \cdots + \kappa_n x'_n$ στον $N(x'_{n+1})$. Δηλαδή το $x' - (\kappa_1 x'_1 + \cdots + \kappa_n x'_n)$ μηδενίζεται για κάθε $x \in X$ με $x'_{n+1}(x) = 0$. Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι υπάρχει $k_{n+1} \in F$ ώστε $x' - (\kappa_1 x'_1 + \cdots + \kappa_n x'_n) = \kappa_{n+1} x'_{n+1}$.

Λήμμα 4.5 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του F και γραμμικά συναρτησοειδή $x'_1, \ldots, x'_n$ του X. Αν αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in F$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $x'_j(x) = a_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει, οπότε το σύνολο τιμών $R(T)$ του γραμμικού τελεστή $T : X \to F^n$ με τύπο $Tx = (x'_1(x), \ldots, x'_n(x))$ δεν ισούται με τον F^n. Άρα ο $R(T)$ είναι γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του F^n, οπότε υπάρχει μη-μηδενικό $(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \perp R(T)$. Αυτό σημαίνει ότι $\kappa_1 x'_1(x) + \cdots + \kappa_n x'_n(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ και, επομένως, $\kappa_1 x'_1 + \cdots + \kappa_n x'_n = 0$.

Θεώρημα 4.16 *(Helly) Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, $x^*_1, \ldots, x^*_n \in X^*$, $M \geq 0$ και $a_1, \ldots, a_n \in F$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(1) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < M + \epsilon$ και $x^*_j(x) = a_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.
(2) Ισχύει $|\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n| \leq M \|\kappa_1 x^*_1 + \cdots + \kappa_n x^*_n\|$ για κάθε $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$.

Απόδειξη: Αν ισχύει το (1), τότε με το κατάλληλο x έχουμε $|\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n| = |\kappa_1 x^*_1(x) + \cdots + \kappa_n x^*_n(x)| \leq \|\kappa_1 x^*_1 + \cdots + \kappa_n x^*_n\| \|x\| \leq \|\kappa_1 x^*_1 + \cdots + \kappa_n x^*_n\| (M + \epsilon)$. Άρα $|\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n| \leq (M + \epsilon) \|\kappa_1 x^*_1 + \cdots + \kappa_n x^*_n\|$ και, παίρνοντας όριο όταν $\epsilon \to 0+$, βρίσκουμε το (2).

Έστω ότι ισχύει το (2) και ας υποθέσουμε, κατ' αρχήν, ότι το $\{x^*_1, \ldots, x^*_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Από το Λήμμα 4.5 συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x^*_1(x_0) = a_1, \ldots, x^*_n(x_0) = a_n$. Αν δεν ισχύει το (1), τότε η ανοικτή μπάλα $B(0; M + \epsilon)$ είναι ξένη προς το μη-κενό κυρτό σύνολο $\{x \in X | x^*_1(x) = a_1, \ldots, x^*_n(x) = a_n\}$.

Από το Θεώρημα 4.13 συνεπάγεται ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x^* \in X^*$ ώστε $\|x^*\| \leq \frac{1}{M+\epsilon}$ και $\Re x^*(x) < 1$ για κάθε $x \in B(0; M + \epsilon)$ και $\Re x^*(x) \geq 1$ για κάθε $x \in X$ με $x^*_1(x) = a_1, \ldots, x^*_n(x) = a_n$.

Αν υπήρχαν δύο $x, \widehat{x} \in X$ με $x_1^*(x) = x_1^*(\widehat{x}) = a_1, \ldots, x_n^*(x) = x_n^*(\widehat{x}) = a_n$ ώστε $\Re x^*(x) \neq \Re x^*(\widehat{x})$, τότε, καθώς το κ διατρέχει το $\mathbf{R}$, για το $y = \kappa x + (1-\kappa)\widehat{x}$ έχουμε $x_1^*(y) = a_1, \ldots, x_n^*(y) = a_n$ ενώ $\Re x^*(y) = \kappa \Re x^*(x) + (1-\kappa)\Re x^*(\widehat{x}) < 1$ για κατάλληλα κ. Άρα υπάρχει ακριβώς ένα $\lambda \geq 1$ ώστε $\Re x^*(x) = \lambda$ για κάθε $x \in X$ με $x_1^*(x) = a_1, \ldots, x_n^*(x) = a_n$. Παίρνουμε ένα $x_0 \in X$ με $x_1^*(x_0) = a_1, \ldots, x_n^*(x_0) = a_n$ και έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ με $x_1^*(x) = \cdots = x_n^*(x) = 0$ ισχύει $x_1^*(x + x_0) = a_1, \ldots, x_n^*(x + x_0) = a_n$, οπότε $\Re x^*(x + x_0) = \lambda$, οπότε $\Re x^*(x) = 0$. Όμως, αν για το x ισχύει $x_1^*(x) = \cdots = x_n^*(x) = 0$, τότε το ίδιο ισχύει και για το ix, οπότε $\Re x^*(ix) = 0$ και, επομένως, $x^*(x) = \Re x^*(x) - i\Re x^*(ix) = 0$. Από το Λήμμα 4.4 συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ ώστε $x^* = \kappa_1 x_1^* + \cdots + \kappa_n x_n^*$.

Τέλος, $1 \leq \lambda = \Re x^*(x_0) = \Re(\kappa_1 x_1^*(x_0) + \cdots + \kappa_n x_n^*(x_0)) = \Re(\kappa_1 a_1 + \cdots + \kappa_n a_n) \leq M \|\kappa_1 x_1^* + \cdots + \kappa_n x_n^*\| = M \|x^*\| \leq \frac{M}{M+\epsilon} < 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν το $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, διαλέγουμε ένα maximal γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του, το οποίο μετά από αλλαγή αρίθμησης, υποθέτουμε ότι είναι το $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ και, επομένως, κάθε $x_{m+1}^*, \ldots, x_n^*$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1^*, \ldots, x_m^*$.

Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < M + \epsilon$ και $x_j^*(x) = a_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Για κάθε $j = m+1, \ldots, n$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ ώστε $x_j^* = \lambda_1 x_1^* + \cdots + \lambda_m x_m^*$. Από την (2) συνεπάγεται ότι $a_j = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$, οπότε $x_j^*(x) = \lambda_1 x_1^*(x) + \cdots + \lambda_m x_m^*(x) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = a_j$.

4.8 Ο δεύτερος δυικός

Ο δεύτερος δυικός χώρος $X^{**} = (X^*)^*$ ενός χώρου X με νόρμα είναι χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|$ η οποία έχει τύπο

$$\|x^{**}\| = \sup_{x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1} |x^{**}(x^*)|$$

για κάθε $x^{**} \in X^{**}$.

Ορισμός 4.9 *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε συνάρτηση $\tau_x : X^* \to F$ με τύπο*

$$\tau_x(x^*) = x^*(x)$$

για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα 4.17 *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$ η τ_x είναι στοιχείο του X^{**} και η συνάρτηση*

$$J : X \to X^{**}$$

με τύπο $J(x) = \tau_x$ για κάθε $x \in X$ είναι ισομετρική εμφύτευση.

Απόδειξη: Έχουμε $\tau_x(x_1^*+x_2^*) = (x_1^*+x_2^*)(x) = x_1^*(x)+x_2^*(x) = \tau_x(x_1^*)+\tau_x(x_2^*)$ και $\tau_x(\kappa x^*) = (\kappa x^*)(x) = \kappa x^*(x) = \kappa\tau_x(x^*)$ για κάθε $x_1^*, x_2^*, x^* \in X^*$ και $\kappa \in F$.

Απο το Θεώρημα 4.11 συνεπάγεται $\sup_{\|x^*\|\le 1} |\tau_x(x^*)| = \sup_{\|x^*\|\le 1} |x^*(x)| = \|x\|$ και αυτό σημαίνει ότι $\tau_x \in X^{**}$ με $\|\tau_x\| = \|x\|$.

Τώρα, $\tau_{x_1+x_2}(x^*) = x^*(x_1+x_2) = x^*(x_1) + x^*(x_2) = \tau_{x_1}(x^*) + \tau_{x_2}(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$ και, επομένως, $\tau_{x_1+x_2} = \tau_{x_1} + \tau_{x_2}$. Επίσης, $\tau_{\kappa x}(x^*) = x^*(\kappa x) = \kappa x^*(x) = \kappa\tau_x(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$ και, επομένως, $\tau_{\kappa x} = \kappa\tau_x$. Άρα η J είναι γραμμική.

Όπως είδαμε, $\|J(x)\| = \|\tau_x\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$, οπότε η J είναι ισομετρική εμφύτευση.

Ορισμός 4.10 *Έστω X χώρος με νόρμα. Η ισομετρική εμφύτευση $J : X \to X^{**}$ του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται* ***φυσιολογική εμφύτευση του X στον*** *X^{**}.*

Αν η J είναι επί, τότε ο X ονομάζεται ***αυτοπαθής****.*

Επομένως, αν ένας χώρος X με νόρμα είναι αυτοπαθής, τότε $X \overset{iso}{=} X^{**}$. Όμως, το αντίστροφο δεν ισχύει: υπάρχουν χώροι X με νόρμα οι οποίοι είναι ισομετρικοί με τους δεύτερους δυικούς των, χωρίς όμως η φυσιολογική εμφύτευση J να είναι επί.

Παρατηρούμε ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας χώρος αυτοπαθής είναι η πληρότητά του.

Μία δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η εικόνα $J(X) \subseteq X^{**}$ του X είναι χώρος ισομετρικός με τον X, οπότε αν *ταυτίσουμε* τον X με τον $J(X)$, τότε ο $X_1 = cl(J(X))$ αποτελεί πλήρωση του X: αφ' ενός ο X_1 είναι κλειστός υπόχωρος του πλήρους χώρου X^{**} και, επομένως, είναι πλήρης, αφ' ετέρου ο X είναι πυκνός στον X_1.

Πρόταση 4.9 *Κάθε χώρος Hilbert είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αντι-ισομετρία του Θεωρήματος 4.4, $T : X \to X^*$, με τύπο $Tx(u) = (u|x)$ για κάθε $x \in X$ και $u \in X$. Θα αποδείξουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $J : X \to X^{**}$ είναι επί. Παίρνουμε, λοιπόν, τυχόν $x^{**} \in X^{**}$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\overline{x^{**} \circ T} : X \to F$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αυτή είναι γραμμική και $|\overline{x^{**} \circ T}(u)| = |\overline{x^{**}(Tu)}| = |x^{**}(Tu)| \le \|x^{**}\|\,\|Tu\| = \|x^{**}\|\,\|u\|$, οπότε $\overline{x^{**} \circ T} \in X^*$.

Άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $\overline{x^{**} \circ T} = Tx$. Δηλαδή, $\overline{x^{**}(Tu)} = (u|x)$ για κάθε $u \in X$. Συνεπάγεται ότι $x^{**}(Tu) = (x|u) = Tu(x) = Jx(Tu)$ για κάθε $x \in X$ και, επειδή ο T είναι επί, ότι $x^{**}(x^*) = Jx(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Άρα $x^{**} = Jx$ και η J είναι επί.

Πρόταση 4.10 *Αν $1 < p < +\infty$ και (Ω, Σ, μ) είναι χώρος μέτρου, τότε οι χώροι l^p και $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι αυτοπαθείς.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το q με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και τις ισομετρίες $T^{(p)} : l^q \to (l^p)^*$ και $T^{(q)} : l^p \to (l^q)^*$ με τύπους $T^{(p)}x(y) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j = T^{(q)}y(x)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^q$ και $y = (y_1, y_2, \dots) \in l^p$. Θεωρούμε και τη φυσιολογική εμφύτευση $J : l^p \to (l^p)^{**}$.

Παίρνουμε τυχόν $y^{**} \in (l^p)^{**}$ και ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $y^{**} \circ T^{(p)} : l^q \to F$. Τότε $|y^{**} \circ T^{(p)}(x)| \le \|y^{**}\| \left\|T^{(p)}x\right\| = \|y^{**}\| \|x\|$ για κάθε $x \in l^q$, οπότε $y^{**} \circ T^{(p)} \in (l^q)^*$. Επομένως, υπάρχει $y \in l^p$ ώστε $y^{**} \circ T^{(p)} = T^{(q)}y$. Άρα $Jy(T^{(p)}x) = T^{(p)}x(y) = T^{(q)}y(x) = y^{**}(T^{(p)}x)$ για κάθε $x \in l^q$. Επειδή ο $T^{(p)}$ είναι επί, συνεπάγεται $Jy(y^*) = y^{**}(y^*)$ για κάθε $y^* \in (l^p)^*$. Άρα $Jy = y^{**}$ και ο J είναι επί.

Η περίπτωση του $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ έχει την ίδια απόδειξη.

Θεώρημα 4.18 *(Milman) Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη: Έστω ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach X με νόρμα $\|\cdot\|$ και έστω τυχόν $x^{**} \in X^{**}$ με $\|x^{**}\| = 1$.

Παίρνουμε οποιαδήποτε $\{x_n^*\}$ στον X^* με $\|x_n^*\| = 1$ και $|x^{**}(x_n^*)| \to 1$. Για κάθε n ισχύει ότι $|\kappa_1 x^{**}(x_1^*) + \cdots + \kappa_n x^{**}(x_n^*)| \le \|\kappa_1 x_1^* + \cdots + \kappa_n x_n^*\|$ για κάθε $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$. Άρα από το Θεώρημα του Helly συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $\|x_n\| \le 1 + \frac{1}{n}$ και $x_1^*(x_n) = x^{**}(x_1^*), \ldots, x_n^*(x_n) = x^{**}(x_n^*)$.

Έχουμε ότι $\|x_n\| \to 1$, διότι $|x^{**}(x_n^*)| = |x_n^*(x_n)| \le \|x_n^*\| \|x_n\| \le 1 + \frac{1}{n}$.

Αν $n < m$, τότε $2|x^{**}(x_n^*)| = |x_n^*(x_n + x_m)| \le \|x_n^*\| \|x_n + x_m\| = \|x_n + x_m\|$. Λόγω της ομοιόμορφης κυρτότητας συνεπάγεται ότι $\|x_n - x_m\| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$. Άρα υπάρχει το $x = \lim x_n \in X$.

Προφανώς, $\|x\| = 1$ και $x_j^*(x) = x^{**}(x_j^*)$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots$.

Αν υπάρχει κάποιο $y \in X$ με $\|y\| = 1$ και $x_j^*(y) = x^{**}(x_j^*)$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots$, τότε $2|x^{**}(x_j^*)| = |x_j^*(y + x)| \le \left\|x_j^*\right\| \|y + x\| = \|y + x\|$. Πάλι λόγω της ομοιόμορφης κυρτότητας συνεπάγεται ότι $y = x$.

Τώρα, έστω τυχόν $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x^*, x_1^*, x_2^*, \ldots$ του X, τότε ισχύουν και γι' αυτήν όσα είπαμε για την $\{x_n^*\}$. Άρα υπάρχει $y \in X$ με $\|y\| = 1$ και $x^*(y) = x^{**}(x^*), x_j^*(y) = x^{**}(x_j^*)$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots$. Από την προηγούμενη παράγραφο συμπεραίνουμε ότι $y = x$, οπότε $x^*(x) = x^{**}(x^*)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$, συνεπάγεται ότι ισχύει για κάθε $x^* \in X^*$ και, επομένως, $Jx = x^{**}$, όπου J είναι η φυσιολογική εμφύτευση του X στον X^{**}.

Άρα η J είναι επί.

Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.19, παρέχει δεύτερη απόδειξη του ότι οι χώροι l^p και $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι αυτοπαθείς για κάθε p με $1 < p < +\infty$. Με τη σειρά του, αυτό δίνει δεύτερη απόδειξη της ισομετρίας ανάμεσα στον $(l^p)^*$ και τον l^q όπως και ανάμεσα στον $\left(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\right)^*$ και τον $L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Πόρισμα Αν $1 < p < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε $(l^p)^* \overset{iso}{=} l^q$ και $\left(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\right)^* \overset{iso}{=} L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ήδη την ισομετρική εμφύτευση $l^q \ni x \mapsto l_x \in (l^p)^*$, όπου $l_x(y) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j$ για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$. Αυτό που απομένει είναι να αποδειχθεί ότι η εμφύτευση αυτή είναι επί. Θεωρούμε τυχόν $y^{**} \in (l^p)^{**}$

και υποθέτουμε ότι $y^{**}(l_x) = 0$ για κάθε $x \in l^q$. Λόγω της αυτοπάθειας του l^p, υπάρχει $y \in l^p$ ώστε $y^{**} = Jy$, όπου J είναι η φυσιολογική εμφύτευση του l^p στον $(l^p)^{**}$. Αυτό σημαίνει ότι $0 = y^{**}(l_x) = l_x(y) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j$ για κάθε $x \in l^q$. Δοκιμάζοντας τα $x = e_j$, βρίσκουμε ότι $y_j = 0$ για κάθε j και, επομένως, $y = 0$. Άρα το y^{**} είναι το μηδενικό συναρτησοειδές και από το Θεώρημα 4.12 συνεπάγεται ότι η εικόνα της εμφύτευσης $x \mapsto l_x$ είναι ολόκληρος ο $(l^p)^*$.

Στην περίπτωση των χώρων συναρτήσεων θεωρούμε, εν συντομία, την ισομετρική εμφύτευση $L^q(\Omega, \Sigma, \mu) \ni f \mapsto l_f \in \big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$, όπου $l_f(g) = \int_\Omega fg\,d\mu$ για κάθε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Παίρνουμε τυχόν $g^{**} \in \big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^{**}$ ώστε $g^{**}(l_f) = 0$ για κάθε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ και βρίσκουμε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε $g^{**} = Jg$. Τότε $0 = g^{**}(l_f) = l_f(g) = \int_\Omega fg\,d\mu$ για κάθε $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Θέτουμε $A_n = \{a \in \Omega | \Re g(a) \geq \frac{1}{n}\}$, οπότε $\mu(A_n) < +\infty$ και, επομένως, $\chi_{A_n} \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Στην τελευταία ισότητα δοκιμάζουμε $f = \chi_{A_n}$, παίρνουμε πραγματικά μέρη και συμπεραίνουμε ότι $\mu(A_n) = 0$. Αφού το n είναι τυχόν, συνεπάγεται ότι το σύνολο όπου $\Re g > 0$ έχει μ-μέτρο μηδέν. Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τα σύνολα όπου $\Re g < 0$, $\Im g > 0$ και $\Im g < 0$ και καταλήγουμε στο ότι $g = 0$ μ-σχεδόν παντού. Άρα g^{**} είναι το μηδενικό συναρτησοειδές, οπότε από το Θεώρημα 4.12 συνεπάγεται ότι η εικόνα της εμφύτευσης $f \mapsto l_f$ είναι ολόκληρος ο $\big(L^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$.

Θεώρημα 4.19 *Έστω χώρος X με νόρμα και κλειστός υπόχωρος Y του X. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε και ο Y είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη: Έστω $y^{**} \in Y^{**}$. Ορίζουμε $x^{**} : X^* \to F$ με τύπο $x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*_Y)$ για κάθε $x^* \in X^*$, όπου $x^*_Y \in Y^*$ είναι ο περιορισμός του $x^* \in X^*$ στον Y. Είναι θέμα ρουτίνας να αποδειχθεί ότι το x^{**} είναι γραμμικό και $|x^{**}(x^*)| = |y^{**}(x^*_Y)| \leq \|y^{**}\|\,\|x^*_Y\| \leq \|y^{**}\|\,\|x^*\|$ για κάθε $x^* \in X^*$. Άρα $x^{**} \in X^{**}$ και, επειδή ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει $x \in X$ ώστε $Jx = x^{**}$, όπου J είναι η φυσιολογική εμφύτευση του X στον X^{**}. Αυτό σημαίνει ότι $x^{**}(x^*) = x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$ και, επομένως, $y^{**}(x^*_Y) = x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$.

Θεωρούμε τυχόν $x^* \in Y^\perp$ και έχουμε ότι $x^*_Y = 0$, οπότε $x^*(x) = y^{**}(0) = 0$. Από το Θεώρημα 4.10 συνεπάγεται ότι $\inf_{y\in Y} \|x - y\| = 0$ και, επειδή ο Y είναι κλειστός, $x \in Y$.

Άρα $y^{**}(x^*_Y) = x^*(x) = x^*_Y(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Τώρα, από το θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι για κάθε $y^* \in Y^*$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*_Y = y^*$. Άρα για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $y^{**}(y^*) = y^*(x) = J'x(y^*)$, όπου J' είναι η φυσιολογική εμφύτευση του Y στον Y^{**}. Άρα $y^{**} = J'x$ με $x \in Y$ και ο J' είναι επί.

4.9 Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος

Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος: Θεωρούμε πλήρη μετρικό χώρο X, μετρικό χώρο Y, $y_0 \in Y$ και συλλογή $\mathcal{F}$ συναρτήσεων $f : X \to Y$ συνεχών στον X. Υποθέτουμε ότι $\sup_{f\in\mathcal{F}} d(f(x), y_0) < +\infty$ για κάθε $x \in X$ Τότε υπάρχει ανοικτό $O \subseteq X$ και $M \geq 0$ ώστε $d(f(x), y_0) \leq M$ για κάθε $x \in O$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$. Δηλαδή, $\sup_{x\in O, f\in\mathcal{F}} d(f(x), y_0) < +\infty$.

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θέτουμε $P_n = \{x \in X \mid d(f(x), y_0) \leq n$ για κάθε $f \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X \mid d(f(x), y_0) \leq n\}$.

Το P_n είναι κλειστό υποσύνολο του X και $X = \cup_{n=1}^{+\infty} P_n$. Αν $O_n = X \setminus P_n$, συνεπάγεται ότι κάθε O_n είναι ανοικτό και $\cap_{n=1}^{+\infty} O_n = \emptyset$. Από το Θεώρημα του Baire συνεπάγεται ότι υπάρχει N ώστε το O_N δεν είναι πυκνό στον X. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ανοικτό $O \subseteq P_N$, οπότε καταλήγουμε στο επιδιωκόμενο συμπέρασμα με $M = N$.

Θεώρημα 4.20 *Έστω χώρος Banach X και $\mathcal{F} \subseteq X^*$ ώστε $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in X$. Τότε $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} \|x^*\| < +\infty$.*

Απόδειξη: Από την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_0 \in X$, $R > 0$ και $M \geq 0$ ώστε $|x^*(x)| \leq M$ για κάθε $x^* \in \mathcal{F}$ και $x \in B(x_0; R)$.

Για κάθε $x \in B(0; R)$ έχουμε ότι $|x^*(x)| \leq |x^*(x + x_0)| + |x^*(x_0)| \leq 2M$ για κάθε $x^* \in \mathcal{F}$. Άρα για κάθε $x \neq 0$ και $t > 1$ ισχύει $|x^*(\frac{R}{t\|x\|} x)| \leq 2M$ και, επομένως, $|x^*(x)| \leq \frac{2Mt}{R} \|x\|$ για κάθε $x^* \in \mathcal{F}$. Άρα $|x^*(x)| \leq \frac{2M}{R} \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $x^* \in \mathcal{F}$.

Συμπεραίνουμε ότι $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} \|x^*\| \leq \frac{2M}{R}$.

Θεώρημα 4.21 *Έστω χώρος X με νόρμα και $\mathcal{F} \subseteq X$ με $\sup_{x \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in X^*$. Τότε $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τη φυσιολογική εμφύτευση $J : X \to X^{**}$ και τη συλλογή $J(\mathcal{F}) \subseteq X^{**}$ των συναρτήσεων $Jx : X^* \to F$ για κάθε $x \in \mathcal{F}$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στον χώρο Banach X^* και στη συλλογή $J(\mathcal{F}) \subseteq (X^*)^*$, αφού $\sup_{Jx \in J(\mathcal{F})} |Jx(x^*)| = \sup_{x \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in X^*$.

Συμπεραίνουμε ότι $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\| = \sup_{Jx \in J(\mathcal{F})} \|Jx\| < +\infty$.

4.10 Ασθενής σύγκλιση και ασθενής* σύγκλιση

Ορισμός 4.11 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(i) Λέμε ότι η $\{x_n\}$ στον X ***συγκλίνει ασθενώς στο*** *$x \in X$ αν $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Τότε γράφουμε $x_n \xrightarrow{w} x$ ή $x = w - \lim x_n$.*
(ii) Λέμε ότι η $\{x_n^*\}$ στον X^* ***συγκλίνει ασθενώς* στο*** *$x^* \in X^*$ αν $x_n^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Γράφουμε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ ή $x^* = w^* - \lim x_n^*$.*

Φυσικά, όταν γράφουμε $x_n \to x$ ή $x_n^* \to x^*$ εννοούμε $\|x_n - x\| \to 0$ ή $\|x_n^* - x^*\| \to 0$, αντιστοίχως. Για να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στις συγκλίσεις, λέμε πολλές φορές ότι η $\{x_n\}$ **συγκλίνει ισχυρά στο** x, αν $x_n \to x$, ή ότι η $\{x_n^*\}$ **συγκλίνει ισχυρά στο** x^*, αν $x_n^* \to x^*$, και γράφουμε $x_n \xrightarrow{s} x$ ή $x = s - \lim x_n$ και $x_n^* \xrightarrow{s} x^*$ ή $x^* = s - \lim x_n^*$, αντιστοίχως. Η ορολογία αυτή οφείλεται στην

Πρόταση 4.11 *Έστω χώρος X με νόρμα. Αν $x_n \to x$ στον X, τότε $x_n \xrightarrow{w} x$ και, αν $x_n^* \to x^*$, τότε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.*

Απόδειξη: Αν $x_n \to x$ στον X, τότε για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε $|x^*(x_n)-x^*(x)| \leq \|x^*\| \, \|x_n - x\| \to 0$. Άρα $x_n \xrightarrow{w} x$.

Αν $x_n^* \to x^*$ στον X^*, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε $|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq \|x_n^* - x^*\| \, \|x\| \to 0$. Άρα $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Πρόταση 4.12 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(1) Αν $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} y$ στον X και $\kappa_n \to \kappa$ στο F, τότε $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$ και $\kappa_n x_n \xrightarrow{w} \kappa x$.
(2) Αν $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, $y_n^* \xrightarrow{w^*} y^*$ στον X^* και $\kappa_n \to \kappa$ στο F, τότε $x_n^* + y_n^* \xrightarrow{w^*} x^* + y^*$ και $\kappa_n x_n^* \xrightarrow{w^*} \kappa x^*$.
(3) Αν $x_n \xrightarrow{w} x$ και $x_n \xrightarrow{w} \widehat{x}$ στον X, τότε $x = \widehat{x}$.
(4) Αν $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ και $x_n^* \xrightarrow{w^*} \widehat{x^*}$ στον X^*, τότε $x^* = \widehat{x^*}$.

Απόδειξη: (1) και (2). Άσκηση.
(3) Για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε $x^*(x) = \lim x^*(x_n) = x^*(\widehat{x})$, οπότε $x^*(x - \widehat{x}) = 0$. Από το Θεώρημα 4.11 συνεπάγεται ότι $x - \widehat{x} = 0$.
(4) Για κάθε $x \in X$ έχουμε $x^*(x) = \lim x_n^*(x) = \widehat{x^*}(x)$, οπότε $x^* = \widehat{x^*}$.

Είναι αξιοπρόσεκτη η διαφορά στη φύση των (3) και (4) της προηγούμενης πρότασης, η οποία αντανακλάται στη διαφορά δυσκολίας των αποδείξεών των.

Παραδείγματα: 1. Αν $1 < p \leq +\infty$, τότε $e_n \xrightarrow{w} 0$ στον l^p και στους c, c_0, ενώ η $\{e_n\}$ δεν έχει ασθενές όριο στον l^1.

Σε όλες τις περιπτώσεις η νόρμα των e_n είναι σταθερή και ίση με 1 και η $\{e_n\}$ δε συγκλίνει διότι η νόρμα της διαφοράς διαδοχικών όρων είναι σταθερή και ίση με αριθμό $\neq 0$.
2. Αν το $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο, τότε $a_n \xrightarrow{w} 0$ στον X.

Θεώρημα 4.22 *Έστω χώρος X με νόρμα και $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X. Τότε $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ και $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

Απόδειξη: Για κάθε $x^* \in X^*$ η $\{x^*(x_n)\}$ συγκλίνει στο $x^*(x)$ στο F, οπότε είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα 4.21 συνεπάγεται ότι $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

Έστω $q = \liminf \|x_n\|$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ ώστε $\|x_{n_k}\| \leq q + \epsilon$ για κάθε k. Τότε για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει ότι $x^*(x_{n_k}) \to x^*(x)$, οπότε $|x^*(x)| \leq \|x^*\| (q + \epsilon)$. Από το Θεώρημα 4.11 συνεπάγεται ότι $\|x\| = \max_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x)| \leq q + \epsilon$ και, επομένως, $\|x\| \leq q$.

Θεώρημα 4.23 *Έστω χώρος Banach X και $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ στον X^*. Τότε $\sup_n \|x_n^*\| < +\infty$ και $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in X$ η $\{x_n^*(x)\}$ συγκλίνει στο $x^*(x)$ στο F, οπότε είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα 4.20 συνεπάγεται ότι $\sup_n \|x_n^*\| < +\infty$.

Έστω $q = \liminf \|x_n^*\|$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει υποακολουθία $\{x_{n_k}^*\}$ ώστε $\left\|x_{n_k}^*\right\| \leq q + \epsilon$ για κάθε k. Τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $x_{n_k}^*(x) \to x^*(x)$, οπότε $|x^*(x)| \leq \|x\|\,(q+\epsilon)$. Άρα $\|x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1}|x^*(x)| \leq q+\epsilon$ και, επομένως, $\|x^*\| \leq q$.

Ορισμός 4.12 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(i) Ένα $K \subseteq X$ ονομάζεται ***ακολουθιακά ασθενώς κλειστό*** *αν για κάθε $\{x_n\}$ στο K η οποία συγκλίνει ασθενώς στον X ισχύει ότι $w - \lim x_n \in K$.*
(ii) Ένα $K \subseteq X^*$ ονομάζεται ***ακολουθιακά ασθενώς* κλειστό*** *αν για κάθε $\{x_n^*\}$ στο K η οποία συγκλίνει ασθενώς* στον X^* ισχύει ότι $w^* - \lim x_n \in K$.*

Είναι προφανές από την Πρόταση 4.11 ότι, αν ένα σύνολο είναι ακολουθιακά ασθενώς κλειστό ή ακολουθιακά ασθενώς* κλειστό, τότε είναι κλειστό.

Θεώρημα 4.24 *Έστω χώρος X με νόρμα και κυρτό $K \subseteq X$. Το K είναι κλειστό αν και μόνον αν είναι ακολουθιακά ασθενώς κλειστό.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το K είναι κλειστό και θα αποδείξουμε ότι αν η $\{x_n\}$ είναι στο K και $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X, τότε $x \in K$. Κατ΄ αρχήν υποθέτουμε ότι $F = \mathbf{R}$.

Εφαρμόζοντας μεταφορά κατά $-x$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$ για να αποδείξουμε ότι $0 \in K$. Αν $0 \notin K$, υπάρχει $R > 0$ ώστε $K \cap B(0;R) = \emptyset$. Από το Θεώρημα 4.13 συνεπάγεται ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leq \frac{1}{R}$ ώστε $\Re x^*(z) < 1$ για κάθε $z \in B(0;R)$ και $\Re x^*(z) \geq 1$ για κάθε $z \in K$.

Τώρα, για κάθε n έχουμε $\Re x^*(x_n) \geq 1$, ενώ $x^*(0) = 0$. Επειδή $x_n \xrightarrow{w} 0$ συνεπάγεται ότι $x^*(x_n) \to x^*(0) = 0$ και καταλήγουμε σε αντίφαση. Άρα $0 \in K$.

Ορισμός 4.13 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(i) Το $K \subseteq X$ ονομάζεται ***ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές*** *αν κάθε ακολουθία στο K έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει ασθενώς στον X σε στοιχείο του K.*
(ii) Το $K \subseteq X^*$ ονομάζεται ***ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγές*** *αν κάθε ακολουθία στο K έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει ασθενώς* στον X σε στοιχείο του K.*

Πρόταση 4.13 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(1) Αν το $K \subseteq X$ είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές, τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς κλειστό και φραγμένο.
(2) Αν το $K \subseteq X^*$ είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγές, τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς* κλειστό και, αν ο X είναι χώρος Banach, φραγμένο.

Απόδειξη: (1) Αν το K δεν είναι φραγμένο, υπάρχει $\{x_n\}$ στο K ώστε $\|x_n\| \to +\infty$. Παίρνουμε υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $x \in K$ και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω του Θεωρήματος 4.22.

Αν η $\{x_n\}$ είναι στο K και συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$, παίρνουμε $\{x_{n_k}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\widehat{x} \in K$. Τότε $x = w - \lim x_{n_k} = \widehat{x}$ από την Πρόταση 4.12. Άρα $x \in K$.
(2) Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του (1).

Θεώρημα 4.25 *Έστω αυτοπαθής χώρος X με νόρμα και κυρτό $K \subseteq X$. Τότε το K είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Έστω φραγμένο, κυρτό, κλειστό υποσύνολο K του X και $\{x_n\}$ στο K. Επειδή το K είναι φραγμένο, υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M$ για κάθε n.

Θέτουμε $Y = cl\big(< \{x_n | n \in \mathbf{N}\} >\big)$, οπότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X. Κάθε $y \in Y$ προσεγγίζεται από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$, οπότε και από γραμμικούς συνδυασμούς με ρητούς συντελεστές στοιχείων του $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$. Άρα ο Y είναι διαχωρίσιμος. Επειδή ο X είναι αυτοπαθής και ο Y κλειστός, από το Θεώρημα 4.19 συνεπάγεται ότι ο Y είναι αυτοπαθής. Άρα και ο Y^{**}, ως ισομετρικός με τον Y, είναι διαχωρίσιμος. Από την Πρόταση 4.8 συνεπάγεται ότι και ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{y_m^* | m \in \mathbf{N}\}$ του Y^*. Για κάθε y_m^* ισχύει ότι $|y_m^*(x_n)| \leq \|y_m^*\| \, \|x_n\| \leq \|y_m^*\| \, M$, οπότε η ακολουθία $\{y_m^*(x_n)\}$ είναι φραγμένη στο F. Εφαρμόζοντας το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, βρίσκουμε υποακολουθία $\{x_{n_k}\}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_k y_m^*(x_{n_k}) \in F$ για κάθε m. Παίρνουμε, τώρα, οποιοδήποτε $y^* \in Y^*$ και βρίσκουμε m ώστε $\|y^* - y_m^*\| < \epsilon$. Τότε $|y^*(x_{n_k}) - y^*(x_{n_l})| \leq |y^*(x_{n_k}) - y_m^*(x_{n_k})| + |y_m^*(x_{n_k}) - y_m^*(x_{n_l})| + |y_m^*(x_{n_l}) - y^*(x_{n_l})| \leq \epsilon M + |y_m^*(x_{n_k}) - y_m^*(x_{n_l})| + \epsilon M$. Άρα $\limsup_{k,l \to +\infty} |y^*(x_{n_k}) - y^*(x_{n_l})| \leq 2\epsilon M$ για κάθε $\epsilon > 0$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim y^*(x_{n_k}) \in F$.

Ορίζουμε $y^{**} : Y^* \to F$ με τύπο $y^{**}(y^*) = \lim_k y^*(x_{n_k})$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Είναι απλό να αποδειχθεί ότι το y^{**} είναι γραμμικό και $|y^{**}(y^*)| \leq M \|y^*\|$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Άρα $y^{**} \in Y^{**}$.

Λόγω της αυτοπάθειας του Y, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $J'y = y^{**}$, όπου J' είναι η φυσιολογική εμφύτευση του Y στον Y^{**}. Δηλαδή, $y^*(y) = y^{**}(y^*) = \lim_k y^*(x_{n_k})$ για κάθε $y^* \in Y^*$.

Έστω, τώρα, τυχόν $x^* \in X^*$. Παίρνουμε $y^* \in Y^*$ να είναι ο περιορισμός του x^* στον Y. Αφού όλα τα x_{n_k} και το y ανήκουν στον Y, ισχύει $x^*(y) = y^*(y) = \lim_k y^*(x_{n_k}) = \lim_k x^*(x_{n_k})$. Άρα $y = w - \lim_k x_{n_k}$. Τέλος, επειδή το K είναι κυρτό και κλειστό, από το Θεώρημα 4.24 συνεπάγεται ότι $y \in K$.

Άρα το K είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές.

Αντιστρόφως, έστω ότι το K είναι κυρτό και ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές. Από την Πρόταση 4.13 συνεπάγεται ότι είναι φραγμένο και ακολουθιακά ασθενώς κλειστό και, επομένως, κλειστό.

Ισχύει και το αντίστροφο του τελευταίου θεωρήματος και σε (φαινομενικά) ισχυρότερη μορφή. Δηλαδή: **αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα ενός χώρου Banach είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγής, τότε ο χώρος είναι αυτοπαθής.** Αυτό είναι ένα θεώρημα των Eberlein-Shmulyan.

Θεώρημα 4.26 *Έστω αυτοπαθής χώρος X με νόρμα και κυρτό, κλειστό $K \subseteq X$. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y_0 \in K$ ώστε $\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| \,|\, y \in K\}$.*

Απόδειξη: Έστω $y_1 \in K$ και $R = \|x - y_1\|$. Θέτουμε $K_1 = K \cap cl(B(x; R))$, οπότε το K_1 είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο. Παίρνουμε $\{y_n\}$ στο K ώστε $\|x - y_n\| \to d$, όπου $d = \inf\{\|x - y\| \,|\, y \in K\}$, και $\|x - y_n\| \leq R$ για κάθε n. Τότε η $\{y_n\}$ είναι στο K_1 και από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία $\{y_{n_k}\}$ ώστε να υπάρχει το $y_0 = w - \lim y_{n_k}$ στο K.

Από το Θεώρημα 4.22 συνεπάγεται ότι $d \leq \|x - y_0\| \leq \liminf \|x - y_{n_k}\| = d$. Άρα $\|x - y_0\| = d$.

Θεώρημα 4.27 *(Helly) Έστω διαχωρίσιμος χώρος Banach X με νόρμα. Ένα $K \subseteq X^*$ είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγές αν και μόνον αν είναι ακολουθιακά ασθενώς* κλειστό και φραγμένο.*

Ειδικότερα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγής.

Απόδειξη: Έστω ότι το K είναι ακολουθιακά ασθενώς* κλειστό και φραγμένο. Παίρνουμε $\{x_n^*\}$ στο K, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $\|x_n^*\| \leq M$ για κάθε n.

Θεωρούμε αριθμήσιμο $\{x_m | m \in \mathbf{N}\}$ πυκνό στον X. Τότε για οποιοδήποτε x_m έχουμε $|x_n^*(x_m)| \leq M\,\|x_m\|$ για κάθε n, οπότε η $\{x_n^*(x_m)\}$ είναι φραγμένη στο F. Με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor βρίσκουμε υποακολουθία $\{x_{n_k}^*\}$ ώστε για κάθε x_m να υπάρχει το $\lim_k x_{n_k}^*(x_m)$ στο F. Τώρα για οποιοδήποτε $x \in X$ υπάρχει x_m με $\|x - x_m\| < \epsilon$, οπότε $|x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| \leq |x_{n_k}^*(x) - x_{n_k}^*(x_m)| + |x_{n_k}^*(x_m) - x_{n_l}^*(x_m)| + |x_{n_l}^*(x_m) - x_{n_l}^*(x)| \leq \epsilon M + |x_{n_k}^*(x_m) - x_{n_l}^*(x_m)| + \epsilon M$. Άρα $\limsup_{k,l \to +\infty} |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| \leq 2\epsilon M$ και, επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_k x_{n_k}^*(x)$ στο F.

Θέτουμε $x^* : X \to F$ με τύπο $x^*(x) = \lim_k x_{n_k}^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Είναι θέμα ρουτίνας να αποδειχθεί ότι το x^* είναι γραμμικό στον X και $|x^*(x)| \leq M\,\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Άρα $x^* \in X^*$ και $x^* = w^* - \lim_k x_{n_k}^*$. Επειδή το K είναι ακολουθιακά ασθενώς* κλειστό, συνεπάγεται ότι $x^* \in K$ και, επομένως το K είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγές.

Το αντίστροφο περιέχεται στην Πρόταση 4.13.

Απομένει να αποδειχθεί ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ακολουθιακά ασθενώς* κλειστή. Έστω $\{x_n^*\}$ στον X^* με $\|x_n^*\| \leq 1$ για κάθε n και $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^* \in X^*$. Από το Θεώρημα 4.23 συνεπάγεται ότι $\|x^*\| \leq 1$.

4.11 Ασθενείς τοπολογίες

Ορισμός 4.14 *Έστω γραμμικός χώρος X και $\mathcal{L}$ μία μη-κενή συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών του X με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ υπάρχει $x' \in \mathcal{L}$ ώστε $x'(x) \neq 0$. Τότε η $\mathcal{L}$ ονομάζεται* ***διαχωρίζουσα συλλογή γραμμ. συναρτησοειδών του*** *X.*

Παρατηρούμε, τώρα, ότι, αν θέσουμε $\mathcal{P} = \{|x'| \,|\, x' \in \mathcal{L}\}$, τότε η $\mathcal{P}$ είναι διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών του X. Επομένως, ορίζεται η συλλογή $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}^0$, την οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση συμβολίζουμε $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}^0$, με στοιχεία όλα τα υποσύνολα U^0 του X που γράφονται $U^0 = \{x \in X \,|\, |x_1'(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X \,|\, |x_n'(x)| < \epsilon_n\}$, όπου το $n \in \mathbf{N}$, τα $x_1', \ldots, x_n' \in \mathcal{L}$ και τα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ είναι αυθαίρετα.

Επίσης, ορίζεται η συλλογή $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, την οποία τώρα συμβολίζουμε $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, με στοιχεία όλα τα σύνολα O με την ιδιότητα: για κάθε $x \in O$ υπάρχει $U^0 \in \mathcal{N}_{\mathcal{L}}^0$ ώστε $x + U^0 \subseteq O$.

Άμεση εφαρμογή της Πρότασης 3.34 αποτελούν τα:
(1) Κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{L}}$ περιέχει το 0, είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφά τον X.
(2) Αν $U^0_1, \ldots, U^0_m \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{L}}$, τότε $U^0_1 \cap \ldots \cap U^0_m \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{L}}$.
(3) Κάθε $U^0 \in \mathcal{N}^0_{\mathcal{L}}$ ανήκει στην $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Λήμμα 4.6 *Έστω γραμμικός χώρος X, x' γραμμικό συναρτησοειδές του X και $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X ως προς την οποία η πράξη $+ : X \times X \to X$ είναι συνεχής. Τότε το x' είναι συνεχές στον X αν και μόνον αν η ημινόρμα $|x'|$ είναι συνεχής στον X.*

Απόδειξη: Έστω ότι το x' είναι συνεχές στο τυχόν $x \in X$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή O του x ώστε $|x'(y) - x'(x)| < \epsilon$ για κάθε $y \in O$. Άρα $||x'(y)| - |x'(x)|| < \epsilon$ για κάθε $y \in O$ και, επομένως, η $|x'|$ είναι συνεχής στο x.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $|x'|$ είναι συνεχής στο 0. Αυτό είναι ταυτόσημο με το ότι το x' είναι συνεχές στο 0. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή O του 0 ώστε $|x'(y)| < \epsilon$ για κάθε $y \in O$. Λόγω της συνέχειας της πρόσθεσης, το σύνολο $O + x$ είναι ανοικτή περιοχή του x και, προφανώς, $|x'(y) - x'(x)| = |x'(y - x)| < \epsilon$ για κάθε $y \in O + x$. Άρα το x' είναι συνεχές στο x.

Με το λήμμα αυτό να εξασφαλίζει την ισχύ του παρακάτω (iii), το Θεώρημα 3.35 διατυπώνεται, τώρα, ως εξής.

Η $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ είναι η ελάχιστη τοπολογία στον X με τις ιδιότητες:
(i) ο X με την $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ είναι χώρος Hausdorff,
(ii) οι πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : F \times X \to X$ είναι συνεχείς,
(iii) κάθε $x' \in \mathcal{L}$ είναι συνεχής.

Ορισμός 4.15 *Έστω γραμμικός χώρος X και διαχωρίζουσα συλλογή $\mathcal{L}$ γραμμ. συναρτησοειδών του X. Τότε η τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ του X ονομάζεται* ***η ασθενής τοπολογία του X η οποία επάγεται από την*** *$\mathcal{L}$ και συμβολίζεται $\sigma(X, \mathcal{L})$.*

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε από το θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι η $\mathcal{L} = X^*$ είναι διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών.

Ορισμός 4.16 *Έστω χώρος X με νόρμα. Η $\sigma(X, X^*)$ ονομάζεται* ***η ασθενής τοπολογία του*** *X.*

Ένα υποσύνολο του X το οποίο είναι ανοικτό ή κλειστό ή συμπαγές ως προς την $\sigma(X, X^*)$ ονομάζεται ***ασθενώς ανοικτό*** *ή* ***ασθενώς κλειστό*** *ή* ***ασθενώς συμπαγές****, αντιστοίχως.*

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε και ο X^* είναι χώρος με νόρμα και ο δυικός του είναι ο X^{**}. Άρα η ασθενής τοπολογία του X^* είναι η $\sigma(X^*, X^{**})$. Όμως, στον X^* ορίζεται ακόμα μία ενδιαφέρουσα τοπολογία.

Ορισμός 4.17 *Έστω χώρος X με νόρμα και $J : X \to X^{**}$ η φυσιολογική εμφύτευση. Η $\sigma(X^*, J(X))$ ονομάζεται* ***η ασθενής* τοπολογία του*** *X^*. Λόγω* *της ταύτισης του X με την εικόνα του, $J(X)$, η τοπολογία αυτή συμβολίζεται, χάριν ευκολίας, $\sigma(X^*, X)$.*

Ένα υποσύνολο του X^* το οποίο είναι ανοικτό ή κλειστό ή συμπαγές ως προς την $\sigma(X^*, X)$ ονομάζεται ***ασθενώς*** * ***ανοικτό*** *ή* ***ασθενώς*** * ***κλειστό*** *ή* ***ασθενώς*** * ***συμπαγές****, αντιστοίχως.*

Η τυπική ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την $\sigma(X, X^*)$ είναι η $\{x \in X \,|\, |x_1^*(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X \,|\, |x_n^*(x)| < \epsilon_n\}$, όπου το $n \in \mathbf{N}$, τα $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ και τα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ είναι αυθαίρετα. Ομοίως, η τυπική ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την $\sigma(X^*, X^{**})$ είναι η $\{x^* \in X^* \,|\, |x_1^{**}(x^*)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x^* \in X^* \,|\, |x_n^{**}(x^*)| < \epsilon_n\}$, ενώ η τυπική ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την $\sigma(X^*, X)$ είναι η $\{x^* \in X^* \,|\, |x^*(x_1)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x^* \in X^* \,|\, |x^*(x_n)| < \epsilon_n\}$.

Επομένως, σε κάθε χώρο X με νόρμα έχουμε ορίσει δύο τοπολογίες: την ασθενή τοπολογία και την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα του X, η οποία ονομάζεται και **η ισχυρή τοπολογία του** X.

Επίσης, στον X^* έχουμε ορίσει τρείς τοπολογίες: την ισχυρή τοπολογία, την ασθενή τοπολογία και την ασθενή* τοπολογία του X^*.

Είναι προφανές ότι, **αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε η ασθενής τοπολογία και η ασθενής* τοπολογία του X^* ταυτίζονται.**

Στον X^{**} έχουμε ορίσει δύο τοπολογίες: την ισχυρή και την ασθενή* τοπολογία.

Η επόμενη πρόταση εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην ασθενή τοπολογία του X και την ασθενή* τοπολογία του X^{**} μέσω της φυσιολογικής εμφύτευσης του X στον X^{**}. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι, με την ταύτιση των X και $J(X)$, η ασθενής τοπολογία του X και η ασθενής* τοπολογία του $J(X)$ (ακριβέστερα, ο περιορισμός της ασθενούς* τοπολογίας του X^{**} στο $J(X)$) ταυτίζονται.

Πρόταση 4.14 *Έστω χώρος X με νόρμα και $J : X \to X^{**}$ η φυσιολογική εμφύτευση. Αν ο X έχει την ασθενή τοπολογία, ο X^{**} την ασθενή* τοπολογία και το $J(X)$ την τοπολογία-υπόχωρου, τότε η $J : X \to J(X)$ είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη: Έστω τυχόν $x \in X$. Με παραμέτρους τα $n \in \mathbf{N}$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ έχουμε την ανοικτή περιοχή $U^x = \{z \in X \,|\, |x_1^*(z) - x_1^*(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z \in X \,|\, |x_n^*(z) - x_n^*(x)| < \epsilon_n\}$ του x ως προς την ασθενή τοπολογία του X. Με τις ίδιες παραμέτρους έχουμε την ανοικτή περιοχή $\{z^{**} \in X^{**} \,|\, |z^{**}(x_1^*) - Jx(x_1^*)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z^{**} \in X^{**} \,|\, |z^{**}(x_n^*) - Jx(x_n^*)| < \epsilon_n\}$ του Jx ως προς την ασθενή* τοπολογία του X^{**}. Περιορίζοντας το z^{**} στο $J(X)$, δηλαδή θέτοντας $z^{**} = Jz$, και γράφοντας $Jx(x_j^*) = x_j^*(x)$ και $Jz(x_j^*) = x_j^*(z)$, παίρνουμε την ανοικτή περιοχή $V^{Jx} = \{Jz \in J(X) \,|\, |x_1^*(z) - x_1^*(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{Jz \in J(X) \,|\, |x_n^*(z) - x_n^*(x)| < \epsilon_n\}$ του x ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του $J(X)$. Είναι φανερό ότι $V^{Jx} = J(U^x)$.

Αν O είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία-υπόχωρου του $J(X)$ και $Jx \in O$, τότε υπάρχει $V^{Jx} \subseteq O$. Άρα για την αντίστοιχη U^x ισχύει ότι $Jz \in O$ για κάθε $z \in U^x$. Αυτό σημαίνει ότι η J είναι συνεχής στο x.

Αν Q είναι ασθενώς ανοικτό στον X και $x \in Q$, τότε υπάρχει $U^x \subseteq Q$. Άρα για την αντίστοιχη V^{Jx} ισχύει ότι $J^{-1}(Jz) \in Q$ για κάθε $Jz \in V^{Jx}$. Αυτό σημαίνει ότι η J^{-1} είναι συνεχής στο Jx.

Πρόταση 4.15 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(1) Ισχύει $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X αν και μόνον αν η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x ως προς την ασθενή τοπολογία του X.

(2) Ισχύει $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ στον X^* αν και μόνον αν η $\{x_n^*\}$ συγκλίνει στο x^* ως προς την ασθενή* τοπολογία του X^*.

Απόδειξη: (1) Έστω $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X. Θεωρούμε τυχόν ανοικτό O ως πρός την $\sigma(X, X^*)$ με $x \in O$. Τότε υπάρχει $U^0 = \{y \in X \,|\, |x_1^*(y)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{y \in X \,|\, |x_n^*(y)| < \epsilon_n\}$, με $n \in \mathbf{N}$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$, ώστε $x + U^0 \subseteq O$. Επειδή $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$, υπάρχει N ώστε $|x_j^*(x_n - x)| = |x_j^*(x_n) - x_j^*(x)| < \epsilon_j$ για κάθε $n \geq N$ και κάθε $j = 1, \ldots, n$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n - x \in U^0$ για κάθε $n \geq N$ και, επομένως, $x_n \in O$ για κάθε $n \geq N$. Άρα η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x ως προς την ασθενή τοπολογία του X.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x ως προς την ασθενή τοπολογία του X. Παίρνουμε τυχόν $x^* \in X^*$ και την ανοικτή περιοχή $x + \{y \in X \,|\, |x^*(y)| < \epsilon\}$ του x. Τότε υπάρχει N ώστε $x_n \in x + \{y \in X \,|\, |x^*(y)| < \epsilon\}$ για κάθε $n \geq N$, οπότε $|x^*(x_n) - x^*(x)| = |x^*(x_n - x)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Άρα $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για τυχόν $x^* \in X^*$, οπότε $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X.
(2) Η απόδειξη είναι όμοια.

Πρόταση 4.16 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(1) Η ασθενής τοπολογία του X είναι μικρότερη ή ίση από την ισχυρή τοπολογία του X.
(2) Η ασθενής* τοπολογία του X^* είναι μικρότερη ή ίση από την ασθενή τοπολογία του X^* και αυτή είναι μικρότερη ή ίση από την ισχυρή τοπολογία του X^*.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 4.17 *Έστω γραμμικός χώρος X και διαχωρίζουσα συλλογή $\mathcal{L}$ γραμμικών συναρτησοειδών του X. Ορίζουμε συνάρτηση $\phi : X \to \prod_{x' \in \mathcal{L}} F$ με τύπο $\phi(x) = \big(x'(x)\big)_{x' \in \mathcal{L}}$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, η x'-συντεταγμένη του $\phi(x)$ είναι η $\phi(x)_{x'} = x'(x)$ για κάθε $x' \in \mathcal{L}$. Τότε η ϕ είναι 1-1.*

Αν ο X έχει την ασθενή τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{L})$, ο $\prod_{x' \in \mathcal{L}} F$ έχει την τοπολογία-γινόμενο (όπου κάθε F έχει την ευκλείδια τοπολογία) και το $\phi(X)$ έχει την τοπολογία-υπόχωρου, τότε η $\phi : X \to \phi(X)$ είναι ομοιομορφισμός του X με το $\phi(X)$.

Απόδειξη: Έστω ότι $x_1, x_2 \in X$ και $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Τότε $\phi(x_1)_{x'} = \phi(x_2)_{x'}$ και, επομένως, $x'(x_1) = x'(x_2)$ για κάθε $x' \in \mathcal{L}$. Επειδή η $\mathcal{L}$ είναι διαχωρίζουσα, συνεπάγεται ότι $x_1 = x_2$. Άρα η ϕ είναι 1-1.

Άρα η $\phi : X \to \phi(X)$ είναι 1-1 και επί και μένει να αποδείξουμε ότι αυτή και η $\phi^{-1} : \phi(X) \to X$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Αν $x \in X$, τότε με παραμέτρους τα $n \in \mathbf{N}$, $x_1', \ldots, x_n' \in \mathcal{L}$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ ορίζεται η ανοικτή περιοχή $U^x = \{z \in X \,|\, |x_1'(z) - x_1'(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z \in X \,|\, |x_n'(z) - x_n'(x)| < \epsilon_n\}$ του x ως προς την $\sigma(X, \mathcal{L})$.

Η ίδια επιλογή των παραμέτρων αυτών ορίζει την ανοικτή περιοχή $\{w \in \prod_{x' \in \mathcal{L}} F \,|\, |w_{x_1'} - y_{x_1'}| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{w \in \prod_{x' \in \mathcal{L}} F \,|\, |w_{x_n'} - y_{x_n'}| < \epsilon_n\}$ του y

στο $\prod_{x'\in\mathcal{L}} F$ ως προς την τοπολογία-γινόμενο. Τώρα, αν περιορίσουμε τα y, w στο $\phi(X)$ και θέσουμε $y = \phi(x), w = \phi(z)$ με $x, z \in X$, θα έχουμε ανοικτή περιοχή V^y του $y \in \phi(X)$ στο $\phi(X)$ ως προς την τοπολογία-υπόχωρου. Γράφοντας $y_{x'_j} = x'_j(x)$ και $w_{x'_j} = x'_j(z)$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, βρίσκουμε ότι $V^y = \{\phi(z) \in \phi(X) \,|\, |x'_1(z) - x'_1(x)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z \in X \,|\, |x'_n(z) - x'_n(x)| < \epsilon_n\}$. Παρατηρούμε ότι $V^y = \phi(U^x)$.

Έστω τυχόν $x \in X$ και $O \ni y = \phi(x)$ ανοικτό στο $\phi(X)$ ως προς την τοπολογία-υπόχωρου. Δηλαδή, υπάρχει ανοικτή περιοχή της μορφής V^y ώστε $V^y \subseteq O$. Θεωρούμε την αντίστοιχη ανοικτή περιοχή U^x του x και έχουμε ότι για κάθε $z \in U^x$ ισχύει $\phi(z) \in \phi(U^x) = V^y$, οπότε $\phi(z) \in O$. Άρα η ϕ είναι συνεχής στο x.

Έστω τυχόν $y = \phi(x) \in \phi(X)$ και $Q \ni x = \phi^{-1}(y)$ ανοικτό στο X ως προς την $\sigma(X, \mathcal{L})$. Δηλαδή, υπάρχει ανοικτή περιοχή της μορφής U^x ώστε $U^x \subseteq Q$. Θεωρούμε την αντίστοιχη ανοικτή περιοχή V^y του y και έχουμε ότι για κάθε $w \in V^y$ ισχύει $\phi^{-1}(w) \in \phi^{-1}(V^y) = U^x$, οπότε $\phi^{-1}(w) \in Q$. Άρα η ϕ^{-1} είναι συνεχής στο y.

Πρόταση 4.18 *Έστω χώρος X με νόρμα.*
(1) Αν το $K \subseteq X$ είναι ασθενώς συμπαγές, τότε είναι ασθενώς κλειστό και φραγμένο.
(2) Αν το $K \subseteq X^*$ είναι ασθενώς* συμπαγές, τότε είναι ασθενώς* κλειστό και, αν ο X είναι χώρος Banach, φραγμένο.

Απόδειξη: (1) Επειδή ο X με την τοπολογία $\sigma(X, X^*)$ είναι χώρος Hausdorff, συνεπάγεται ότι το ασθενώς συμπαγές $K \subseteq X$ είναι ασθενώς κλειστό. Κάθε $x^* \in X^*$ είναι συνεχής στον X με την $\sigma(X, X^*)$, οπότε είναι φραγμένη συνάρτηση στο K. Δηλαδή $\sup_{x\in K} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in X^*$. Από το Θεώρημα 4.21 συνεπάγεται ότι $\sup_{x\in K} \|x\| < +\infty$, οπότε το K είναι φραγμένο.
(2) Άσκηση.

Θεώρημα 4.28 *(Alaoglou) Έστω χώρος X με νόρμα. Αν $K \subseteq X^*$ είναι ασθενώς* κλειστό και φραγμένο, τότε είναι ασθενώς* συμπαγές.*

Ειδικότερα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ασθενώς* συμπαγής.

Αντιστρόφως, αν το K είναι ασθενώς* συμπαγές, τότε είναι ασθενώς* κλειστό και, αν ο X είναι χώρος Banach, φραγμένο.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.17 στο χώρο X^* με $\mathcal{L} = J(X) \subseteq X^{**}$ και την επαγώμενη ασθενή* τοπολογία του X^*. Θεωρούμε τον ομοιομορφισμό $\phi : X^* \to \phi(X^*) \subseteq \prod_{J(x)\in J(X)} F = \prod_{x\in X} F$ της προηγούμενης πρότασης.

Θεωρούμε ασθενώς* κλειστό και φραγμένο $K \subseteq X^*$, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $\|x^*\| \leq M$ για κάθε $x^* \in K$. Τότε για κάθε $x \in X$ και $x^* \in K$ έχουμε $|\phi(x^*)_x| = |Jx(x^*)| = |x^*(x)| \leq M \|x\|$. Επομένως, αν $x^* \in K$, τότε $\phi(x^*)_x \in [-M\|x\|, M\|x\|]$ για κάθε $x \in X$. Άρα

$$\phi(K) \subseteq \phi(X^*) \cap \prod_{x\in X} [-M\|x\|, M\|x\|] \subseteq \prod_{x\in X} F.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\phi(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\prod_{x\in X} F$ ως προς την τοπολογία-γινόμενο. Τότε το $\phi(K)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του $\prod_{x\in X}[-M\|x\|, M\|x\|]$, το οποίο είναι συμπαγές λόγω του Θεωρήματος του Tychonov. Άρα το $\phi(K)$ θα είναι συμπαγές και, επομένως, το K, ως συνεχής εικόνα του $\phi(K)$, είναι ασθενώς* συμπαγές.

Έστω $y = (y_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} F$ σημείο συσσώρευσης του $\phi(K)$. Θεωρούμε τυχόντα $x_1, x_2 \in X$, $\kappa \in F$ και $\epsilon > 0$ και την ανοικτή περιοχή του y της μορφής $\{w \in \prod_{x\in X} F \,|\, |w_{x_1} - y_{x_1}| < \epsilon\} \cap \{w \in \prod_{x\in X} F \,|\, |w_{x_2} - y_{x_2}| < \epsilon\} \cap \{w \in \prod_{x\in X} F \,|\, |w_{x_1+x_2} - y_{x_1+x_2}| < \epsilon\} \cap \{w \in \prod_{x\in X} F \,|\, |w_{\kappa x_1} - y_{\kappa x_1}| < \epsilon\}$. Παίρνουμε $x^* \in K$ ώστε το $\phi(x^*)$ να ανήκει στην περιοχή αυτή. Αυτό σημαίνει ότι $|x^*(x_1) - y_{x_1}|, |x^*(x_2) - y_{x_2}|, |x^*(x_1+x_2) - y_{x_1+x_2}|, |x^*(\kappa x_1) - y_{\kappa x_1}| < \epsilon$. Επειδή το x^* είναι γραμμικό, εύκολα αποδεικνύουμε ότι $|y_{x_1+x_2} - y_{x_1} - y_{x_2}| < 3\epsilon$ και $|y_{\kappa x_1} - \kappa y_{x_1}| < (1+|\kappa|)\epsilon$. Τέλος, επειδή το ϵ είναι αυθαίρετο, συνεπάγεται ότι $y_{x_1+x_2} = y_{x_1} + y_{x_2}$ και $y_{\kappa x_1} = \kappa y_{x_1}$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\kappa \in F$.

Επειδή $\phi(K) \subseteq \prod_{x\in X}[-M\|x\|, M\|x\|]$ και το γινόμενο αυτό είναι κλειστό στο $\prod_{x\in X} F$, συνεπάγεται ότι $y \in \prod_{x\in X}[-M\|x\|, M\|x\|]$, οπότε $|y_x| \le M\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $x^* : X \to F$ με τύπο $x^*(x) = y_x$ για κάθε $x \in X$. Από τα προηγούμενα συνεπάγεται αμέσως ότι $x^* \in X^*$ και $\phi(x^*) = y$. Επειδή η ϕ^{-1} είναι συνεχής στο $y \in \phi(X^*)$, συνεπάγεται ότι το x^* είναι σημείο συσσώρευσης του K ως προς την ασθενή* τοπολογία και, επομένως, $x \in K$. Άρα $y \in \phi(K)$.

Το αντίστροφο περιέχεται στην Πρόταση 4.18.

Μένει να αποδείξουμε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ασθενώς* κλειστή. Έστω τυχόν $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| > 1$. Παίρνουμε $x \in X$ ώστε $\|x\| = 1$ και $|x^*(x)| > 1$, θέτουμε $\epsilon = |x^*(x)| - 1 > 0$ και θεωρούμε την ανοικτή περιοχή $U^{x^*} = \{z^* \in X^* \,|\, |z^*(x) - x^*(x)| < \epsilon\}$ του x^* ως προς την ασθενή* τοπολογία του X^*. Τότε για κάθε $z^* \in U^{x^*}$ έχουμε $\|z^*\| \ge |z^*(x)| > |x^*(x)| - \epsilon = 1$ και, επομένως, η U^{x^*} είναι ξένη προς την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^*.

Θεώρημα 4.29 *Έστω χώρος X με νόρμα και κυρτό $K \subseteq X$. Τότε το K είναι ασθενώς κλειστό αν και μόνον αν είναι κλειστό.*

Απόδειξη: Έστω ότι το K είναι κυρτό και κλειστό. Παίρνουμε τυχόν $x \notin K$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή του x ως προς την ασθενή τοπολογία του X ξένη προς το K. Επειδή κάθε μεταφορά είναι ομοιομορφισμός και ως προς την ισχυρή και ως προς την ασθενή τοπολογία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$. Κατόπιν παίρνουμε $R > 0$ ώστε $B(0;R) \cap K = \emptyset$.

Από το Θεώρημα 4.13 συνεπάγεται ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \le \frac{1}{R}$ ώστε $\Re x^*(x) < 1$ για κάθε $x \in B(0;R)$ και $\Re x^*(x) \ge 1$ για κάθε $x \in K$.

Η ανοικτή περιοχή $U^0 = \{x \in X \,|\, |x^*(x)| < 1\}$ του 0 ως προς την ασθενή τοπολογία του X είναι, προφανώς, ξένη προς το K.

Θεώρημα 4.30 *Έστω αυτοπαθής χώρος X με νόρμα και κυρτό $K \subseteq X$. Τότε το K είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 4.18 συνεπάγεται ότι, αν το K είναι ασθενώς συμπαγές, τότε είναι φραγμένο και ασθενώς κλειστό και, επομένως, κλειστό.

Αντιστρόφως, έστω ότι το K είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο. Από το Θεώρημα 4.29 συνεπάγεται ότι το K είναι ασθενώς κλειστό.

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι, μέσω της ταύτισης των X, X^{**}, η ασθενής τοπολογία του X και η ασθενής* τοπολογία του X^{**} ταυτίζονται. Πιο συγκεκριμένα, από την Πρόταση 4.14 συνεπάγεται ότι η φυσιολογική εμφύτευση $J : X \to X^{**}$ είναι ομοιομορφισμός αν ο X έχει την ασθενή τοπολογία και ο X^{**} έχει την ασθενή* τοπολογία.

Επομένως, το $J(K)$ είναι κυρτό, φραγμένο και ασθενώς* κλειστό στον X^{**}, οπότε από το Θεώρημα 4.28 συνεπάγεται ότι είναι ασθενώς* συμπαγές. Άρα, λόγω του ομοιομορφισμού, το K είναι ασθενώς συμπαγές.

Θεώρημα 4.31 *Έστω χώρος X με νόρμα και $J : X \to X^{**}$ η φυσιολογική εμφύτευση. Αν B_X είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, τότε το $J(B_X)$ είναι πυκνό στην $B_{X^{**}}$ ως προς την ασθενή* τοπολογία του X^{**}.*

Απόδειξη: Επειδή η J είναι ισομετρική εμφύτευση, έχουμε ότι $J(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$.

Έστω x^{**} με $\|x^{**}\| \leq 1$ και ασθενώς* ανοικτό σύνολο $O \subseteq X^{**}$ με $x^{**} \in O$. Τότε υπάρχουν $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ ώστε η ανοικτή περιοχή $U^{x^{**}} = \{z^{**} \in X^{**} \,|\, |z^{**}(x_1^*) - x^{**}(x_1^*)| < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{z^{**} \in X^{**} \,|\, |z^{**}(x_n^*) - x^{**}(x_n^*)| < \epsilon_n\}$ του x^{**} ως πρός την ασθενή* τοπολογία να περιέχεται στο O.

Θέτουμε $\epsilon = \min\left(\frac{\epsilon_1}{\|x_1^*\|}, \ldots, \frac{\epsilon_n}{\|x_n^*\|}\right)$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.16. Για κάθε $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ έχουμε ότι $|\kappa_1 x^{**}(x_1^*) + \cdots + \kappa_n x^{**}(x_n^*)| = |x^{**}(\kappa_1 x_1^* + \cdots + \kappa_n x_n^*)| \leq \|\kappa_1 x_1^* + \cdots + \kappa_n x_n^*\|$. Άρα υπάρχει $z \in X$ ώστε $\|z\| < 1 + \epsilon$ και $x_j^*(z) = x^{**}(x_j^*)$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Θέτουμε $x = \frac{1}{1+\epsilon} z$, οπότε $\|x\| \leq 1$ και $|Jx(x_j^*) - x^{**}(x_j^*)| = |x_j^*(x) - x^{**}(x_j^*)| = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} |x^{**}(x_j^*)| < \epsilon \left\|x_j^*\right\| \leq \epsilon_j$ για κάθε j. Άρα $Jx \in U^{x^{**}} \subseteq O$ και, επομένως, το x^{**} είναι σημείο συσσώρευσης του $J(B_X)$ ως πρός την ασθενή* τοπολογία του X^{**}.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.30.

Θεώρημα 4.32 *Ένας χώρος Banach είναι αυτοπαθής αν και μόνον αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα του είναι ασθενώς συμπαγής.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο X είναι αυτοπαθής. Από το Θεώρημα 4.30 συνεπάγεται ότι η B_X είναι ασθενώς συμπαγής.

Αντιστρόφως, έστω ότι η B_X είναι ασθενώς συμπαγής. Από την Πρόταση 4.14 συνεπάγεται ότι το $J(B_X)$ είναι ασθενώς* συμπαγές υποσύνολο του $B_{X^{**}}$. Από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι $J(B_X) = B_{X^{**}}$ και, επομένως, $J(X) = X^{**}$.

4.12 Το θεώρημα των Krein και Milman

Ορισμός 4.18 *Έστω γραμμικός χώρος X και M, K δύο μη-κενά υποσύνολα του X με $M \subseteq K$. Το M ονομάζεται* ***ακραίο υποσύνολο του*** *K αν έχει την εξής ιδιότητα: αν $x, y \in K$, $0 < \kappa < 1$ και $\kappa x + (1-\kappa)y \in M$, τότε $x, y \in M$.*

Αν $a \in K$, το a ονομάζεται ***ακραίο σημείο του*** *K αν το $\{a\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.*

Δηλαδή, το ότι το $a \in K$ είναι ακραίο σημείο του K σημαίνει ότι: αν $x, y \in K$, $0 < \kappa < 1$ και $\kappa x + (1-\kappa)y = a$, τότε $x = y = a$.

Είναι προφανές ότι κάθε μη-κενό σύνολο K είναι ακραίο υποσύνολο του εαυτού του.

Όλες οι κορυφές, όλες οι ακμές και, εν γένει, όλες οι k-διάστατες έδρες $(0 \leq k \leq n)$ ενός κυρτού πολυέδρου στον $\mathbf{R^n}$ είναι ακραία υποσύνολά του. Επίσης, κάθε σημείο της επιφάνειας μιας ευκλείδιας μπάλας του $\mathbf{R^n}$ είναι ακραίο σημείο της μπάλας. Αυτό ισχύει γενικότερα σε οποιονδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο και αποδεικνύεται εύκολα.

Λήμμα 4.7 *Έστω γραμμικός χώρος X και $K \subseteq X$.*
(1) Αν το M είναι ακραίο υποσύνολο του K και το N είναι ακραίο υποσύνολο του M, τότε το N είναι ακραίο υποσύνολο του K.
(2) Αν όλα τα στοιχεία της συλλογής $\mathcal{M}$ είναι ακραία υποσύνολα του K, τότε το $\bigcap \mathcal{M}$, αν δεν είναι κενό, είναι ακραίο υποσύνολο του K.
(3) Αν το x' είναι $\mathbf{R}$-γραμμικό συναρτησοειδές του X και το σύνολο $K' = \{x \in K | x'(x) = \min_K x'\}$ είναι μη-κενό, τότε το K' είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Απόδειξη: Άσκηση.

Το φυσιολογικό πλαίσιο του Θεωρήματος των Krein και Milman είναι αυτό των τοπικά κυρτών χώρων και θα χρειαστούμε τη γενίκευση ενός βασικού αποτελέσματος των χώρων με νόρμα.

Θεώρημα 4.33 *(Mazur) Έστω γραμμικός χώρος X με την τοπικά κυρτή τοπολογία $\mathcal{T_P}$ η οποία επάγεται από την διαχωρίζουσα συλλογή ημινορμών $\mathcal{P}$. Αν το A είναι κυρτό υποσύνολο του X και έχει το 0 ως εσωτερικό σημείο και αν το B είναι μη-κενό κυρτό υποσύνολο του X ξένο προς το A, τότε υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές x' του X ώστε*

$$\Re x'(a) \leq 1 \leq \Re x'(b)$$

για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$.

Απόδειξη: Θεωρούμε μία ανοικτή περιοχή $U^0 = \{x \in X | p_1(x) < \epsilon_1\} \cap \cdots \cap \{x \in X | p_n(x) < \epsilon_n\}$ του 0 ως προς την $\mathcal{T_P}$, όπου $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$. Η U^0 απορροφά τον X, οπότε και το A απορροφά τον X.

Υποθέτουμε, κατ' αρχήν ότι $F = \mathbf{R}$, οπότε από το Θεώρημα 2.5 συνεπάγεται ότι υπάρχουν μη-μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές x' του X και $\kappa = 0$ ή 1 ώστε το A να περιέχεται στον έναν από τους κλειστούς ημιχώρους που ορίζονται και το B να περιέχεται στον άλλο. Επειδή $0 \in A$ και $x'(0) = 0$, αποκλείεται το A να περιέχεται στον $\{x \in X | x'(x) \geq 1\}$. Αν πάρουμε x_0 με $x'(x_0) \neq 0$, επειδή η U^0 απορροφά τον X και είναι ισορροπημένη, υπάρχει $t > 0$ ώστε και τα δύο σημεία $\pm tx_0$ να περιέχονται στην U^0. Όμως το x' έχει αντίθετες τιμές στα δύο αυτά σημεία, οπότε το A δεν περιέχεται σε κανέναν από τους $\{x \in X | x'(x) \leq 0\}$ και $\{x \in X | x'(x) \geq 0\}$.

Άρα $\Re x'(a) \leq 1 \leq \Re x'(b)$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$.

Συνεπάγεται ότι $x'(\pm x) \leq 1$, οπότε $|x'(x)| \leq 1 < 2$ για κάθε $x \in U^0$. Άρα $|x'(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in \frac{\epsilon}{2} U^0$, οπότε είναι φανερό ότι το x' είναι συνεχές στο 0 και, επομένως, σε κάθε σημείο του X.

Αν $F = \mathbf{C}$, θεωρούμε τον X ως $\mathbf{R}$-γραμμικό χώρο, οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει $\mathbf{R}$-γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές $x'_{\mathbf{R}}$ του X ώστε $x'_{\mathbf{R}}(a) \leq 1 \leq x'_{\mathbf{R}}(b)$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$. Τα υπόλοιπα είναι άμεση εφαρμογή του Λήμματος 2.2.

Πόρισμα *Έστω τοπικά κυρτός χώρος X. Για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές x' του X ώστε $\Re x'(x_1) \neq \Re x'(x_2)$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$ και παίρνουμε μία ημινόρμα p από αυτές που επάγουν την τοπολογία του X ώστε $p(x_0) > 0$. Θεωρούμε την ανοικτή περιοχή $U^0 = \{x \in X | p(x) < \frac{1}{2} p(x_0)\}$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στα ξένα κυρτά σύνολα U^0 και $\{x_0\}$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές x' του X ώστε $1 \leq \Re x'(x_0)$, οπότε $\Re x'(x_1) \neq \Re x'(x_2)$.

Θεώρημα 4.34 *(Krein-Milman) Έστω K ένα μη-κενό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου X. Τότε.*
(1) Υπάρχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο του K.
(2) Αν E είναι το σύνολο όλων των ακραίων σημείων του K, τότε $K \subseteq cl(co(E))$.
(3) Αν το K είναι και κυρτό, τότε $K = cl(co(E))$.

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{M}$ όλων των συμπαγών ακραίων υποσυνόλων του K. Η $\mathcal{M}$ δεν είναι κενή, αφού περιέχει το K. Στην $\mathcal{M}$ θεωρούμε τη διάταξη $\prec$ η οποία ορίζεται ώς εξής: $M_1 \prec M_2$ αν $M_2 \subseteq M_1$. Κατόπιν παίρνουμε ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $\mathcal{C}$ του $\mathcal{M}$ και θέτουμε $M_0 = \bigcap \mathcal{C}$. Τότε:
(i) Το M_0 είναι μη-κενό και συμπαγές.

Το M_0 είναι συμπαγές ως τομή συμπαγών συνόλων. Αν $M_0 = \emptyset$, τότε παίρνουμε οποιοδήποτε $M' \in \mathcal{C}$ και παρατηρούμε ότι η συλλογή $\{X \setminus M | M \in \mathcal{C}, M \subseteq M'\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M'. Επομένως, υπάρχουν $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{C}$, όλα υποσύνολα του M', ώστε $M' \subseteq (X \setminus M_1) \cup \cdots \cup (X \setminus M_n)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $M_1 \cap \cdots \cap M_n = \emptyset$, το οποίο είναι αδύνατον αφού αυτή η τομή είναι ένα από τα $M_1, \ldots, M_n$.
(ii) Το M_0 είναι ακραίο υποσύνολο του K.

Η απόδειξή του είναι άμεση από το Λήμμα 4.7(2).

Από τα (i) και (ii) συνεπάγεται ότι το M_0 είναι άνω-φράγμα της $\mathcal{C}$. Άρα από το Λήμμα του Zorn συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συμπαγές ακραίο υποσύνολο M του

K, του οποίου κανένα γνήσιο υποσύνολο δεν είναι συμπαγές ακραίο υποσύνολο του K.

Ας υποθέσουμε ότι το M περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές x' του X ώστε $\Re x'(x_1) \neq \Re x'(x_2)$. Επειδή το M είναι συμπαγές, το σύνολο $M' = \{x \in M | \Re x'(x) = \min_M \Re x'\}$ είναι μη-κενό και συμπαγές γνήσιο υποσύνολο του M. Από το Λήμμα 4.7(3) και (1) συνεπάγεται ότι, κατ΄ αρχήν, το M' είναι ακραίο υποσύνολο του M και, κατόπιν, του K.

Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε το μη-κενό M είναι οπωσδήποτε μονοσύνολο και, φυσικά, το μοναδικό στοιχείο του είναι ακραίο σημείο του K.

(2) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in K \setminus cl(co(E))$. Από το Θεώρημα 4.33 συνεπάγεται εύκολα ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές x' του X ώστε $\Re x'(x_0) < \inf_{cl(c0(E))} \Re x'$. (Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το 0 δεν περιέχεται στο κλειστό κυρτό $cl(co(E)) - x_0$ και να θεωρήσουμε ανοικτή κυρτή περιοχή U^0 του 0 ξένη προς το σύνολο αυτό.) Επομένως, αν θέσουμε $K' = \{x \in K | \Re x'(x) = \min_K \Re x'\}$, τότε το K' είναι μη-κενό, συμπαγές, ξένο προς το $cl(co(E))$ και, σύμφωνα με το Λήμμα 4.7(3), ακραίο υποσύνολο του K. Από το μέρος (1) γνωρίζουμε ότι το K' έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο x_1. Από το Λήμμα 4.7(1) συνεπάγεται ότι το x_1 είναι ακραίο σημείο και του K.

Επομένως, το ακραίο σημείο x_1 του K ανήκει στο K', το οποίο είναι ξένο προς το E. Αυτό αποτελεί, φυσικά, αντίφαση.

(3) Αν το K είναι και κυρτό, τότε είναι φανερό ότι $cl(co(E)) \subseteq K$.

Πρόταση 4.19 *Έστω χώρος X με νόρμα. Τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_{X^*} του X^* είναι ίση με την ασθενώς* κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων της.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 4.28 ότι η B_{X^*} είναι ασθενώς* συμπαγής. Επειδή η $\sigma(X^*, X)$ είναι τοπικά κυρτή τοπολογία, το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.34.

Παράδειγμα: Το σύνολο των ακραίων σημείων της κλειστής μοναδιαίας μπάλας B_{l^1} του l^1 είναι το $\{\lambda e_j | j \in \mathbf{N}, |\lambda| = 1\}$.

Πράγματι, έστω οποιοδήποτε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$ με $\|x\|_1 \leq 1$. Αν $0 < \|x\|_1 < 1$, τότε παίρνουμε $y = \frac{x}{\|x\|_1}$, $z = -\frac{x}{\|x\|_1}$ και $\kappa = \frac{1+\|x\|_1}{2}$ και βλέπουμε εύκολα ότι $x = \kappa y + (1-\kappa) z$. Άρα το x δεν είναι ακραίο σημείο της B_{l^1}. Ομοίως, ούτε το 0 είναι ακραίο σημείο της B_{l^1}, αφού $0 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}(-e_1)$.

Θεωρούμε, τώρα, οποιοδήποτε x με $\|x\|_1 = 1$ το οποίο έχει τουλάχιστον δύο μη-μηδενικές συντεταγμένες: $x_n \neq 0$ και $x_m \neq 0$ με $m < n$. Τότε $0 < |x_n| < 1$ και $0 < |x_m| < 1$, και μπορούμε να βρούμε $\epsilon, \delta \in (0,1)$ ώστε $\epsilon |x_m| = \delta |x_n|$. Θέτουμε $y = (\ldots, (1+\epsilon)x_m, \ldots, (1-\delta)x_n, \ldots)$ και $z = (\ldots, (1-\epsilon)x_m, \ldots, (1+\delta)x_n, \ldots)$, όπου $y_j = z_j = x_j$ για κάθε $j \neq m, n$. Κατ΄ αρχήν, είναι προφανές ότι $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ και ότι $y \neq x \neq z$. Ακόμη, $\|y\|_1 = \|x\|_1 + \epsilon|x_m| - \delta|x_n| = \|x\|_1 = 1$ και $\|z\|_1 = \|x\|_1 - \epsilon|x_m| + \delta|x_n| = \|x\|_1 = 1$, οπότε το x δεν είναι ακραίο σημείο της B_{l^1}.

Τέλος, αν το x έχει μία μόνον μη-μηδενική συντεταγμένη, τότε υπάρχει $j \in \mathbf{N}$ και λ με $|\lambda| = 1$ ώστε $x = \lambda e_j$ και θα αποδείξουμε ότι το x είναι ακραίο σημείο της B_{l^1}. Αν $y, z \in B_{l^1}$, $0 < \kappa < 1$ και $\lambda e_j = \kappa y + (1-\kappa)z$, τότε $1 = |\lambda| = |\kappa y_j + (1-\kappa)z_j| \leq \kappa|y_j| + (1-\kappa)|z_j| \leq \kappa + (1-\kappa) = 1$. Συνεπάγεται ότι $|y_j| = |z_j| = 1$ και $y_j = z_j$. Επομένως, $y_n = z_n = 0$ για κάθε $n \neq j$, οπότε $y = z = \lambda e_j = x$.

Παράδειγμα: Η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_{c_0} του c_0 δεν έχει κανένα ακραίο σημείο.

Για να το αποδείξουμε θεωρούμε οποιοδήποτε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in B_{c_0}$ και, επειδή $x_n \to 0$, υπάρχει n ώστε $|x_n| < 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\lambda \neq 0$ ώστε $|\lambda| + |x_n| \leq 1$ και θέτουμε $y = (\ldots, x_n + \lambda, \ldots)$ και $z = (\ldots, x_n - \lambda, \ldots)$, όπου $y_j = z_j = x_j$ για κάθε $j \neq n$. Είναι φανερό ότι $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, ότι $y \neq x \neq z$ και ότι $y, z \in B_{c_0}$. Άρα το x δεν είναι ακραίο σημείο της B_{c_0}.

4.13 Ασκήσεις

1. Έστω χώρος X με νόρμα.

(1) Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι $Y^* \overset{iso}{=} X^*/Y^\perp$.
(Υπόδ.: Για κάθε $[x^*]_{Y^\perp}$ θεωρείστε τη συνάρτηση $T([x^*]_{Y^\perp}) : Y \to F$ με τύπο $T([x^*]_{Y^\perp})(y) = x^*(y)$ για κάθε $y \in Y$. Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι ο T είναι ισομετρία του $X^*/Y^\perp$ με τον Y^*.)

(2) Αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι $\big(X/Y\big)^* \overset{iso}{=} Y^\perp$.
(Υπόδ.: Για κάθε $x^* \in Y^\perp$ θεωρείστε τη συνάρτηση $S(x^*) : X/Y \to F$ με τύπο $S(x^*)([x]_Y) = x^*(x)$. Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι ο S είναι ισομετρία του $Y^\perp$ με τον $\big(X/Y\big)^*$.)

2. Έστω χώρος X με νόρμα και κλειστός υπόχωρος Y του X. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $\mathcal{P}_Y(x) = \{y_0 \in Y \mid \|x - y_0\| = d(x, Y)\}$, όπου $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$. Αν $x \in X \setminus Y$ και $y_0 \in Y$, αποδείξτε ότι $y_0 \in \mathcal{P}_Y(x)$ αν και μόνον αν υπάρχει $x^* \in Y^\perp$ με $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x - y_0) = \|x - y_0\|$.

3. Έστω χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $x^*(x) = \|x^*\|$ αν και μόνον αν κάθε κλειστό υπερεπίπεδο του X περιέχει στοιχείο ελάχιστης νόρμας.

4. Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνον αν ο X^* είναι αυτοπαθής.
(Υπόδ.: Θεωρείστε τις φυσιολογικές εμφυτεύσεις $J_0 : X \to X^{**}$ και $J_1 : X^* \to X^{***}$. Αν ο X είναι αυτοπαθής, πάρτε $x^{***} \in X^{***}$, θεωρείστε το $x^* = x^{***} \circ J_0$ και αποδείξτε ότι $x^{***} = J_1(x^*)$. Αντιστρόφως, έστω ότι ο X^* είναι αυτοπαθής, ενώ ο X δεν είναι. Αποδείξτε ότι ο $J_0(X)$ είναι γνήσιος *κλειστός* υπόχωρος του X^{**} και ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x^{***} \in X^{***}$ με $x^{***}(J_0(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Καταλήξτε σε άτοπο.)

5. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αποδείξτε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $x^*(x) = \|x^*\|$.

6. Έστω γραμμικός χώρος X, $\mathcal{L}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών του X και x' ένα γραμμικό συναρτησοειδές του X. Αποδείξτε ότι το x' είναι συνεχές στον X ως προς την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{L})$ αν και μόνον αν το x' ανήκει στη γραμμική θήκη της $\mathcal{L}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $\sigma(X, <\mathcal{L}>) = \sigma(X, \mathcal{L})$. (Υπόδ.: Δείτε τι σημαίνει η συνέχεια του x' στο 0 για $\epsilon = 1$ και εφαρμόστε το Λήμμα 4.3.)

7. Έστω γραμμικός χώρος X άπειρης διάστασης και $\mathcal{L}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών του X. Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{L})$ περιέχει έναν υπόχωρο άπειρης διάστασης.

8. Έστω χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία του X ταυτίζεται με την ισχυρή τοπολογία του αν και μόνον αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

9. Έστω χώρος X με νόρμα και ας είναι $\widehat{X}$ η πλήρωσή του. Αποδείξτε ότι $X^* = (\widehat{X})^*$, αλλά ότι οι τοπολογίες $\sigma(X^*, X)$ και $\sigma(X^*, \widehat{X})$ δεν ταυτίζονται.

10. Έστω χώρος X με νόρμα και $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\{y_n\}$ στον X κάθε όρος της οποίας είναι κυρτός συνδυασμός όρων της $\{x_n\}$ ώστε $y_n \to x$.

11. Έστω αυτοπαθής χώρος X με νόρμα και Z ένας γραμμικός υπόχωρος του X^*. Αποδείξτε ότι ο Z αποτελεί διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών του X αν και μόνον αν είναι πυκνός στον X^*.

12. Έστω χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνον αν κάθε κλειστός υπόχωρος του X^* είναι ασθενώς* κλειστός.
(Υπόδ.: Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε η ασθενής και η ασθενής* τοπολογία του X^* ταυτίζονται. Για το αντίστροφο, πάρτε μη-μηδενικό $x^{**} \in X^{**}$ και θεωρείστε το $\{x^* \in X^* | x^{**}(x^*) = 1\}$. Αποδείξτε ότι αυτό είναι ασθενώς* κλειστό στον X^* και πάρτε ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την $\sigma(X^*, X)$ η οποία να είναι ξένη προς το σύνολο αυτό. Εφαρμόστε το Λήμμα 4.3.)

Ορισμός: *Έστω τοπολογικός χώρος A και $B \subseteq A$. Το B ονομάζεται* ***σύνολο πρώτης κατηγορίας στον*** *A αν υπάρχουν $B_n \subseteq A$ με $B = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$ ώστε κάθε $cl(B_n)$ να έχει κενό εσωτερικό. Το B ονομάζεται* ***σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον*** *A αν δεν είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον A.*

13. Αποδείξτε ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον εαυτό του.

14. Έστω χώρος X με νόρμα.
(1) Έστω ότι το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X^*. Αν $K \subseteq X$ και $\sup_{x \in K} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x \in K} \|x\| < +\infty$.
(2) Έστω ότι το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X. Αν $K \subseteq X^*$ και $\sup_{x^* \in K} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x^* \in K} \|x^*\| < +\infty$.

15. (1) Έστω $1 \leq p < +\infty$ και $x = (x_1, x_2, \ldots) \in s$. Αν για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^q$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(Υπόδ.: Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρείστε το $l_n \in (l^p)^*$ με τύπο $l_n(y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ για κάθε $y \in l^p$ και υπολογείστε τη νόρμα του l_n.)
(2) Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots) \in s$. Αν για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^1$.

16. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και μ-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to F$.
(1) Αν $1 < p \leq +\infty$ και $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ για κάθε $g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, αποδείξτε ότι $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(2) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο και $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ για κάθε $g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, αποδείξτε ότι $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

17. Έστω χώρος Banach X και μία βάση Schauder $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ του X. Θέτουμε $K = \{\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \,|\, \text{η σειρά } \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j \text{ συγκλίνει στον } X\}$, καθώς και $\|\kappa\|_K = \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \kappa_j b_j \right\|$ για κάθε $\kappa \in K$.
(1) Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_K$ είναι νόρμα στον K και ότι ο K με τη νόρμα αυτή είναι χώρος Banach.
(2) Θέτουμε $T : K \to X$ με τύπο $T(\kappa) = \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j$ για κάθε $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \in K$. Αποδείξτε ότι ο T είναι τοπολογικός ισομορφισμός του K με τον X.
(3) Θέτουμε $L = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \,|\, \text{η σειρά } \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j \lambda_j \text{ συγκλίνει για κάθε } \kappa \in K\}$ και $\|\lambda\|_L = \sup_{\|T(\kappa)\| \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j \lambda_j \right|$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_L$ είναι νόρμα στον L και ότι $L \overset{iso}{=} X^*$.

Ορισμός: *Έστω χώρος X με νόρμα και υπόχωρος L του X^*. Λέμε ότι ο L* ***προσδιορίζει τη νόρμα του*** *X αν υπάρχει $c > 0$ ώστε $c\|x\| \leq \sup_{x^* \in L,\, \|x^*\| \leq 1} |x^*(x)|$ για κάθε $x \in X$.*

18. Έστω χώρος X με νόρμα και $\|\cdot\|$ υπόχωρος L του X^* ο οποίος προσδιορίζει τη νόρμα του X.
(1) Θέτουμε $\|x\|' = \sup_{x^* \in L,\, \|x^*\| \leq 1} |x^*(x)|$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.
(2) Αν $K \subseteq X$ και $\sup_{x \in K} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in L$, αποδείξτε ότι $\sup_{x \in K} \|x\| < +\infty$.

19. Έστω χώρος X με νόρμα.
(1) Έστω $cl(< L >) = X^*$. Αποδείξτε ότι, αν $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in L$ και $\sup_n \|x_n\| < +\infty$, τότε $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X.
(2) Έστω $cl(< L >) = X$. Αποδείξτε ότι, αν $x_n^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in L$ και $\sup_n \|x_n^*\| < +\infty$, τότε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ στον X^*.

20. Στον l^2 για κάθε m, n με $1 \leq m < n$ θεωρούμε το στοιχείο $e_{m,n} = e_m + m e_n$. Θέτουμε $A = \{e_{m,n} | 1 \leq m < n\}$. Αποδείξτε ότι το 0 ανήκει στην κλειστή θήκη του A ως προς την ασθενή τοπολογία, αλλά δεν υπάρχει ακολουθία στο A η οποία

συγκλίνει ασθενώς στο 0.

21. Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι η ασθενής* τοπολογία στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι μετρικοποιήσιμη.

22. Έστω χώρος X με νόρμα και ασθενώς* συμπαγές $K \subseteq X^*$.
(1) Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, αποδείξτε ότι το K είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγές.
(2) Αν ο X είναι αυτοπαθής, αποδείξτε ότι το K είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγές.

23. (1) Αν $1 < p \leq +\infty$, τότε $e_n \xrightarrow{w} 0$ στον l^p και στους c, c_0, ενώ η $\{e_n\}$ δεν έχει ασθενές όριο στον l^1.
(2) Αν το $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο, τότε $a_n \xrightarrow{w} 0$ στον X.

24. Έστω $1 < p < +\infty$. Αποδείξτε ότι $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ στον l^p αν και μόνον αν $\sup_n \left\|x^{(n)}\right\|_p < +\infty$ και $x_m^{(n)} \to x_m$ στο F για κάθε $m \in \mathbf{N}$.

25. (Schur) Αποδείξτε ότι $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ στον l^1 αν και μόνον αν $x^{(n)} \to x$ στον l^1.

26. Έστω διαχωρίσιμος χώρος Banach X.
(1) Αποδείξτε ότι ο X^* περιέχει αριθμήσιμο υποσύνολο το οποίο αποτελεί διαχωρίζουσα συλλογή συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών του X.
(2) Αν το $K \subseteq X$ είναι ασθενώς συμπαγές αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία στο K είναι μετρικοποιήσιμη.

27. Έστω χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος K και ισομετρική εμφύτευση $T : X \to C(K)$.
(Υπόδ.: Εφαρμόστε το θεώρημα του Alaoglou.)

28. Έστω χώρος Banach X και ασθενώς* συμπαγές $K \subseteq X^*$. Αποδείξτε ότι η ασθενώς* κλειστή κυρτή θήκη του K είναι ασθενώς* συμπαγής.

29. Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα και ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι ο X/Y είναι αυτοπαθής.

30. Έστω χώρος άπειρης διάστασης X με νόρμα. Αποδείξτε ότι η κλειστή θήκη του $\{x \in X | \, \|x\| = 1\}$ ως προς την ασθενή τοπολογία είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X.

31. Έστω $1 < p < +\infty$ και $x_n \xrightarrow{w} x$ στον l^p. Αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$ αν και μόνον αν $\|x_n\| \to \|x\|$.

Ορισμός: *Έστω χώρος X με νόρμα και ακολουθία $\{x_n\}$ στον X. Η $\{x_n\}$ ονομάζεται* ***ασθενώς συγκλίνουσα*** *αν το $\lim_n x^*(x_n)$ υπάρχει στο F για κάθε $x^* \in X^*$. Ο X ονομάζεται* ***ακολουθιακά ασθενώς πλήρης*** *αν κάθε ασθενώς* *συγκλίνουσα ακολουθία του X συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο στοιχείο του.*

*Η $\{x_n^*\}$ στον X^* ονομάζεται **ασθενώς* συγκλίνουσα** αν το $\lim_n x_n^*(x)$ υπάρχει στο F για κάθε $x \in X$. Ο X^* ονομάζεται **ακολουθιακά ασθενώς* πλήρης** αν κάθε ασθενώς* συγκλίνουσα ακολουθία του X^* συγκλίνει ασθενώς* σε κάποιο στοιχείο του.*

32. Έστω συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος A και $\{f_n\}$ στον $C(A)$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στο A σε μία $f : A \to F$ η οποία δεν είναι συνεχής στο A. Αν $\sup_n \|f_n\|_u < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον $C(A)$, αλλά ότι δε συγκλίνει ασθενώς σε κανένα στοιχείο του $C(A)$.

33. (1) Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα, τότε ο X είναι ακολουθιακά ασθενώς πλήρης.
(Υπόδ.: Έστω $\{x_n\}$ στον X με το $\lim_n x^*(x_n)$ να υπάρχει στο F για κάθε $x^* \in X^*$. Θέσατε $x^{**}(x^*) = \lim_n x^*(x_n)$ και αποδείξτε ότι $x^{**} \in X^{**}$.)
(2) Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X^* είναι ακολουθιακά ασθενώς* πλήρης.

34. (Vitali-Hahn-Saks) (1) Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και ακολουθία μιγαδικών (ή πραγματικών) μέτρων $\{\lambda_n\}$ στον $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$. Υποθέτουμε ότι κάθε λ_n είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και ότι το $\lim_n \lambda_n(A)$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε $\lambda(A) = \lim_n \lambda_n(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$. Αποδείξτε ότι το λ ανήκει στον $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$ και ότι είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.
(2) Έστω μετρήσιμος χώρος (Ω, Σ) και ακολουθία μιγαδικών (ή πραγματικών) μέτρων $\{\lambda_n\}$ στον $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$. Υποθέτουμε ότι το $\lim_n \lambda_n(A)$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε $\lambda(A) = \lim_n \lambda_n(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$. Αποδείξτε ότι το λ ανήκει στον $\mathcal{A}(\Omega, \Sigma)$.

35. Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και ακολουθία $\{f_n\}$ στον $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο στοιχείο του $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ αν και μόνον αν $\sup_n \|f_n\|_1 < +\infty$ και το $\lim_n \int_A f_n \, d\mu$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$.

Αποδείξτε ότι ο $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι ακολουθιακά ασθενώς πλήρης.

36. Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και $f_n \xrightarrow{w} f$ στον $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ αν και μόνον αν $f_n \to f$ κατά μέτρο σε κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) < +\infty$.

37. (*Ολοκλήρωμα Riemann συναρτήσεων με τιμές σε χώρο Banach.*) Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbf{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με την ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ με $\max_{1 \leq j \leq n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$ και κάθε επιλογή σημείων $\xi_1, \ldots, \xi_n$ με $t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j$ ισχύει $\left\| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) - x \right\| < \epsilon$.

Ορισμός: *Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Το $x \in X$ με την ιδιότητα της προηγούμενης άσκησης ονομάζεται **ολοκλήρωμα Riemann της** f και συμβολίζεται $\int_a^b f$.*

38. Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbf{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ f : [a, b] \to F$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ με τιμές στο F και, επομένως, ορίζεται στο πλαίσιο του απειροστικού λογισμού το $\int_a^b x^* \circ f$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b x^* \circ f = x^*\big(\int_a^b f\big)$.

39. Έστω χώρος Banach X, $a, b, c \in \mathbf{R}$ με $a < c < b$, $f, g : [a, b] \to X$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $\kappa \in F$. Αποδείξτε τις αναμενόμενες ιδιότητες: $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, $\int_a^b (\kappa f) = \kappa \int_a^b f$ και $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Επίσης, την $\big|\int_a^b f\big| \leq (b - a)\, \|f\|_u$.

Ορισμός: *(Ολόμορφες συναρτήσεις με τιμές σε χώρο Banach.) Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbf{C}$, ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbf{C}$ και $f : U \to X$.*
*(i) Η f ονομάζεται **ολόμορφη στο** U αν υπάρχει $g : U \to X$ ώστε*

$$\lim_{\mathbf{C} \ni h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = g(z)$$

για κάθε $z \in U$. Τότε η g ονομάζεται παράγωγος της f και συμβολίζεται f'.
*(ii) Η f ονομάζεται **ασθενώς ολόμορφη στο** U αν η $x^* \circ f : U \to \mathbf{C}$ είναι ολόμορφη στο U (με τη γνωστή έννοια) για κάθε $x^* \in X^*$.*

40. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbf{C}$, ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbf{C}$ και $f : U \to X$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο U αν και μόνον αν είναι ασθενώς ολόμορφη στο U και ότι τότε $(x^* \circ f)' = x^* \circ f'$ για κάθε $x^* \in X^*$.

41. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbf{C}$, ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbf{C}$, $\kappa \in \mathbf{C}$ και $f, g : U \to X$ και $h : U \to \mathbf{C}$ ολόμορφες στο U.
(1) Αποδείξτε ότι οι κf, $f + g$ και hg είναι ολόμορφες στο U.
(2) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο U και, επομένως, ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f \circ z\, z'$ για κάθε καμπύλη γ στο U με παραμετρικοποίηση $z : [a, b] \to U$, όπου η z' είναι συνεχής στο $[a, b]$.
(3) (*Θεώρημα του Cauchy.*) Αποδείξτε ότι $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ αν το U είναι απλά-συνεκτικό ή αν η γ είναι ομόλογη του μηδενός ως προς το U (δηλαδή, $ind(\gamma; w) = 0$ για κάθε $w \in \mathbf{C} \setminus U$).
(4) (*Τύπος του Cauchy.*) Αποδείξτε ότι $f(z_0) ind(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$ για κάθε $z_0 \in U$, αν το U είναι απλά-συνεκτικό ή αν η γ είναι ομόλογη του μηδενός ως προς το U.
(5) (*Ανάπτυγμα Taylor.*) Αποδείξτε ότι για κάθε $z_0 \in U$ υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots \in X$ ώστε να ισχύει $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ για κάθε $z \in \Delta(z_0; R)$, όπου $R = dist(z_0, \mathbf{C} \setminus U)$. Αποδείξτε ότι $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0; r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz$, με $C(z_0; r)$ να είναι η περιφέρεια κέντρου z_0 και ακτίνας $r < R$ με την παραμετρικοποίηση $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(6) (*Αρχή Μεγίστου.*) Αν υπάρχει $z_0 \in U$ ώστε $\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|$ για κάθε $z \in U$, τότε η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του U η οποία περιέχει το z_0.
(7) (*Θεώρημα του Liouville.*) Αν $U = \mathbf{C}$ και $\sup_{z \in \mathbf{C}} \|f(z)\| < +\infty$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbf{C}$.

Κεφάλαιο 5

Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

5.1 Νόρμες γραμμικών τελεστών

Ορισμός 5.1 *Άν X, Y είναι δύο χώροι με νόρμα επί του F και $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, ο T ονομάζεται* ***φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον X στον Y*** *αν υπάρχει $C \geq 0$ ώστε $\|Tx\| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$.*

Πιο σωστά, θα έπρεπε να γράφουμε $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ για να δηλώνεται ότι οι νόρμες στις δύο πλευρές της ανισότητας είναι νόρμες διαφορετικών χώρων, αλλά τις περισσότερες φορές το αγνοούμε χάριν απλότητας.

Πρόταση 5.1 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(1) Ο T είναι συνεχής συνάρτηση στον X.
(2) Ο T είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in X$.
(3) Ο T είναι φραγμένος.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι το (1) συνεπάγεται το (2).

Αν ο T δεν είναι φραγμένος, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ με $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. Τότε $x_n \neq 0$ και, θέτοντας $y_n = \frac{1}{n\|x_n\|}x_n$, έχουμε $y_n \to 0$ αλλά $\|Ty_n\| > 1$, οπότε ο T δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο 0.

Έστω ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε $\|Tx\| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αν $x_n \to x$ στον X, τότε $\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \to 0$ και, επομένως, ο T είναι συνεχής συνάρτηση στον X.

Ορισμός 5.2 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα. Το σύνολο όλων των συνεχών ή, ισοδύναμα, φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y συμβολίζεται $L(X, Y)$.*

Αν $Y = X$, τότε συμβολίζουμε $L(X)$ αντί για $L(X, X)$.

Είναι φανερό ότι ο χώρος $L(X,Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου $\mathcal{L}(X,Y)$ όλων των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y.

Αν $Y = F$, τότε, προφανώς, $L(X,F) = X^*$.

Πρόταση 5.2 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε υπάρχει το $\min\{C \geq 0 \,|\, \|Tx\| \leq C\,\|x\| \text{ για κάθε } x \in X\}$.*

Απόδειξη: Έστω $C_0 = \inf\{C \geq 0 \,|\, \|Tx\| \leq C\,\|x\| \text{ για κάθε } x \in X\}$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $C \geq 0$ με $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και, κρατώντας σταθερό το τυχόν $x \in X$, παίρνουμε το infimum της δεξιάς πλευράς ως προς το C. Βρίσκουμε $\|Tx\| \leq C_0\,\|x\|$ για το τυχόν $x \in X$.

Ορισμός 5.3 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Ορίζουμε τη **νόρμα του** T με τον τύπο*

$$\|T\| = \min\{C \geq 0 \,|\, \|Tx\| \leq C\,\|x\| \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Άρα

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

για κάθε $x \in X$ και κάθε $T \in L(X,Y)$ και, αν για κάποιο C ισχύει $\|Tx\| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$, τότε $\|T\| \leq C$.

Πρόταση 5.3 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Τότε*

$$\|T\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $C = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$, οπότε $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$ για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$. Επειδή αυτό ισχύει και για $x = 0$, ο ορισμός της νόρμας του T δίνει την πρώτη από τις ανισο/ισότητες $\|T\| \leq \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \left\| T(\frac{x}{\|x\|}) \right\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \|Tx\| \leq \|T\|$.

Για παράδειγμα, αν ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός, όπως ο ταυτοτικός τελεστής I, τότε $\|T\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$.

Πρόταση 5.4 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : L(X,Y) \to \mathbf{R}_0^+$ που ορίσθηκε στον τελευταίο ορισμό είναι νόρμα στον $L(X,Y)$ και, αν ο Y είναι χώρος Banach, τότε και ο $L(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Αν $T \in L(X,Y)$ και $\|T\| = 0$, τότε $Tx = 0$ για κάθε $x \in X$, οπότε ο T είναι ο μηδενικός τελεστής.

Για κάθε $x \in X$ και κάθε $T, S \in L(X,Y)$ έχουμε $\|(T+S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|\,\|x\| + \|S\|\,\|x\| = (\|T\| + \|S\|)\,\|x\|$. Επομένως $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

Για κάθε $T \in L(X,Y)$ και $\kappa \in F$ έχουμε $\|\kappa T\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \|(\kappa T)x\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |\kappa|\,\|Tx\| = |\kappa| \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \|Tx\| = |\kappa|\,\|T\|$.

Άρα η $\|\cdot\| : L(X,Y) \to \mathbf{R}_0^+$ είναι νόρμα στον $L(X,Y)$.

Έστω ότι ο Y είναι πλήρης και θεωρούμε $\{T_n\}$ στον $L(X,Y)$ με $\|T_n - T_m\| \to 0$. Για τυχόν $x \in X$ έχουμε $\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \to 0$, οπότε η $\{T_n x\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y. Άρα υπάρχει το όριό της στον Y. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με τύπο $Tx = \lim T_n x$ για κάθε $x \in X$. Επειδή κάθε T_n είναι γραμμικός, ισχύει για κάθε $x, y \in X$ και $\kappa \in F$ ότι $T(x+y) = \lim T_n(x+y) = \lim T_n x + \lim T_n y = Tx + Ty$ και $T(\kappa x) = \lim T_n(\kappa x) = \kappa \lim T_n x = \kappa T x$. Άρα ο T είναι γραμμικός τελεστής από τον X στον Y.

Επειδή υπάρχει N ώστε $\|T_n - T_m\| \leq 1$ για κάθε $n, m \geq N$, συνεπάγεται ότι $\|T_n x - T_N x\| \leq \|T_n - T_N\| \, \|x\| \leq \|x\|$ για κάθε $n \geq N$ και $x \in X$ και, παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$, βρίσκουμε $\|Tx - T_N x\| \leq \|x\|$. Άρα $\|Tx\| \leq \|T_N x\| + \|x\| \leq (\|T_N\| + 1) \, \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επομένως ο T είναι φραγμένος και $T \in L(X,Y)$.

Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq N$. Τότε $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \epsilon \, \|x\|$ για κάθε $n, m \geq N$ και κάθε $x \in X$. Παίρνοντας όριο όταν $m \to +\infty$ βρίσκουμε $\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon \, \|x\|$ για κάθε $n \geq N$ και κάθε $x \in X$, οπότε $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Άρα $T_n \to T$ στον $L(X,Y)$.

Πρόταση 5.5 *Έστω χώροι X, Y, Z με νόρμα και $T \in L(X,Y)$ και $S \in L(Y,Z)$. Τότε $S \circ T \in L(X,Z)$ και $\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\|$.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\|(S \circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\| \, \|Tx\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|$. Άρα ο $S \circ T$ είναι φραγμένος και $\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό ST αντί του $S \circ T$.

Πρόταση 5.6 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Τότε ο $N(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη: Ο $N(T) = T^{-1}(\{0\})$ είναι αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου.

Η επόμενη πρόταση χρησιμεύει όταν θέλουμε να μετατρέψουμε έναν τελεστή σε 1-1 τελεστή.

Πρόταση 5.7 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Ορίζουμε $T_1 : X/N(T) \to Y$ με τύπο $T_1 \xi = Tx$ για οποιοδήποτε $x \in X$ με $[x]_{N(T)} = \xi \in X/N(T)$. Ο T_1 είναι καλώς ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής. Επίσης, ο T_1 είναι 1-1 και ισχύει $\|T_1\| = \|T\|$ και $R(T_1) = R(T)$.*

Απόδειξη: Αν $[x]_{N(T)} = [z]_{N(T)}$, τότε $x - z \in N(T)$, οπότε $Tx - Tz = T(x-z) = 0$. Άρα ο T_1 είναι καλώς ορισμένος. Έχουμε $T_1([x]_{N(T)} + [z]_{N(T)}) = T_1([x+z]_{N(T)}) = T(x+z) = Tx + Tz = T_1([x]_{N(T)}) + T_1([z]_{N(T)})$ και $T_1(\kappa [x]_{N(T)}) = T_1([\kappa x]_{N(T)}) = T(\kappa x) = \kappa T x = \kappa T_1([x]_{N(T)})$. Άρα ο T_1 είναι γραμμικός. Επίσης, είναι προφανές ότι $R(T_1) = R(T)$.

Τώρα, για κάθε x με $[x]_{N(T)} = \xi$ έχουμε $\|T_1 \xi\| = \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$. Παίρνοντας infimum ως προς όλα τα x με $[x]_{N(T)} = \xi$, συμπεραίνουμε ότι $\|T_1 \xi\| \leq \|T\| \, \|\xi\|$ και, επομένως, ο T_1 είναι φραγμένος και $\|T_1 \xi\| \leq \|T\|$.

Αν πάρουμε τυχόν $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ ώστε $\|Tx\| > \|T\| - \epsilon$. Παίρνουμε $\xi = [x]_{N(T)}$ και έχουμε $\|\xi\| \leq \|x\| \leq 1$ και, επομένως, $\|T_1\| \geq \|T_1\xi\| = \|Tx\| > \|T\| - \epsilon$. Επειδή το ϵ είναι αυθαίρετο, συνεπάγεται $\|T_1\| \geq \|T\|$.

Άρα $\|T_1\| = \|T\|$.

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί επιτρέπει να επεκτείνουμε ένα φραγμένο τελεστή στην πλήρωση του πεδίου ορισμού του.

Πρόταση 5.8 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X, Y)$. Αν $\widehat{X}, \widehat{Y}$ είναι πληρώσεις των X, Y, τότε υπάρχει μοναδική επέκταση $\widehat{T} \in L(\widehat{X}, \widehat{Y})$ του T και για την επέκταση ισχύει $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $T : X \to \widehat{Y}$ και $\|Tx - Tz\| \leq \|T\|\,\|x - z\|$ για κάθε $x, z \in X$. Από το Θεώρημα 1.3 συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδική επέκταση $\widehat{T} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ του T ώστε $\|\widehat{T}x - \widehat{T}z\| \leq \|T\|\,\|x - z\|$ για κάθε $x, z \in \widehat{X}$.

Απο την ανισότητα αυτή συνεπάγεται ότι η $\widehat{T}$ είναι συνεχής στον $\widehat{X}$.

Αν $x, z \in \widehat{X}$, υπάρχουν $\{x_n\}, \{z_n\}$ στον X ώστε $x_n \to x$ και $z_n \to z$. Επειδή ο T είναι γραμμικός, έχουμε $\widehat{T}x + \widehat{T}z = \lim \widehat{T}x_n + \lim \widehat{T}z_n = \lim Tx_n + \lim Tz_n = \lim T(x_n + z_n) = \lim \widehat{T}(x_n + z_n) = \widehat{T}(x + z)$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\widehat{T}(\kappa x) = \kappa \widehat{T}x$ για κάθε $x \in \widehat{X}$ και $\kappa \in F$ και, επομένως, ο $\widehat{T}$ είναι γραμμικός τελεστής.

Από την ανισότητα που αποδείξαμε συνεπάγεται, με $z = 0$, ότι $\|\widehat{T}x\| \leq \|T\|\,\|x\|$ για κάθε $x \in \widehat{X}$, οπότε $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$.

Επειδή ο $\widehat{T}$ είναι επέκταση του T, έχουμε $\|\widehat{T}\| = \sup_{x \in \widehat{X}, \|x\| \leq 1} \|\widehat{T}x\| \geq \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|\widehat{T}x\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$.

Άρα $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

5.2 Η άλγεβρα $L(X)$.

Ορισμός 5.4 *Ο γραμμικός χώρος X επί του F ονομάζεται* ***άλγεβρα επί του*** *F αν, εκτός από την (εσωτερική) πράξη της πρόσθεσης και την (εξωτερική) πράξη του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του F, έχει και μία (εσωτερική) πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot$ η οποία σε κάθε $(x, y) \in X \times X$ αντιστοιχίζει το* ***γινόμενο*** *$xy \in X$ ώστε*
(ix) $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in X$
(x) $x(y + z) = xy + xz$ και $(x + y)z = xz + yz$ για κάθε $x, y, z \in X$
(xi) $(\kappa x)y = x(\kappa y) = \kappa(xy)$ για κάθε $\kappa \in F$ και κάθε $x, y \in X$.

Αν υπάρχει στοιχείο $e \in X \setminus \{0\}$ ώστε
(xii) $ex = xe = x$ για κάθε $x \in X$
τότε το e ονομάζεται ***μοναδιαίο στοιχείο*** *της άλγεβρας X και η X ονομάζεται* ***άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο****.*

Αν ισχύει
(xiii) $xy = yx$ για κάθε $x, y \in X$,
τότε η X ονομάζεται ***αντιμεταθετική άλγεβρα****.*

Αν η άλγεβρα X έχει μοναδιαίο στοιχείο και για κάποιο $x \in X$ με $x \neq 0$ υπάρχει $x^{-1} \in X$ ώστε $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, τότε το x ονομάζεται ***αντιστρέψιμο*** *και το x^{-1} ονομάζεται* ***αντίστροφο του*** *x.*

Πρόταση 5.9 *Έστω άλγεβρα X επί του F.*
(1) $x0 = 0x = 0$ για κάθε $x \in X$, όπου 0 είναι το μηδενικό στοιχείο της X,
(2) Αν υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό.
(3) Αν υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο και κάποιο $x \in X$ έχει αντίστροφο, τότε αυτό είναι μοναδικό.
(4) Αν υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο και τα $x, y \in X$ είναι αντιστρέψιμα, τότε το xy είναι αντιστρέψιμο και $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 5.5 *Έστω άλγεβρα X. Αν η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον γραμμικό χώρο X και ισχύει*
(iv) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$
τότε η X ονομάζεται ***άλγεβρα με νόρμα****.*

Αν, επιπλέον, η X είναι πλήρης, τότε ονομάζεται ***άλγεβρα Banach.***

Αν η X έχει μοναδιαίο στοιχείο και
(v) $\|e\| = 1$
τότε η X ονομάζεται ***άλγεβρα με νόρμα με μοναδιαίο στοιχείο****.*

Πρόταση 5.10 *Έστω χώρος X με νόρμα. Τότε ο $L(X)$, εκτός από τη δομή γραμμικού χώρου, έχει και τη δομή άλγεβρας με μοναδιαίο στοιχείο. Αν ο X είναι χώρος Banach, τότε η $L(X)$ είναι άλγεβρα Banach με μοναδιαίο στοιχείο.*

Απόδειξη: Ως πράξη πολλαπλασιασμού ανάμεσα στα στοιχεία του $L(X)$ θεωρούμε τη σύνθεση $\circ : L(X) \times L(X) \to L(X)$ και ως μοναδιαίο στοιχείο τον ταυτοτικό τελεστή $I : X \to X$.

Οι ιδιότητες $(TS)R = T(SR)$, $T(S+R) = TS+TR$, $(T+S)R = TR+SR$, $(\kappa T)S = T(\kappa S) = \kappa(TS)$, $IT = TI = T$, $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$ και $\|I\| = 1$ χαρακτηρίζουν μία άλγεβρα με νόρμα και η απόδειξή τους είναι προφανής.

Αν ο $T \in L(X)$ είναι αντιστρέψιμος και ο $T^{-1} : X \to X$ είναι φραγμένος, τότε ο $T^{-1} \in L(X)$ είναι το αντίστροφο στοιχείο του T στην άλγεβρα $L(X)$: $T^{-1}T = TT^{-1} = I$.

Θα αποδείξουμε λίγο αργότερα ότι, αν ο X είναι χώρος Banach, τότε για κάθε αντιστρέψιμο $T \in L(X)$ ο T^{-1} είναι, αυτομάτως, φραγμένος και, επομένως ο T είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας Banach $L(X)$.

Στην άλγεβρα $L(X)$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό T^k αντί για $T \circ \cdots \circ T$ (k φορές) όταν $k \in \mathbf{N}$. Επίσης, γράφουμε $T^0 = I$ και, αν ο T είναι αντιστρέψιμος και $T^{-1} \in L(X)$, θέτουμε $T^{-k} = (T^{-1})^k$ όταν $k \in \mathbf{N}$.

5.3 Ο δυικός τελεστής

Πρόταση 5.11 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X, Y)$. Για κάθε $y^* \in Y^*$ ορίζουμε $T'y^* : X \to F$ με τύπο $T'y^*(x) = y^*(Tx)$ για κάθε $x \in X$. Τότε*

$T'y^* \in X^*$ και η οριζόμενη συνάρτηση $T' : Y^* \to X^*$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T'\| = \|T\|$.

Απόδειξη: Επειδή $T \in L(X,Y)$ και $y^* \in L(Y,F)$, συνεπάγεται ότι $T'y^* = y^* \circ T \in L(X,F) = X^*$ και $\|T'y^*\| \leq \|y^*\|\|T\|$.

Ισχύει $T'y_1^* + T'y_2^* = y_1^* \circ T + y_2^* \circ T = (y_1^* + y_2^*) \circ T = T'(y_1^* + y_2^*)$ και $T'(\kappa y^*) = (\kappa y^*) \circ T = \kappa(y^* \circ T) = \kappa T'y^*$. Άρα ο $T' : Y^* \to X^*$ είναι γραμμικός τελεστής και από την $\|T'y^*\| \leq \|y^*\|\|T\|$ συνεπάγεται ότι $T' \in L(Y^*, X^*)$ και $\|T'\| \leq \|T\|$.

Παίρνουμε τυχόν $x \in X$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.11, υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $\|y^*\| \leq 1$ ώστε $\|Tx\| = |y^*(Tx)|$. Τότε $\|Tx\| = |T'y^*(x)| \leq \|T'y^*\|\|x\| \leq \|T'\|\|x\|$. Συνεπάγεται ότι $\|T\| \leq \|T'\|$ και, επομένως, $\|T'\| = \|T\|$.

Ορισμός 5.6 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Ο τελεστής $T' \in L(Y^*, X^*)$ που ορίσθηκε στην προηγούμενη πρόταση ονομάζεται **δυικός τελεστής του** T.*

Πρόταση 5.12 *(1) Αν $T, S \in L(X,Y)$ και $\kappa \in F$, τότε $(T+S)' = T' + S'$ και $(\kappa T)' = \kappa T'$.*
(2) Αν $T \in L(X,Y)$ και $S \in L(Y,Z)$, τότε $(ST)' = T'S'$.
(3) $I' = I$ και $0' = 0$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής και 0 είναι ο μηδενικός τελεστής.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 5.13 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Τότε*
(1) $N(T') = R(T)^{\perp}$,
(2) $N(T) = {}^{\perp}R(T')$,
(3) $cl(R(T')) \subseteq N(T)^{\perp}$,
(4) $cl(R(T)) = {}^{\perp}N(T')$.

Απόδειξη: (1) $y^* \in N(T')$ αν και μόνον αν $T'y^* = 0$ αν και μόνον αν $T'y^*(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ αν και μόνον αν $y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$ αν και μόνον αν $y^* \in R(T)^{\perp}$.
(2) $x \in N(T)$ αν και μόνον αν $Tx = 0$ αν (από Θεώρημα 4.11) και μόνον αν $y^*(Tx) = 0$ για κάθε $y^* \in Y^*$ αν και μόνον αν $T'y^*(x) = 0$ για κάθε $y^* \in Y^*$ αν και μόνον αν $x \in {}^{\perp}R(T')$.
(3) Αν $y^* \in Y^*$, τότε για κάθε $x \in N(T)$ έχουμε $T'y^*(x) = y^*(Tx) = y^*(0) = 0$. Άρα $T'y^* \in N(T)^{\perp}$ και, επομένως, $R(T') \subseteq N(T)^{\perp}$. Επειδή ο $N(T)^{\perp}$ είναι κλειστός, συνεπάγεται ότι $cl(R(T')) \subseteq N(T)^{\perp}$.
(4) Αν $x \in X$, τότε για κάθε $y^* \in N(T')$ έχουμε $y^*(Tx) = T'y^*(x) = 0(x) = 0$. Άρα $Tx \in {}^{\perp}N(T')$ και, επομένως, $R(T) \subseteq {}^{\perp}N(T')$. Επειδή ο ${}^{\perp}N(T')$ είναι κλειστός, συνεπάγεται ότι $cl(R(T)) \subseteq {}^{\perp}N(T')$. Αντιστρόφως, έστω ότι $y \notin cl(R(T))$. Από το Θεώρημα 4.12 συνεπάγεται ότι υπάρχει $y^* \in Y^*$ ώστε $y^*(y) \neq 0$ και $y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$. Τότε $T'y^*(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, οπότε $T'y^* = 0$. Δηλαδή, $y^* \in N(T')$ και $y^*(y) \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $y \notin {}^{\perp}N(T')$.

Από τα (1) και (4) της τελευταίας πρότασης συνεπάγεται ότι `ο` T' `είναι 1-1 αν και μόνον αν ο` $R(T)$ `είναι πυκνός στον` Y, ενώ από τα (2) και (3) συνεπάγεται ότι `ο` T `είναι 1-1 αν ο` $R(T')$ `είναι πυκνός στον` X^*.

5.4 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Έστω $n = \dim(X) < +\infty$ και $m = \dim(Y) < +\infty$ και έστω οποιαδήποτε βάση $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ του X και οποιαδήποτε βάση $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ του Y.

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι σε κάθε γραμμικό τελεστή $T : X \to Y$ αντιστοιχεί ο $m \times n$ πίνακάς του $[T]_{BC} = [a_{ij}]$, όπου οι αριθμοί a_{ij} ορίζονται μονοσήμαντα από τις σχέσεις $T(b_j) = a_{1j}c_1 + \cdots + a_{mj}c_m$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Αντιστρόφως, κάθε $m \times n$ πίνακας $[a_{ij}]$ καθορίζει μονοσήμαντα έναν γραμμικό τελεστή $T : X \to Y$ ώστε $[T]_{BC} = [a_{ij}]$. Πράγματι, από τους αριθμούς a_{ij} καθορίζονται τα $T(b_j) = a_{1j}c_1 + \cdots + a_{mj}c_m \in Y$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και από αυτά καθορίζεται ο T με τον τύπο $T(x) = T(\kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n) = \kappa_1 T(b_1) + \cdots + \kappa_n T(b_n)$.

Άρα ο $\mathcal{L}(X, Y)$ βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των $m \times n$ πινάκων μέσω της απεικόνισης $T \mapsto [T]_{BC}$.

Αν σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχίσουμε τον $n \times 1$ πίνακα (διάνυσμα του F^n) $[x]_B = [\kappa_j]$, όπου τα κ_j ορίζονται μονοσήμαντα από την $x = \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n$, και σε κάθε $y \in Y$ αντιστοιχίσουμε τον $m \times 1$ πίνακα (διάνυσμα του F^m) $[y]_C = [\lambda_i]$, όπου τα λ_i ορίζονται μονοσήμαντα από την $y = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_m c_m$, τότε η σχέση

$$y = Tx$$

ισοδυναμεί με την

$$[y]_C = [T]_{BC}[x]_B,$$

όπου το γινόμενο είναι το γνωστό γινόμενο πινάκων. Πράγματι, η $y = Tx$ γράφεται $\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_m c_m = T(\kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n)$ ή, ισοδύναμα, $\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_m c_m = \kappa_1 T b_1 + \cdots + \kappa_n T b_n$ ή, ισοδύναμα, $\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_m c_m = \kappa_1(a_{11}c_1 + \cdots + a_{m1}c_m) + \cdots + \kappa_n(a_{1n}c_1 + \cdots + a_{mn}c_m)$ ή, ισοδύναμα, $\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_m c_m = (a_{11}\kappa_1 + \cdots + a_{1n}\kappa_n)c_1 + \cdots + (a_{m1}\kappa_1 + \cdots + a_{mn}\kappa_n)c_m$ ή, ισοδύναμα, $\lambda_i = a_{i1}\kappa_1 + \cdots + a_{in}\kappa_n$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ ή, ισοδύναμα, $[y]_C = [T]_{BC}[x]_B$.

Με παρόμοιους υπολογισμούς ρουτίνας είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε $\kappa \in F$ και κάθε δύο γραμμικούς $T, S : X \to Y$ ισχύει

$$[\kappa T]_{BC} = \kappa [T]_{BC} \qquad \text{και} \qquad [T + S]_{BC} = [T]_{BC} + [S]_{BC}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η απεικόνιση $T \mapsto [T]_{BC}$ είναι ισομορφισμός του $\mathcal{L}(X, Y)$ με το σύνολο των $m \times n$ πινάκων.

Αν $l = \dim(Z) < +\infty$ και θεωρήσουμε βάση $D = \{d_1, \ldots, d_l\}$ του Z, τότε για κάθε δύο γραμμικούς $T : X \to Y$ και $S : Y \to Z$ ισχύει

$$[ST]_{BD} = [S]_{CD}[T]_{BC}.$$

Είναι προφανές ότι, αν $I : X \to X$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής, τότε ο $[I]_{BB} = [\delta_{ij}]$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας, όπου $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ αν

$i \neq j$. Επίσης, αν $0 : X \to Y$ είναι ο μηδενικός τελεστής, τότε ο $[0]_{BC}$ είναι ο μηδενικός πίνακας.

Τέλος, στην περίπτωση που $m = n$, ο γραμμικός $T : X \to Y$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο $[T]_{BC}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και τότε

$$([T]_{BC})^{-1} = [T^{-1}]_{CB}.$$

Αυτό το τελευταίο παρέχει και έναν υπολογιστικό τρόπο προσδιορισμού του αν ένας γραμμικός $T : X \to Y$ είναι αντιστρέψιμος: αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $\det([T]_{BC}) \neq 0$.

Έστω $B^* = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ είναι η δυική βάση της B για τον X^* και $C^* = \{c_1^*, \ldots, c_n^*\}$ είναι η δυική βάση της C για τον Y^*. Τότε η σχέση ανάμεσα στους πίνακες του $T : X \to Y$ και του δυικού τελεστή $T' : Y^* \to X^*$ είναι η

$$[T']_{C^*B^*} = ([T]_{BC})',$$

όπου $[a_{ij}]' = [a_{ji}]$ είναι ο ανάστροφος του $[a_{ij}]$. Πράγματι, αυτό ισοδυναμεί με $T'(c_i^*) = a_{i1}b_1^* + \cdots + a_{in}b_n^*$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ το οποίο ισοδυναμεί με $T'(c_i^*)(b_j) = (a_{i1}b_1^* + \cdots + a_{in}b_n^*)(b_j)$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$ το οποίο ισοδυναμεί με $c_i^*(Tb_j) = a_{ij}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$ το οποίο ισοδυναμεί με $c_i^*(a_{1j}c_1 + \cdots + a_{mj}c_m) = a_{ij}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$ το οποίο είναι αληθές.

Θα δούμε, τώρα, ότι κάθε γραμμικός $T : X \to Y$ είναι φραγμένος. Επειδή όλες οι νόρμες σε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ανά δύο ισοδύναμες, αρκεί να θεωρήσουμε τις ∞-νόρμες στους X, Y. Αυτό θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε ακριβώς την αντίστοιχη νόρμα

$$\|T\|_{\infty\infty} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

του T.

Αν $[T] = [a_{ij}]$, τότε για κάθε $x = \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n \in X$ έχουμε, σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς, $y = Tx = (a_{11}\kappa_1 + \cdots + a_{1n}\kappa_n)c_1 + \cdots + (a_{m1}\kappa_1 + \cdots + a_{mn}\kappa_n)c_m$, οπότε $\|Tx\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |a_{i1}\kappa_1 + \cdots + a_{in}\kappa_n|$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ έχουμε $|a_{i1}\kappa_1 + \cdots + a_{in}\kappa_n| \leq (|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|) \max_{1 \leq j \leq n} |\kappa_j| = (|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|)\|x\|_\infty$. Άρα $\|Tx\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq m}(|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|)\|x\|_\infty$, οπότε $\|T\|_{\infty\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq m}(|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|)$.

Επιλέγουμε, τώρα, i_0 ώστε $|a_{i_0 1}| + \cdots + |a_{i_0 n}| = \max_{1 \leq i \leq m}(|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|)$ και κατόπιν επιλέγουμε $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ ώστε $|\kappa_j| = 1$ και $a_{i_0 j}\kappa_j = |a_{i_0 j}|$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Τότε $|a_{i_0 1}\kappa_1 + \cdots + a_{i_0 n}\kappa_n| = |a_{i_0 1}| + \cdots + |a_{i_0 n}|$, οπότε, αν θέσουμε $x = \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n$, έχουμε ότι $\|T\|_{\infty\infty} \geq \|Tx\|_\infty \geq |a_{i_0 1}\kappa_1 + \cdots + a_{i_0 n}\kappa_n| = |a_{i_0 1}| + \cdots + |a_{i_0 n}| = \max_{1 \leq i \leq m}(|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|)$.

Άρα

$$\|T\|_{\infty\infty} = \max_{1 \leq i \leq m}(|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|).$$

Φυσικά, για κάθε p, q με $1 \leq p, q \leq +\infty$, ορίζονται και οι νόρμες

$$\|T\|_{pq} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_q}{\|x\|_p}$$

αλλά, όπως επισημάνθηκε, λόγω ισοδυναμίας των νορμών, υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε $c\|T\|_{\infty\infty} \le \|T\|_{pq} \le C\|T\|_{\infty\infty}$. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι οι c, C μπορούν να επιλεγούν ώστε να εξαρτώνται μόνον από τις παραμέτρους p, q, m, n.

5.5 Αρχή ομοιόμορφου φράγματος

Θεώρημα 5.1 *Έστω χώρος Banach X, χώρος Y με νόρμα και συλλογή $\mathcal{F} \subseteq L(X,Y)$. Αν ισχύει $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty$ για κάθε $x \in X$, τότε $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$.*

Απόδειξη: Από την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_0 \in X$, $R > 0$ και $M \ge 0$ ώστε $\|Tx\| \le M$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$ και $x \in B(x_0; R)$.

Για κάθε $x \in B(0; R)$ έχουμε ότι $\|Tx\| \le \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \le 2M$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$. Άρα για κάθε $x \ne 0$ και $t > 1$ ισχύει $\|T(\frac{R}{t\|x\|}x)\| \le 2M$ και, επομένως, $\|Tx\| \le \frac{2Mt}{R}\|x\|$ για κάθε $T \in \mathcal{F}$. Άρα $\|Tx\| \le \frac{2M}{R}\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $T \in \mathcal{F}$.

Συμπεραίνουμε ότι $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| \le \frac{2M}{R}$.

Θεώρημα 5.2 *Έστω χώρος Banach X, χώρος Y με νόρμα και συλλογή $\mathcal{F} \subseteq L(X,Y)$. Αν ισχύει $\sup_{T\in\mathcal{F}} |y^*(Tx)| < +\infty$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $y^* \in Y^*$, τότε $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.21 συνεπάγεται ότι $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty$ για κάθε $x \in X$ και το προηγούμενο θεώρημα δίνει το επιθυμητό συμπέρασμα.

5.6 Σύγκλιση στον $L(X,Y)$.

Ορισμός 5.7 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα, ακολουθία $\{T_n\}$ στον $L(X,Y)$ και $T \in L(X,Y)$.*
(i) Λέμε ότι η $\{T_n\}$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα στον*** *T ή, απλώς, ότι* ***συγκλίνει στον*** *T αν $\|T_n - T\| \to 0$. Συμβολίζουμε: $T_n \to T$ ή $T = \lim T_n$.*
(ii) Λέμε ότι η $\{T_n\}$ ***συγκλίνει ισχυρά στον*** *T αν $T_n x \to Tx$ (στον Y) για κάθε $x \in X$. Συμβολίζουμε: $T_n \xrightarrow{s} T$ ή $T = s - \lim T_n$.*
(iii) Λέμε ότι η $\{T_n\}$ ***συγκλίνει ασθενώς στον*** *T αν $y^*(T_n x) \to y^*(Tx)$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $y^* \in Y^*$. Συμβολίζουμε: $T_n \xrightarrow{w} T$ ή $T = w - \lim T_n$.*

Είναι φανερό ότι η ασθενής σύγκλιση της $\{T_n\}$ στον T είναι ταυτόσημη με το ότι $T_n x \xrightarrow{w} Tx$ στον Y για κάθε $x \in X$.

Ο όρος *ομοιόμορφη σύγκλιση* δικαιολογείται από την ισότητα $\|T_n - T\| = \sup_{x\in X, \|x\|\le 1} \|(T_n - T)x\| = \sup_{x\in B_X} \|(T_n - T)x\|$.

Είναι προφανές ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την ισχυρή σύγκλιση και αυτή συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση στον $L(X,Y)$.

Πρόταση 5.14 *Έστω χώροι X, Y, Z με νόρμα, $\{T_n\}$ και T στον $L(X,Y)$ και $\{S_n\}$ και S στον $L(Y,Z)$. Αν $T_n \to T$ και $S_n \to S$, τότε $S_n T_n \to ST$.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 5.15 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα, ακολουθία $\{T_n\}$ στον $L(X,Y)$ και $T \in L(X,Y)$. Αν $T_n \to T$, τότε $T_n' \to T'$.*

Απόδειξη: $\|T_n' - T'\| = \|(T_n - T)'\| = \|T_n - T\| \to 0$.

Θεώρημα 5.3 *Έστω χώρος Banach X, χώρος Y με νόρμα, $\{T_n\}$, T στον $L(X,Y)$. Αν $T = s-\lim T_n$ ή $T = w-\lim T_n$, τότε $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ και $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$.*

Απόδειξη: Το ότι $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 5.2. Αν $T = w - \lim T_n$, τότε $T_n x \xrightarrow{w} Tx$ στον Y για κάθε $x \in X$. Από το Θεώρημα 4.21 συνεπάγεται ότι $\|Tx\| \leq \liminf_n \|T_n x\|$ για κάθε $x \in X$. Άρα $\|Tx\| \leq (\liminf_n \|T_n\|)\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και, επομένως, $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$.

Η επόμενη πρόταση είναι μερικώς αντίστροφη του προηγούμενου θεωρήματος.

Πρόταση 5.16 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $\{T_n\}$ στον $L(X,Y)$ ώστε να ισχύει $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.*
(1) Αν ο Y είναι χώρος Banach και υπάρχει το $s - \lim T_n x$ στον Y για κάθε x σε κάποιο πυκνό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει το $s - \lim T_n$ στον $L(X,Y)$.
(2) Αν υπάρχει το $w - \lim T_n x$ στον Y για κάθε x σε κάποιο πυκνό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει το $w - \lim T_n$ στον $L(X,Y)$.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι το $A \subseteq X$ είναι πυκνό στον X και υπάρχει το $s - \lim T_n x$ στον Y για κάθε $x \in A$. Παίρνουμε τυχόν $x \in X$ και βρίσκουμε $z \in A$ ώστε $\|z - x\| < \epsilon$. Αν θέσουμε $M = \sup_n \|T_n\|$, τότε $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n x - T_n z\| + \|T_n z - T_m z\| + \|T_m z - T_m x\| \leq M\epsilon + \|T_n z - T_m z\| + M\epsilon$. Άρα $\limsup_{n,m\to+\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq 2M\epsilon$ και, επομένως, $\|T_n x - T_m x\| \to 0$. Δηλαδή η $\{T_n x\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y, οπότε υπάρχει το $s - \lim T_n x$ στον Y για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $T : X \to Y$ με τύπο $Tx = s - \lim T_n x$ και είναι θέμα ρουτίνας να αποδειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leq M$. Προφανώς, $T = s - \lim T_n$.
(2) Άσκηση.

5.7 Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης

Θεώρημα 5.4 *Έστω χώρος Banach X, χώρος Y με νόρμα και τελεστής $T \in L(X,Y)$ και $K > 0$. Αν $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < K\})$, τότε $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq \{Tx | \, \|x\| < 2K\}$ και ο T είναι επί του Y.*

Απόδειξη: Από την $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < K\})$ συνεπάγεται εύκολα ότι $\{y \in Y | \, \|y\| < r\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < rK\})$ για κάθε $r > 0$.

Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < 1$. Υπάρχει $x_1 \in X$ με $\|x_1\| < K$ ώστε $\|y - Tx_1\| < \frac{1}{2}$. Άρα υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| < \frac{K}{2}$ ώστε $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{1}{2^2}$. Άρα υπάρχει $x_3 \in X$ με $\|x_3\| < \frac{K}{2^2}$ ώστε $\|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \frac{1}{2^3}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, αποδεικνύουμε ότι για κάθε k υπάρχει $x_k \in X$ με $\|x_k\| < \frac{K}{2^{k-1}}$ ώστε $\|y - Tx_1 - \cdots - Tx_k\| < \frac{1}{2^k}$.

Επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty$, συνεπάγεται από το Θεώρημα 3.20 ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει στον X και έστω $x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\|x\| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{K}{2^{k-1}} = 2K$. Επίσης, λόγω συνέχειας του T, συνεπάγεται ότι $y = \sum_{k=1}^{+\infty} Tx_k = T(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k) = Tx$.

Θεώρημα 5.5 *(Ανοικτής Απεικόνισης) Έστω χώροι Banach X, Y και τελεστής $T \in L(X,Y)$ ο οποίος είναι επί του Y. Τότε*
(1) υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $y \in Y$ με $\|y\| < 1$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < M$ και $Tx = y$,
(2) ο T απεικονίζει ανοικτά υποσύνολα του X σε ανοικτά υποσύνολα του Y,
(3) αν ο T είναι και 1-1, τότε $T^{-1} \in L(X,Y)$.

Απόδειξη: Επειδή ο T είναι επί του Y, ισχύει $Y = \cup_{n=1}^{+\infty} \{Tx | \, \|x\| < n\}$, οπότε και $Y = \cup_{n=1}^{+\infty} cl(\{Tx | \, \|x\| < n\})$. Από το Θεώρημα του Baire συνεπάγεται ότι υπάρχει n ώστε το $cl(\{Tx | \, \|x\| < n\})$ να έχει μη-κενό εσωτερικό στον Y. Δηλαδή, υπάρχει $y_0 \in Y$ και $R > 0$ ώστε $\{y \in Y | \, \|y - y_0\| < R\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < n\})$. Δηλαδή, για κάθε $y \in Y$ με $\|y - y_0\| < R$ υπάρχει $\{x_k\}$ με $\|x_k\| < n$ για κάθε k και $Tx_k \to y$. Άρα και για το y_0 υπάρχει $\{x_k^{(0)}\}$ με $\|x_k^{(0)}\| < n$ για κάθε k και $Tx_k^{(0)} \to y_0$. Άρα $T(x_k - x_k^{(0)}) \to y - y_0$ και $\|x_k - x_k^{(0)}\| < 2n$ για κάθε k. Αυτό σημαίνει ότι $\{y \in Y | \, \|y\| < R\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < 2n\})$, οπότε, προφανώς, $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < K\}$, όπου $K = \frac{2n}{R}$.

Από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq \{Tx | \, \|x\| < 2K\}$, οπότε αποδείχθηκε το (1) με $M = 2K$.

Έστω ανοικτό $U \subseteq X$ για να αποδείξουμε ότι το $T(U)$ είναι ανοικτό στον Y. Έστω τυχόν $y_0 = Tx_0 \in T(U)$ με $x_0 \in U$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $\{x \in X | \, \|x - x_0\| < r\} \subseteq U$ και είναι εύκολο να αποδειχθεί, λόγω γραμμικότητας του T και λόγω της $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq \{Tx | \, \|x\| < M\}$, ότι $\{y \in Y | \, \|y - y_0\| < \frac{r}{M}\} \subseteq \{Tx | \, \|x - x_0\| < r\} \subseteq T(U)$. Άρα το $T(U)$ είναι ανοικτό.

Αν ο T είναι 1-1, τότε ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι γραμμικός τελεστής και είναι συνεχής διότι από το (2) συνεπάγεται ότι το $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ είναι ανοικτό στον U για κάθε U ανοικτό στον X. Με άλλο τρόπο: για κάθε $y \in Y$ με $y \neq 0$ και $t > 1$ έχουμε, λόγω της $\{y \in Y | \, \|y\| < 1\} \subseteq \{Tx | \, \|x\| < M\}$, ότι $\|T^{-1}(\frac{1}{t\|y\|}\, y)\| < M$. Άρα, για κάθε $y \in Y$ και $t > 1$ έχουμε $\|T^{-1}y\| < Mt\|y\|$, οπότε $\|T^{-1}y\| \le M\|y\|$. Δηλαδή, ο T^{-1} είναι φραγμένος και $\|T^{-1}\| \le M$.

5.8 Θεώρημα κλειστού γραφήματος

Ορισμός 5.8 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Ο T ονομάζεται **κλειστός** αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$ στον X για την οποία **και** η $\{Tx_n\}$ είναι συγκλίνουσα στον Y ισχύει ότι $\lim Tx_n = T(\lim x_n)$.*

Δηλαδή, ο T είναι κλειστός αν, με την υπόθεση ότι $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y, συμπεραίνουμε ότι $y = Tx$.

Αν οι X, Y είναι χώροι με νόρμα, τότε το ευθύ άθροισμα $X \oplus Y$ με τις πράξεις $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ και $\kappa(x, y) = (\kappa x, \kappa y)$ είναι χώρος με νόρμα αν ορίσουμε $\|(\cdot, \cdot)\| : X \oplus Y \to \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$ με τύπο

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

Λήμμα 5.1 *Αν οι X, Y είναι χώροι Banach, τότε ο $X \oplus Y$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Ορισμός 5.9 *Αν $f : A \to B$ ονομάζουμε **γράφημα της** f το σύνολο $G(f) = \{(a, f(a)) | a \in A\} \subseteq A \times B$.*

Είναι στοιχειώδες ότι αν οι A, B είναι γραμμικοί χώροι επί του F και η f είναι γραμμική, τότε το $G(f)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $A \oplus B$.

Λήμμα 5.2 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Ο T είναι κλειστός αν και μόνον αν ο $G(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X \oplus Y$.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 5.17 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αν ο T είναι φραγμένος, τότε ο T είναι κλειστός.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Θεώρημα 5.6 ***(Κλειστού Γραφήματος) Έστω χώροι Banach X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αν ο T είναι κλειστός, τότε ο T είναι φραγμένος.***

Απόδειξη: Από τα Λήμματα 5.1 και 5.2 συνεπάγεται ότι ο $G(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $X \oplus Y$ και, επομένως, είναι χώρος Banach .

Ορίζουμε $S : G(T) \to X$ με τύπο $S(x, Tx) = x$ για κάθε $x \in X$. Είναι προφανές ότι ο S είναι γραμμικός τελεστής 1-1 και επί. Επίσης, ο S είναι φραγμένος διότι $\|S(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$ για κάθε $x \in X$.

Από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης συνεπάγεται ότι ο S^{-1} είναι φραγμένος, οπότε υπάρχει $C \geq 0$ ώστε $\|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|S^{-1}x\| \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Άρα $C \geq 1$ και $\|Tx\| \leq (C - 1)\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

5.9 Τελεστές σε χώρους ακολουθιών

Αν $T : l^p \to l^q$ είναι γραμμικός τελεστής, ορίζεται *άπειρος* πίνακας $[T] = [a_{ij}]$, όπου οι αριθμοί a_{ij} $(1 \leq i, j < +\infty)$ καθορίζονται από τις ισότητες $T(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots)$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots$. Το πρόβλημα της εύρεσης των πινάκων οι οποίοι αντιστοιχούν σε φραγμένους $T : l^p \to l^q$ δεν είναι απλό. Θα δούμε μερικά σημαντικά παραδείγματα.

1. Έστω ακολουθία $\{\kappa_j\}$ στο F και ορίζουμε $T : l^p \to l^p$ με τύπο $y = Tx =$

$(\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$. (Ο T αντιστοιχεί σε διαγώνιο πίνακα με διαγώνια στοιχεία $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$.)

Αν $\{\kappa_j\} \in l^\infty$, τότε $Tx \in l^p$ για κάθε $x \in l^p$ και ο $T : l^p \to l^p$ είναι φραγμένος. Πράγματι, αν $1 \leq p < +\infty$, τότε για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$ έχουμε $\|Tx\|_p^p = |\kappa_1 x_1|^p + |\kappa_2 x_2|^p + \cdots \leq \|\{\kappa_j\}\|_\infty^p (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots) = \|\{\kappa_j\}\|_\infty^p \|x\|_p^p$. Επομένως, $\|T\| \leq \|\{\kappa_j\}\|_\infty$. Είναι, μάλιστα, εύκολο να αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα στην τελευταία σχέση. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε j_0 ώστε $|\kappa_{j_0}| \geq \|\{\kappa_j\}\|_\infty - \epsilon$. Τότε $\|T\| \geq \|Te_{j_0}\|_p = |\kappa_{j_0}| \geq \|\{\kappa_j\}\|_\infty - \epsilon$, οπότε $\|T\| \geq \|\{\kappa_j\}\|_\infty$ και, επομένως, $\|T\| = \|\{\kappa_j\}\|_\infty$.

Η περίπτωση $p = +\infty$ δεν παρουσιάζει καμμία δυσκολία.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν ο $T : l^p \to l^p$ είναι φραγμένος, τότε $\{\kappa_j\} \in l^\infty$. Πράγματι, για κάθε j έχουμε $|\kappa_j| = \|Te_j\|_p \leq \|T\|\|e_j\|_p = \|T\|$.

Μπορούμε, όμως, να αποδείξουμε και ένα ισχυρότερο αντίστροφο. Δηλαδή, ότι αν $Tx \in l^p$ για κάθε $x \in l^p$ (χωρίς να υποθέσουμε ότι ο T είναι φραγμένος), τότε ο T είναι φραγμένος και, επομένως, $\{\kappa_j\} \in l^\infty$. Για την απόδειξη παρατηρούμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής και κατόπιν παίρνουμε οποιαδήποτε $\{x^{(n)}\}$ στον l^p και υποθέτουμε ότι $x^{(n)} \to x$ στον l^p και ότι $Tx^{(n)} \to y$ στον l^p. Αυτό συνεπάγεται για κάθε j ότι $x_j^{(n)} \to x_j$ στο F και $\kappa_j x_j^{(n)} \to y_j$ στο F. Άρα $y_j = \kappa_j x_j$ για κάθε j και, επομένως, $y = Tx$.

Αυτό σημαίνει ότι ο T είναι κλειστός και από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος συνεπάγεται ότι ο T είναι φραγμένος.

2. Θεωρούμε τον τελεστή $S_l : l^p \to l^p$ με τύπο $y = S_l x = (x_2, x_3, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$. Ο S_l ονομάζεται **αριστερή μετάθεση**.

Ομοίως ορίζεται και ο τελεστής **δεξιά μετάθεση** $S_r : l^p \to l^p$ με τύπο $y = S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$.

Είναι προφανές ότι και οι δύο τελεστές είναι φραγμένοι και ότι οι νόρμες τους είναι $\|S_l\| = \|S_r\| = 1$. Ο S_l αντιστοιχεί σε πίνακα ο οποίος έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με 0 εκτός από τις συντεταγμένες στη διαγώνιο ακριβώς πάνω από την κύρια διαγώνιο (δηλαδή $j - i = 1$) οι οποίες είναι ίσες με 1. Ο S_r αντιστοιχεί σε πίνακα ο οποίος έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με 0 εκτός από τις συντεταγμένες στη διαγώνιο ακριβώς κάτω από την κύρια διαγώνιο (δηλαδή $i - j = 1$) οι οποίες είναι ίσες με 1.

3. Δύο ακόμη παραδείγματα είναι οι τελεστές Toeplitz και οι τελεστές Hankel.

Συμφωνούμε να γράφουμε τα στοιχεία του l^p ως $x = (x_0, x_1, \ldots)$ και θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διπλής κατεύθυνσης $c = \{c_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ στο F. Ορίζουμε $T_c : l^p \to l^p$ με τύπο $y_i = (T_c x)_i = c_i x_0 + c_{i-1} x_1 + c_{i-2} x_2 + \cdots$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots$. Ο T_c ονομάζεται τελεστής Toeplitz που ορίζεται από την c και ο πίνακάς του είναι της μορφής $[T_c] = [a_{ij}]$ όπου $a_{ij} = c_{i-j}$ για κάθε i, j. Δηλαδή σε κάθε διαγώνιο η οποία είναι παράλληλη με την κύρια διαγώνιο ο πίνακας έχει τις ίδιες συντεταγμένες.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (μονής κατεύθυνσης) $s = \{s_k\}_{k=0}^{+\infty}$ και ορίζουμε $H_s : l^p \to l^p$ με τύπο $y_i = (H_s x)_i = s_i x_0 + s_{i+1} x_1 + s_{i+2} x_2 + \cdots$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots$. Ο H_s ονομάζεται τελεστής Hankel που ορίζεται από την s και ο πίνακάς του είναι της μορφής $[H_s] = [a_{ij}]$ όπου $a_{ij} = s_{i+j}$ για κάθε i, j.

Δηλαδή σε κάθε διαγώνιο η οποία είναι κάθετη προς την κύρια διαγώνιο ο πίνακας έχει τις ίδιες συντεταγμένες.

Οι τελεστές αυτοί είναι ιδιαίτερα σημαντικοί (και για τις εφαρμογές τους), αλλά δεν θα τους μελετήσουμε. Ακόμη και η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για τις ακολουθίες c και s που τους ορίζουν ώστε να είναι φραγμένοι βρίσκεται πέρα από τα όρια του μαθήματος.

5.10 Τελεστές σε χώρους συναρτήσεων

1. Το πρώτο παράδειγμα μελετά μία τυπική περίπτωση **ολοκληρωτικού τελεστή**.

Θεώρημα 5.7 *Έστω σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ και $(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$. Θεωρούμε το χώρο μέτρου $(\Omega_1\times\Omega_2,\Sigma_1\times\Sigma_2,\mu_1\times\mu_2)$ και μετρήσιμη συνάρτηση $K:\Omega_1\times\Omega_2\to F$. Υποθέτουμε ότι*
(i) $\int_{\Omega_1}|K(a,b)|\,d\mu_1(a)\le M_2$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b\in\Omega_2$
(ii) $\int_{\Omega_2}|K(a,b)|\,d\mu_2(b)\le M_1$ για μ_1-σχεδόν κάθε $a\in\Omega_1$.

Τότε, για κάθε p με $1<p<+\infty$ ορίζεται ο φραγμένος τελεστής $T:L^p(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)\to L^p(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$ με τύπο

$$Tf(b)=\int_{\Omega_1}K(a,b)f(a)\,d\mu_1(a)$$

για μ_2-σχεδόν κάθε $b\in\Omega_2$ και

$$\|T\|\le M_1^{\frac{1}{p}}M_2^{\frac{1}{q}},$$

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Αν $p=1$, ισχύουν τα ίδια με μόνη υπόθεση την (ii), ενώ, αν $p=+\infty$, ισχύουν τα ίδια με μόνη υπόθεση την (i).

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $1<p<+\infty$ και έστω τυχούσα $f\in L^p(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$. Τότε για μ_2-σχεδόν κάθε $b\in\Omega_2$ συνεπάγεται από την ανισότητα Hölder ότι $\int_{\Omega_1}|K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)\le\big(\int_{\Omega_1}|K(a,b)|\,d\mu_1(a)\big)^{\frac{1}{q}}\big(\int_{\Omega_1}|K(a,b)||f(a)|^p\,d\mu_1(a)\big)^{\frac{1}{p}}$ $\le M_2^{\frac{1}{q}}\big(\int_{\Omega_1}|K(a,b)||f(a)|^p\,d\mu_1(a)\big)^{\frac{1}{p}}$. Άρα $\int_{\Omega_2}\big(\int_{\Omega_1}|K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)\big)^p\,d\mu_2(b)$ $\le M_2^{\frac{p}{q}}\int_{\Omega_2}\big(\int_{\Omega_1}|K(a,b)||f(a)|^p\,d\mu_1(a)\big)\,d\mu_2(b)$ και, επομένως, από το γνωστό Θεώρημα του Tonelli συμπεραίνουμε ότι $\int_{\Omega_2}\big(\int_{\Omega_1}|K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)\big)^p\,d\mu_2(b)\le$ $M_2^{\frac{p}{q}}\int_{\Omega_1}\big(\int_{\Omega_2}|K(a,b)|\,d\mu_2(b)\big)|f(a)|^p\,d\mu_1(a)\le M_2^{\frac{p}{q}}M_1\int_{\Omega_1}|f(a)|^p\,d\mu_1(a)<+\infty$.

Άρα $\int_{\Omega_1}|K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)<+\infty$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b\in\Omega_2$, οπότε ορίζεται το $Tf(b)$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b\in\Omega_2$ και $|Tf(b)|\le\int_{\Omega_1}|K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b\in\Omega_2$. Από την ανισότητα που αποδείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο συνεπάγεται ότι $\int_{\Omega_2}|Tf(b)|^p\,d\mu_2(b)\le M_1M_2^{\frac{p}{q}}\int_{\Omega_1}|f(a)|^p\,d\mu_1(a)$ και, επομένως, $\|Tf\|_p\le M_1^{\frac{1}{p}}M_2^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$.

Τώρα, έστω $p = 1$ και $f \in L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. Από το Θεώρημα του Tonelli $\int_{\Omega_2}\big(\int_{\Omega_1} |K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)\big)\,d\mu_2(b) = \int_{\Omega_1}\big(\int_{\Omega_2} |K(a,b)|\,d\mu_2(b)\big)|f(a)|\,d\mu_1(a) \leq M_1 \int_{\Omega_1} |f(a)|\,d\mu_1(a) < +\infty$. Άρα $\int_{\Omega_1} |K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a) < +\infty$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$, οπότε ορίζεται το $Tf(b)$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$ και $|Tf(b)| \leq \int_{\Omega_1} |K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a)$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$. Άρα $\int_{\Omega_2} |Tf(b)|\,d\mu_2(b) \leq M_1 \int_{\Omega_1} |f(a)|\,d\mu_1(a)$ και, επομένως, $\|Tf\|_1 \leq M_1 \|f\|_1$.

Τέλος, έστω $p = +\infty$ και $f \in L^\infty(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. Τότε $\int_{\Omega_1} |K(a,b)f(a)|\,d\mu_1(a) \leq M_2 \|f\|_\infty$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$. Άρα το $Tf(b)$ ορίζεται για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$ και $|Tf(b)| \leq M_2 \|f\|_\infty$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$. Άρα $\|Tf\|_\infty \leq M_2 \|f\|_\infty$.

2. Το επόμενο είναι το τυπικό παράδειγμα **πολλαπλασιαστικού τελεστή**.

Θεώρημα 5.8 *Έστω σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), μετρήσιμη $g : \Omega \to F$ και $1 \leq p \leq +\infty$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(1) Για κάθε $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ισχύει $gf \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.
(2) $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Αν $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, τότε ο τελεστής $M_g : L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \to L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ με τύπο $M_g(f) = gf$ για κάθε $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι φραγμένος και $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι το (2) συνεπάγεται το (1) και ότι τότε ο M_g είναι φραγμένος και $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$. Η υπόθεση ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο δεν χρειάζεται.

Έστω, τώρα, ότι ισχύει το (1). Τότε ο M_g είναι γραμμικός τελεστής και είναι εύκολο να δούμε ότι είναι κλειστός. Πράγματι, έστω ότι $f_n \to f$ στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ και $gf_n = M_g f_n \to h$ στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Μπορούμε να βρούμε $\{f_{n_k}\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ και $gf_{n_k} \to h$ μ-σχεδόν παντού στο Ω, οπότε $h = gf = M_g f$. Από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος συνεπάγεται ότι ο M_g είναι φραγμένος.

Για τυχόν $n \geq 1$ θέτουμε $A_n = \{a \in \Omega \,|\, |g(a)| \geq \|M_g\| + \frac{1}{n}\}$. Επειδή το μ είναι σ-πεπερασμένο συνεπάγεται ότι υπάρχουν $B_k \in \Sigma$ ώστε $\cup_{k=1}^{+\infty} B_k = \Omega$ και $\mu(B_k) < +\infty$ για κάθε k. Τότε $A_n = \cup_{k=1}^{+\infty}(B_k \cap A_n)$ και $\mu(B_k \cap A_n) < +\infty$ για κάθε k. Αν $\mu(B_k \cap A_n) > 0$, παίρνουμε $f = \chi_{B_k \cap A_n}$ και υπολογίζουμε $(\|M_g\| + \frac{1}{n})(\mu(B_k \cap A_n))^{\frac{1}{p}} \leq \|gf\|_p \leq \|M_g\|\|f\|_p = \|M_g\|(\mu(B_k \cap A_n))^{\frac{1}{p}}$ όταν $1 \leq p < +\infty$, ενώ $\|M_g\| + \frac{1}{n} \leq \|gf\|_\infty \leq \|M_g\|\|f\|_\infty = \|M_g\|$ όταν $p = +\infty$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $\mu(B_k \cap A_n) = 0$ για κάθε k. Άρα $\mu(A_n) = 0$ για κάθε n, οπότε $\|g\|_\infty \leq \|M_g\|$.

3. Έστω ο **τελεστής παραγώγισης** $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ με τύπο $Df(x) = f'(x)$ για $0 \leq x \leq 1$ και $f \in C^1([0,1])$. Θεωρούμε το $C^1([0,1])$ ως υπόχωρο του $C([0,1]$ (δηλαδή, με την ομοιόμορφη νόρμα).

Ο D είναι κλειστός. Πράγματι, έστω $\{f_n\}$ με $f_n \to f$ στον $C^1([0,1])$ και $Df_n \to h$ στον $C([0,1])$. Δηλαδή, $\|f_n - f\|_u \to 0$ και $\|f_n' - h\|_u \to 0$. Παίρνουμε οποιαδήποτε a, b με $0 \leq a < b \leq 1$ και έχουμε ότι $f_n(b) - f_n(a) = \int_a^b f_n'(x)\,dx$ για κάθε n. Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης συνεπάγεται ότι $f(b) - f(a) = \int_a^b h(x)\,dx$. Αυτό σημαίνει ότι $h = f' = Df$.

Όμως, ο D δεν είναι φραγμένος. Διότι, παίρνοντας $f_n(x) = x^n$ υπολογίζουμε $\frac{\|Df_n\|_u}{\|f_n\|_u} = n$ για κάθε n.

Φυσικά, ο $C^1([0,1])$, ως υπόχωρος του $C([0,1])$, δεν είναι χώρος Banach. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο $C^1([0,1])$ είναι πυκνός στον $C([0,1])$. (Πράγματι, κάθε συνάρτηση $f \in C([0,1])$ είναι ομοιόμορφο, στο $[0,1]$, όριο πολυωνύμων, σύμφωνα με το Θεώρημα του Weierstrass.) Δηλαδή, η πλήρωση του $C^1([0,1])$ (με την ομοιόμορφη νόρμα) είναι ο $C([0,1])$.

5.11 Θεώρημα κλειστού συνόλου τιμών

Θεώρημα 5.9 *(Κλειστού Συνόλου Τιμών) (Banach) Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X,Y)$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(1) Ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.
(2) Ο $R(T')$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.
(3) $R(T) = {}^{\perp}N(T')$.
(4) $R(T') = N(T)^{\perp}$.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 5.13(4) συνεπάγεται ότι τα (1) και (3) είναι ισοδύναμα. Επίσης, είναι προφανές ότι το (4) συνεπάγεται το (2). Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι τα (1) και (2) είναι ισοδύναμα και ότι το (1) συνεπάγεται το (4).
Η (1) συνεπάγεται την (2).

Ο $R(T)$, ως κλειστός υπόχωρος του Y, είναι χώρος Banach, οπότε, από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης για τον $T : X \to R(T)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $y \in R(T)$ με $\|y\| < 1$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < M$ και $Tx = y$. Παίρνουμε τυχόν $y^* \in Y^*$ και τυχόν $y \in R(T)$ με $\|y\| < 1$. Χρησιμοποιούμε το $x \in X$ με $\|x\| < M$ και $Tx = y$ και γράφουμε $|y^*(y)| = |y^*(Tx)| = |T'y^*(x)| \le \|x\|\|T'y^*\| < M\|T'y^*\|$. Από το Θεώρημα 4.14 συνεπάγεται ότι $\min_{z^* \in R(T)^\perp} \|y^* - z^*\| = \sup_{y \in R(T), \|y\|<1} |y^*(y)| \le M\|T'y^*\|$.

Λόγω της Πρότασης 5.13(1) έχουμε ότι $T'y^* = T'(y^* - z^*)$ για κάθε $z^* \in R(T)^\perp$. Άρα η τελευταία ανισότητα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: για κάθε $x^* \in R(T')$ υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $\|y^*\| \le M\|x^*\|$ ώστε $T'y^* = x^*$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι ο $R(T')$ είναι κλειστός. Έστω $\{x_n^*\}$ στον $R(T')$ και $x_n^* \to x^*$ στον X^*. Βρίσκουμε $\{n_k\}$ ώστε $\|x_{n_k}^* - x^*\| < \frac{1}{2^{k+1}}$ για κάθε k, οπότε $\|x_{n_{k+1}}^* - x_{n_k}^*\| < \frac{1}{2^k}$ για κάθε k. Κατόπιν βρίσκουμε $\{y_k^*\}$ στον Y^* ώστε $\|y_k^*\| \le \frac{M}{2^k}$ και $T'y_k^* = x_{n_{k+1}}^* - x_{n_k}^*$ για κάθε k. Επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} \|y_k^*\| < +\infty$, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k^*$ συγκλίνει στον Y^* και έστω $y^* = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k^*$. Τότε, λόγω συνέχειας του T' έχουμε $x^* = x_{n_1}^* + \sum_{k=1}^{+\infty}(x_{n_{k+1}}^* - x_{n_k}^*) = x_{n_1}^* + \sum_{k=1}^{+\infty} T'y_k^* = x_{n_1}^* + T'y^* \in R(T')$. Άρα ο $R(T')$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.
Η (1) συνεπάγεται την (4).

Λόγω της Πρότασης 5.13(3), αρκεί να αποδείξουμε ότι $N(T)^\perp \subseteq R(T')$.

Όπως πριν, έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $y \in R(T)$ με $\|y\| < 1$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < M$ και $Tx = y$.

Παίρνουμε τυχόν $x^* \in N(T)^\perp$ και ορίζουμε $y_1^* : R(T) \to F$ με τύπο $y_1^*(y) = x^*(x)$ για κάθε $y = Tx \in R(T)$. Ο ορισμός είναι καλός, διότι, αν $Tx = Tx'$,

τότε $x - x' \in N(T)$, οπότε $x^*(x) - x^*(x') = x^*(x - x') = 0$ και είναι εύκολο να δούμε ότι το y_1^* είναι γραμμικό. Το y_1^* είναι και φραγμένο, διότι για $y \in R(T)$ με $\|y\| < 1$ παίρνουμε $x \in X$ με $\|x\| < M$ και $Tx = y$ και έχουμε ότι $|y_1^*(y)| = |x^*(x)| \le \|x^*\|\|x\| \le \|x^*\|M$. Επομένως, $\|y_1^*\| \le \|x^*\|M$ και $y_1^* \in (R(T))^*$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι υπάρχει $y^* \in Y^*$ το οποίο είναι επέκταση του y_1^* από τον $R(T)$ στον Y. Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε $T'y^*(x) = y^*(Tx) = y_1^*(Tx) = x^*(x)$ και, επομένως, $T'y^* = x^*$. Άρα $x^* \in R(T')$ και $N(T)^\perp \subseteq R(T')$.
Η (2) συνεπάγεται την (1).

Επειδή ο $R(T')$, ως κλειστός υπόχωρος του X^*, είναι χώρος Banach, συνεπάγεται από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης για τον $T' : Y^* \to R(T')$ ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x^* \in R(T')$ με $\|x^*\| < 1$ υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $\|y^*\| < M$ και $T'y^* = x^*$.

Θέτοντας $Y_1 = cl(R(T))$, θα έχουμε $\{y \in Y_1 | \, \|y\| < 1\} \subseteq cl(\{Tx | \, \|x\| < M\}$. Κατόπιν, από το Θεώρημα 5.4 θα συμπεράνουμε ότι ο T είναι επί του Y_1, δηλαδή $R(T) = Y_1 = cl(R(T))$, και η απόδειξη θα είναι πλήρης.

Θα καταλήξουμε σε αντίφαση υποθέτοντας ότι υπάρχει $y \in Y_1$ με $\|y\| < 1$ και $y \notin cl(\{Tx | \, \|x\| < M\}$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(y; r) \cap \{Tx | \, \|x\| < M\} = \emptyset$. Από το Θεώρημα 4.13 συνεπάγεται εύκολα ότι υπάρχει $y^* \in Y^*$ ώστε $y^*(y) = M$ και $\sup_{x \in X, \|x\| < M} |y^*(Tx)| < M$.

Το τελευταίο σημαίνει ότι $\|T'y^*\| = \sup_{x \in X, \|x\| < 1} |T'y^*(x)| < 1$.

Άρα υπάρχει $y_0^* \in Y^*$ με $\|y_0^*\| < M$ και $T'y_0^* = T'y^*$. Οπότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε $y_0^*(Tx) = T'y_0^*(x) = T'y^*(x) = y^*(Tx)$. Άρα τα y_0^* και y^* ταυτίζονται στον $R(T)$ και, επομένως, και στον $Y_1 = cl(R(T))$. Άρα $M = y^*(y) = y_0^*(y) \le \|y_0^*\|\|y\| \le \|y_0^*\| < M$ και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Λήμμα 5.3 *Έστω χώρος Banach X, χώρος Y με νόρμα και $T \in L(X, Y)$. Αν ο $T : X \to R(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο, τότε ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\| \le M\|Tx\|$ για κάθε $x \in X$.

Έστω $\{y_n\}$ στον $R(T)$ με $y_n \to y$ στον Y. Για κάθε n υπάρχει (μοναδικό) $x_n \in X$ ώστε $Tx_n = y_n$. Επειδή $\|x_n - x_m\| \le M\|T(x_n - x_m)\| = M\|y_n - y_m\|$, συνεπάγεται ότι η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, $x_n \to x$ για κάποιο $x \in X$. Λόγω συνέχειας του T συνεπάγεται ότι $y = \lim y_n = \lim Tx_n = Tx$. Άρα $y \in R(T)$ και ο $R(T)$ είναι κλειστός.

Πρόταση 5.18 *Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X, Y)$.*
(1) $R(T) = Y$ αν και μόνον αν ο $T' : Y^* \to R(T') \subseteq X^*$ έχει φραγμένο αντίστροφο.
(2) $R(T') = X^*$ αν και μόνον αν ο $T : X \to R(T) \subseteq Y$ έχει φραγμένο αντίστροφο.

Απόδειξη: (1) Αν $R(T) = Y$, τότε $N(T') = R(T)^\perp = \{0\}$, οπότε ο $T' : Y^* \to R(T')$ είναι αντιστρέψιμος. Επειδή ο $R(T) = Y$ είναι κλειστός, συνεπάγεται από το Θεώρημα 5.9 ότι ο $R(T')$ είναι χώρος Banach. Από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης συνεπάγεται ότι $(T')^{-1} \in L(R(T'), X^*)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $T' : Y^* \to R(T')$ έχει φραγμένο αντίστροφο, οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 5.3, ο $R(T')$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*. Από το Θεώρημα 5.9 συνεπάγεται ότι $R(T) = {}^{\perp}N(T') = {}^{\perp}\{0\} = Y$.
(2) Αν $R(T') = X^*$, τότε $N(T) = {}^{\perp}R(T') = \{0\}$, οπότε ο $T : X \to R(T)$ είναι αντιστρέψιμος. Επειδή ο $R(T') = X^*$ είναι κλειστός, συνεπάγεται από το Θεώρημα 5.9 ότι ο $R(T)$ είναι χώρος Banach. Από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης συνεπάγεται ότι $T^{-1} \in L(R(T), X)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $T : X \to R(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο, οπότε, από το Λήμμα 5.3, ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y. Από το Θεώρημα 5.9 συνεπάγεται ότι $R(T') = N(T)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = X^*$.

Θεώρημα 5.10 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X, Y)$.*
(1) Αν ο $T : X \to Y$ έχει φραγμένο αντίστροφο, τότε ο $T' : Y^* \to X^*$ έχει φραγμένο αντίστροφο και $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.
(2) Αν ο X είναι πλήρης, τότε ισχύει και το αντίστροφο του (1).

Απόδειξη: (1) Έστω ότι ο $T \in L(X, Y)$ έχει φραγμένο αντίστροφο $T^{-1} \in L(Y, X)$. Τότε $T' \in L(Y^*, X^*)$ και $(T^{-1})' \in L(X^*, Y^*)$ και $I = I' = (TT^{-1})' = (T^{-1})'T'$ και $I = I' = (T^{-1}T)' = T'(T^{-1})'$. Άρα ο $T' : Y^* \to X^*$ έχει φραγμένο αντίστροφο και $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.
(2) Αντιστρόφως, έστω ότι ο X είναι πλήρης και ότι ο $T' : Y^* \to X^*$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Από την Πρόταση 5.13 συνεπάγεται ότι $N(T) = {}^{\perp}R(T') = {}^{\perp}X^* = \{0\}$, οπότε ο T είναι 1-1, και ότι $cl(R(T)) = {}^{\perp}N(T') = {}^{\perp}\{0\} = Y$, οπότε το $R(T)$ είναι πυκνό στον Y. Αν αποδείξουμε ότι ο αντίστροφος του $T : X \to R(T)$ είναι φραγμένος, τότε από το Λήμμα 5.3 θα συμπεράνουμε ότι το $R(T)$ είναι κλειστό, οπότε $R(T) = Y$ και, επομένως, ο $T \in L(X, Y)$ έχει φραγμένο αντίστροφο.

Από το (1) συνεπάγεται ότι ο $T'' : X^{**} \to Y^{**}$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|x^{**}\| \le C\|T''x^{**}\|$ για κάθε $x^{**} \in X^{**}$.

Θεωρούμε τις φυσιολογικές εμφυτεύσεις $J_X : X \to X^{**}$ και $J_Y : Y \to Y^{**}$ και βλέπουμε ότι $T''(J_X x) = J_Y(Tx)$ για κάθε $x \in X$. Πράγματι, για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $T''(J_X x)(y^*) = (J_X x)(T'y^*) = T'y^*(x) = y^*(Tx) = J_Y(Tx)(y^*)$.

Άρα για κάθε $x \in X$ έχουμε $\|x\| = \|J_X x\| \le C\|T''(J_X x)\| = C\|J_Y(Tx)\| = C\|Tx\|$. Αυτό σημαίνει ότι ο αντίστροφος του $T : X \to R(T)$ είναι φραγμένος.

5.12 Φάσματα τελεστών

Ορισμός 5.10 *Έστω χώρος X με νόρμα και $T \in L(X)$. Λέμε ότι ο $\lambda \in F$ ανήκει στο* ***αναλύον σύνολο του*** *T αν ο $\lambda I - T$ έχει τις ιδιότητες:*
(i) είναι 1-1,
(ii) ο $R(\lambda I - T)$ είναι πυκνός υπόχωρος του X και
(iii) ο $(\lambda I - T)^{-1} : R(\lambda I - T) \to X$ είναι φραγμένος.

Αν αυτά ισχύουν, τότε συμβολίζουμε $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ και ονομάζουμε τον $R(\lambda; T)$ ***αναλύοντα τελεστή του T στο λ.***

Το αναλύον σύνολο του T συμβολίζεται $\rho(T)$ και το συμπλήρωμά του στο F ονομάζεται ***φάσμα του*** *T και συμβολίζεται $\sigma(T)$.*

Άρα, αν $\lambda \in \sigma(T)$, τότε ένα τουλάχιστον από τα (i), (ii) και (iii) δεν ισχύει. Άρα το $\sigma(T)$ διαμερίζεται στα τρία ξένα ανά δύο σύνολα που ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 5.11 *Έστω χώρος X με νόρμα και $T \in L(X)$.*
(i) $P_\sigma(T)$ είναι το σύνολο όλων των $\lambda \in F$ για τα οποία ο $\lambda I - T$ δεν είναι 1-1.
(ii) $R_\sigma(T)$ είναι το σύνολο όλων των $\lambda \in F$ για τα οποία ο $\lambda I - T$ είναι 1-1 αλλά δεν έχει πυκνό σύνολο τιμών.
(iii) $C_\sigma(T)$ είναι το σύνολο όλων των $\lambda \in F$ για τα οποία ο $\lambda I - T$ είναι 1-1 με πυκνό σύνολο τιμών αλλά με μη-φραγμένο αντίστροφο.

*Το $P_\sigma(T)$ ονομάζεται **σημειακό φάσμα του** T και τα στοιχεία του ονομάζονται **ιδιοτιμές του** T. Το $R_\sigma(T)$ ονομάζεται **περιθωριακό φάσμα του** T **και το** $C_\sigma(T)$ **ονομάζεται συνεχές φάσμα του** T.*

Ορισμός 5.12 *Έστω χώρος X με νόρμα και $T \in L(X)$. Είναι προφανές ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν $N(\lambda I - T) \neq \{0\}$. Ο $N(\lambda I - T)$ ονομάζεται **ιδιόχωρος του** T **που αντιστοιχεί στο** λ και η διάστασή του ονομάζεται **πολλαπλότητα του** λ. Κάθε μη-μηδενικό στοιχείο του $N(\lambda I - T)$, δηλαδή κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ και $Tx = \lambda x$, ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα του** T **ως προς το** λ.*

Παράδειγμα

Έστω $n = \dim(X) < +\infty$ και γραμμικός τελεστής $T : X \to X$. Ο T είναι αυτομάτως φραγμένος και για κάθε $\lambda \in F$ έχουμε δύο περιπτώσεις: είτε ο $\lambda I - T : X \to X$ δεν είναι 1-1, οπότε το λ είναι ιδιοτιμή του T, είτε ο $\lambda I - T : X \to X$ είναι 1-1, οπότε είναι αυτομάτως επί του X, ο αντίστροφος είναι και αυτός φραγμένος και, επομένως, το λ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T.

Άρα το φάσμα του T αποτελείται μόνον από το σημειακό φάσμα, $\sigma(T) = P_\sigma(T)$.

Αν $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ είναι οποιαδήποτε βάση του X και θεωρήσουμε τον πίνακα του T, $[T]_{BB} = [a_{ij}]$, ως προς τη B, τότε το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν $\det([\lambda\delta_{ij} - a_{ij}]) = 0$. Η παράσταση αριστερά είναι πολυώνυμο του λ βαθμού n με συντελεστές από το F και ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο του** T. Άν $F = \mathbf{C}$, τότε το πολυώνυμο αυτό έχει τουλάχιστον μία ρίζα (και μάλιστα, ακριβώς n ρίζες, αν μετρήσουμε τις πολλαπλότητες), οπότε το φάσμα του T είναι πάντοτε μη-κενό. Αν $F = \mathbf{R}$, τότε υπάρχει περίπτωση το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να μην έχει καμμία ρίζα και το φάσμα του T να είναι κενό. Ένα τέτοιο παράδειγμα, αν $n = 2$, είναι ο T με τύπο $T(\kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2) = -\kappa_2 b_1 + \kappa_1 b_2$ για κάθε $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbf{R}$, του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $\lambda^2 + 1$.

Στο εξής περιορίζουμε τη μελέτη μας σε χώρους Banach.

Πρόταση 5.19 *Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Το $\lambda \in F$ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T αν και μόνον αν ο $\lambda I - T$ είναι 1-1 και επί του X και $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδειχθεί ότι, αν το λ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T, τότε $R(\lambda I - T) = X$. Όμως, από το Λήμμα 5.3 συνεπάγεται ότι ο $R(\lambda I - T)$ είναι κλειστός και, επειδή είναι πυκνός στον X, συνεπάγεται ότι $R(\lambda I - T) = X$.

Δηλαδή, όταν ο X είναι χώρος Banach, τότε το $\lambda \in F$ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T αν και μόνον αν ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας Banach $L(X)$.

Λήμμα 5.4 *Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$ με $\|T\| < 1$. Τότε ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $L(X)$ και $\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.*

Απόδειξη: Επειδή $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|T^k\| \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|T\|^k < +\infty$ και ο $L(X)$ είναι χώρος Banach, συνεπάγεται ότι η σειρά $I + \sum_{k=1}^{+\infty} T^k$ συγκλίνει στον $L(X)$ και έστω $S = I + \sum_{k=1}^{+\infty} T^k$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ έχουμε $(I + T + \cdots + T^n)(I - T) = (I-T)(I+T+\cdots+T^n) = I - T^{n+1}$. Επειδή $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \to 0$, συνεπάγεται ότι $T^{n+1} \to 0$ στον $L(X)$, οπότε $S(I-T) = (I-T)S = I$.

Άρα ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και $(I-T)^{-1} = S$.

Επίσης, $\|S\| \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|}$, οπότε $S \in L(X)$ και ο S είναι το αντίστροφο στοιχείο του $I - T$ στον $L(X)$.

Πρόταση 5.20 *Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Τότε $\rho(T) = \rho(T')$ και $R(\lambda; T)' = R(\lambda; T')$ για κάθε $\lambda \in \rho(T)$.*

Απόδειξη: Απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 5.10.

Θεώρημα 5.11 *Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Τότε το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F και η $R(\,\cdot\,; T) : \rho(T) \to L(X)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό $\rho(T)$.*

Για κάθε $\lambda, \mu \in \rho(T)$ ισχύει $R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T)$.

Απόδειξη: Έστω $\lambda \in \rho(T)$, οπότε ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος και $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $\mu \in F$ με $|\mu - \lambda| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}$ και γράφουμε $\mu I - T = \lambda I - T - (\lambda - \mu) I = (\lambda I - T)\big[I - (\lambda - \mu) R(\lambda; T)\big]$.

Από το Λήμμα 5.4 συνεπάγεται ότι ο $I - (\lambda - \mu) R(\lambda; T)$ έχει αντίστροφο στον $L(X)$. Άρα ο $\mu I - T$ έχει αντίστροφο στον $L(X)$ και $R(\mu; T) = \big[I - (\lambda - \mu) R(\lambda; T)\big]^{-1} R(\lambda; T)$. Επομένως $\|R(\mu; T)\| \leq \frac{\|R(\lambda;T)\|}{1 - |\mu - \lambda| \|R(\lambda;T)\|}$.

Αποδείξαμε ότι, αν $\lambda \in \rho(T)$, τότε όλα τα κοντινά του σημεία μ ανήκουν στο $\rho(T)$. Άρα το $\rho(T)$ είναι ανοικτό και επομένως το $\sigma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του F.

Επειδή $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1} T)$, από το Λήμμα 5.4 συνεπάγεται ότι, για κάθε $\lambda \in F$ με $|\lambda| > \|T\|$, ο $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος και $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$. Δηλαδή, $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$ και, επομένως, το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές.

Για κάθε $\lambda, \mu \in \rho(T)$ υπολογίζουμε $R(\lambda; T) = R(\lambda; T)(\mu I - T) R(\mu; T) = R(\lambda; T)\big[(\mu - \lambda) I + (\lambda I - T)\big] R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T) + R(\mu; T)$. Επομένως, $R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T)$.

Από την τελευταία ισότητα και από την $\|R(\mu; T)\| \leq \frac{\|R(\lambda;T)\|}{1 - |\mu - \lambda| \|R(\lambda;T)\|}$ όταν $|\mu - \lambda| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}$, παίρνουμε $\|R(\lambda; T) - R(\mu; T)\| \leq |\mu - \lambda| \frac{\|R(\lambda;T)\|^2}{1 - |\mu - \lambda| \|R(\lambda;T)\|}$ για κάθε $\lambda \in \rho(T)$ και μ με $|\mu - \lambda| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}$.

Άρα $R(\mu; T) \to R(\lambda; T)$ στον $L(X)$ όταν $\mu \to \lambda$ στο $\rho(T)$.

Ορισμός 5.13 *Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αν $\sigma(T) \neq \emptyset$, τότε ο μη-αρνητικός αριθμός $r_\sigma(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ ονομάζεται* ***φασματική ακτίνα του*** *T.*

Αν $F = \mathbf{R}$, τότε το $[-r_\sigma(T), r_\sigma(T)]$ είναι το μικρότερο κλειστό διάστημα με κέντρο το 0 το οποίο περιέχει το $\sigma(T)$. Αν $F = \mathbf{C}$, τότε ο $cl(\Delta(0; r_\sigma(T)))$ είναι ο μικρότερος κλειστός δίσκος με κέντρο το 0 ο οποίος περιέχει το $\sigma(T)$.

Θεώρημα 5.12 *Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Τότε*
(1) υπάρχει το $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ και $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ για κάθε k,
(2) αν $\sigma(T) \neq \emptyset$, τότε $r_\sigma(T) \leq \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$,
(3) $R(\lambda; T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$ για κάθε $\lambda \in F$ με $|\lambda| > \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ και
(4) όταν $|\lambda| < \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$ δε συγκλίνει σε στοιχείο του $L(X)$.

Απόδειξη: (1) Παίρνουμε οποιοδήποτε $k \in \mathbf{N}$ και για κάθε $n \in \mathbf{N}$ με $n \geq k$ γράφουμε $n = pk + q$, όπου $p, q \in \mathbf{N}$ και $0 \leq q \leq k - 1$. Τότε, $\frac{pk}{n} \to 1$ και $\frac{q}{n} \to 0$ όταν $n \to +\infty$. Επειδή $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^{pk}\|^{\frac{1}{n}} \|T^q\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^k\|^{\frac{p}{n}} \|T\|^{\frac{q}{n}}$, συνεπάγεται ότι $\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Αφού αυτό ισχύει για κάθε k, συνεπάγεται $\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Άρα το $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ υπάρχει και $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ για κάθε k.
(3) Αν $|\lambda| > \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, τότε παίρνουμε τ ώστε $|\lambda| > \tau > \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ και N ώστε $\tau \geq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ για κάθε $k \geq N$. Τότε $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|\lambda^{-k} T^{k-1}\| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |\lambda|^{-k} \tau^{k-1}$ $< +\infty$, οπότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$ συγκλίνει σε στοιχείο του $L(X)$.

Αν $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$, τότε $(\lambda I - T)S = \lim(\lambda I - T)\lambda^{-1}(I + \lambda^{-1}T + \cdots$ $+ \lambda^{-n}T^n) = \lim(I - \lambda^{-n-1}T^{n+1}) = I$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $S(\lambda I - T) = I$ και, επομένως, $R(\lambda; T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$.
(2) Άμεση συνέπεια του (3).
(4) Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$ συγκλίνει στον $L(X)$, συνεπάγεται ότι $\|\lambda^{-k-1} T^k\| \to 0$. Άρα υπάρχει N ώστε $\|\lambda^{-k-1} T^k\| \leq 1$ όταν $k \geq N$. Τότε $|\lambda|^{\frac{k+1}{k}} \geq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ όταν $k \geq N$, οπότε $|\lambda| \geq \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Παραδείγματα
1. Παίρνουμε οποιαδήποτε $\{\kappa_k\} \in l^\infty$ και θεωρούμε τον τελεστή $T : l^2 \to l^2$ με τύπο $Tx = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$. Γνωρίζουμε ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| = \|\{\kappa_k\}\|_\infty$.

Ο $\lambda \in F$ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενικό $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ ώστε $\kappa_j x_j = \lambda x_j$ για κάθε j. Αυτό, προφανώς, είναι δυνατόν αν και μόνον αν $\lambda = \kappa_j$ για κάποιο j με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το e_j. Άρα $P_\sigma(T) = \{\kappa_j | j \in \mathbf{N}\}$.

Αν το λ ανήκει στο περιθωριακό φάσμα του T, τότε το λ δεν είναι ιδιοτιμή και ο $R(\lambda I - T)$ δεν είναι πυκνός στον l^2, οπότε υπάρχει μη-μηδενικό $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2$ κάθετο στον $R(\lambda I - T)$. Αυτό ισοδυναμεί με $(\lambda x - Tx | y) = 0$ για κάθε $x \in l^2$ και, παίρνοντας $x = e_j$, έχουμε ότι $(\lambda - \kappa_j)\overline{y_j} = 0$ για κάθε j. Αφού το λ δεν είναι ιδιοτιμή, καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε το περιθωριακό φάσμα είναι κενό, $R_\sigma(T) = \emptyset$.

Έστω, τώρα, ότι το λ δεν είναι ιδιοτιμή του T, οπότε είτε θα ανήκει στο αναλύον σύνολο είτε θα ανήκει στο συνεχές φάσμα του T. Αν $\lambda \in \rho(T)$, τότε $R(\lambda I - T) = l^2$ και ο $(\lambda I - T)^{-1}$ είναι φραγμένος στον l^2. Ο τύπος του $(\lambda I - T)^{-1}$ είναι ο $(\lambda I - T)^{-1} y = (\frac{1}{\lambda - \kappa_1} y_1, \frac{1}{\lambda - \kappa_2} y_2, \ldots)$ για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots)$ και έχουμε αποδείξει ότι αυτός ορίζεται για κάθε $y \in l^2$ αν και μόνον αν $\{\frac{1}{\lambda - \kappa_j}\} \in l^\infty$ και σε αυτήν την περίπτωση είναι φραγμένος. Το $\{\frac{1}{\lambda - \kappa_j}\} \in l^\infty$ ισοδυναμεί με $\lambda \notin cl(\{\kappa_j | j \in \mathbf{N}\})$.

Συμπεραίνουμε ότι $\sigma(T) = cl(\{\kappa_j | j \in \mathbf{N}\})$ και, ειδικώτερα, $P_\sigma(T) = \{\kappa_j | j \in \mathbf{N}\}$, $R_\sigma(T) = \emptyset$ και $C_\sigma(T) = cl(\{\kappa_j | j \in \mathbf{N}\}) \setminus \{\kappa_j | j \in \mathbf{N}\}$.

2. Θεωρούμε τη δεξιά μετάθεση $S_r : l^2 \to l^2$ με τύπο $S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$.

Το λ είναι ιδιοτιμή του S_r αν και μόνον αν υπάρχει $x = (x_1, x_2, \ldots) \neq 0$ στον l^2 ώστε $\lambda x_1 = 0$ και $\lambda x_{j+1} = x_j$ για κάθε $j \geq 1$. Εύκολα φαίνεται ότι αυτό είναι αδύνατο, οπότε ο S_r δεν έχει ιδιοτιμές και, επομένως, $P_\sigma(S_r) = \emptyset$.

Το λ ανήκει στο περιθωριακό φάσμα του S_r αν και μόνον αν ο $R(\lambda I - S_r)$ δεν είναι πυκνός στον l^2, δηλαδή, αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενικό $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2$ κάθετο στον $R(\lambda I - S_r)$. Αυτό ισοδυναμεί με $(\lambda x - S_r x | y)$ για κάθε $x \in l^2$ και αυτό ισοδυναμεί με $x_1(\lambda \overline{y_1} - \overline{y_2}) + x_2(\lambda \overline{y_2} - \overline{y_3}) + \cdots = 0$ για κάθε $x \in l^2$, δηλαδή με $\lambda \overline{y_j} = \overline{y_{j+1}}$ για κάθε j. Αν $|\lambda| < 1$, τότε το $y = (1, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}^2, \ldots)$ ανήκει στον l^2 και λύνει το σύστημα αυτό, οπότε $\lambda \in R_\sigma(S_r)$. Αν $|\lambda| \geq 1$, δεν υπάρχει λύση $y \in l^2$ του συστήματος, οπότε $\lambda \notin R_\sigma(S_r)$. Άρα $R_\sigma(S_r) = \{\lambda \in F | \, |\lambda| < 1\}$.

Από το προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $r_\sigma(S_r) \leq \|S_r\| = 1$. Επομένως, $\{\lambda \in F | \, |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S_r) \subseteq \{\lambda \in F | \, |\lambda| \leq 1\}$ και, επειδή το $\sigma(S_r)$ είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι $\sigma(S_r) = \{\lambda \in F | \, |\lambda| \leq 1\}$. Άρα $C_\sigma(S_r) = \{\lambda | \, |\lambda| = 1\}$.

3. Τέλος, θεωρούμε την αριστερή μετάθεση $S_l : l^2 \to l^2$ με $S_l x = (x_2, x_3, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$.

Το λ είναι ιδιοτιμή του S_l αν και μόνον αν υπάρχει $x = (x_1, x_2, \ldots) \neq 0$ στον l^2 ώστε $\lambda x_j = x_{j+1}$ για κάθε $j \geq 1$. Αν $|\lambda| \geq 1$, τότε εύκολα φαίνεται ότι αυτό είναι αδύνατο, ενώ, αν $|\lambda| < 1$, τότε το $x = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ ανήκει στον l^2 και λύνει το σύστημα. Άρα $P_\sigma(S_l) = \{\lambda | \, |\lambda| < 1\}$.

Το λ ανήκει στο περιθωριακό φάσμα του S_l αν και μόνον αν ο $R(\lambda I - S_l)$ δεν είναι πυκνός στον l^2, δηλαδή, αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενικό $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2$ κάθετο στον $R(\lambda I - S_l)$. Αυτό ισοδυναμεί με $(\lambda x - S_l x | y)$ για κάθε $x \in l^2$ και αυτό ισοδυναμεί με $x_1 \lambda \overline{y_1} + x_2(\lambda \overline{y_2} - \overline{y_1}) + \cdots = 0$ για κάθε $x \in l^2$, δηλαδή με $\lambda \overline{y_1} = 0$ και $\lambda \overline{y_{j+1}} = \overline{y_j}$ για κάθε j. Αυτό είναι αδύνατο, οπότε $R_\sigma(S_l) = \emptyset$.

Από το τελευταίο θεώρημα συνεπάγεται ότι $r_\sigma(S_l) \leq \|S_l\| = 1$. Επομένως, $\{\lambda \in F | \, |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S_l) \subseteq \{\lambda \in F | \, |\lambda| \leq 1\}$ και, επειδή το $\sigma(S_l)$ είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι $\sigma(S_l) = \{\lambda \in F | \, |\lambda| \leq 1\}$. Άρα $C_\sigma(S_l) = \{\lambda | \, |\lambda| = 1\}$.

Ορισμός 5.14 *Έστω χώρος Banach Z επί του $\mathbf{C}$, ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbf{C}$ και συνάρτηση $f : U \to Z$. Η f ονομάζεται* ***ολόμορφη στο U με τιμές στον***

Z αν για κάθε $\lambda \in U$ υπάρχει το όριο $\lim_{U \ni \kappa \to \lambda} \frac{f(\kappa)-f(\lambda)}{\kappa-\lambda}$ στον Z. Το όριο αυτό συμβολίζεται $f'(\lambda)$ και η $f' : U \to Z$ ονομάζεται ***παράγωγος της f στο U.***

Πρόταση 5.21 *Έστω χώρος Banach Z επί του $\mathbf{C}$, ανοικτό $U \subseteq \mathbf{C}$ και ολόμορφη f στο U με τιμές στον Z. Τότε για κάθε $z^* \in Z^*$ η συνάρτηση $z^* \circ f : U \to \mathbf{C}$ είναι ολόμορφη στο U.*

Απόδειξη: Άσκηση.

Πρόταση 5.22 *Έστω χώρος Banach Z επί του $\mathbf{C}$ και f ολόμορφη στο $\mathbf{C}$ με τιμές στον Z. Αν η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $\|f(\kappa)\| \leq M$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{C}$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbf{C}$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή στο $\mathbf{C}$, οπότε υπάρχουν κ_1 και κ_2 ώστε $f(\kappa_1) \neq f(\kappa_2)$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι υπάρχει $z^* \in Z^*$ ώστε $z^*(f(\kappa_1)) \neq z^*(f(\kappa_2))$. Η συνάρτηση $z^* \circ f$ είναι ολόμορφη, λόγω της προηγούμενης πρότασης, και φραγμένη στο $\mathbf{C}$, διότι $|(z^* \circ f)(\kappa)| \leq \|z^*\|M$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{C}$. Από το κλασσικό Θεώρημα του Liouville συνεπάγεται ότι η $z^* \circ f$ είναι σταθερή στο $\mathbf{C}$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι $(z^* \circ f)(\kappa_1) \neq (z^* \circ f)(\kappa_2)$.

Θεώρημα 5.13 ***Αν X είναι χώρος Banach X επί του $\mathbf{C}$ και $T \in L(X)$, τότε***
(1) η $R(\,\cdot\,;T) : \rho(T) \to L(X)$ είναι ολόμορφη στο $\rho(T)$ με τιμές στον $L(X)$,
(2) το $\sigma(T)$ δεν είναι κενό και
(3) $r_\sigma(T) = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Απόδειξη: (1) Από την ταυτότητα $R(\lambda;T) - R(\mu;T) = (\mu - \lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)$ και τη συνέχεια της $R(\,\cdot\,;T)$ στο $\rho(T)$ συνεπάγεται ότι

$$R'(\lambda;T) = \lim_{\rho(T) \ni \mu \to \lambda} \frac{R(\mu;T) - R(\lambda;T)}{\mu - \lambda} = -R(\lambda;T)^2$$

για κάθε $\lambda \in \rho(T)$.
(2) Αν το $\sigma(T)$ είναι κενό, τότε η $R(\,\cdot\,;T)$ είναι ολόμορφη στο $\rho(T) = \mathbf{C}$.

Επειδή $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$. Από το Θεώρημα 5.12(3) συνεπάγεται ότι για κάθε $\lambda \in \mathbf{C}$ με $|\lambda| \geq 2\|T\|$ ισχύει $\|R(\lambda;T)\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda|^{-k}\|T\|^{k-1} \leq 2|\lambda|^{-1}$. Άρα η συνάρτηση $R(\,\cdot\,;T)$ είναι φραγμένη στο $\mathbf{C}$.

Από την Πρόταση 5.22 συνεπάγεται ότι η $R(\,\cdot\,;T)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{C}$. Επίσης, από την τελευταία ανισότητα της προηγούμενης παραγράφου συνεπάγεται ότι $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \|R(\lambda;T)\| \leq \lim_{|\lambda| \to +\infty} 2|\lambda|^{-1} = 0$ και, επομένως, $R(\lambda;T) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbf{C}$. Αυτό είναι αδύνατο, αφού ο $R(\lambda;T)$ είναι αντιστρέψιμος.
(3) Έστω ότι $r_\sigma(T) \neq \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, οπότε από το Θεώρημα 5.12(2) συνεπάγεται ότι $r_\sigma(T) < \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Λόγω του (1), η $R(\,\cdot\,;T)$ είναι ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, |\lambda| > r_\sigma(T)\}$ με τιμές στον $L(X)$. Άρα για κάθε $z^* \in (L(X))^*$ η $z^* \circ R(\,\cdot\,;T)$ είναι ολόμορφη στο ίδιο ανοικτό σύνολο με τιμές στο $\mathbf{C}$ και, επομένως, έχει μια σειρά Laurent: $z^*(R(\lambda;T)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \lambda^{-k}$ για κάθε λ με

$|\lambda| > r_\sigma(T)$. Οι συντελεστές $a_k = a_k(z^*)$ εξαρτώνται από το z^* και ισχύει ο γνωστός τύπος

$$a_k(z^*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} z^*(R(\lambda;T))\lambda^{k-1}\,d\lambda$$

όπου r είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $r > r_\sigma(T)$.

Θεωρούμε r ώστε $r_\sigma(T) < r < \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Επειδή η $R(\,\cdot\,;T)$ είναι συνεχής, υπάρχει K ώστε $\|R(\lambda;T)\| \leq K$ για κάθε λ με $|\lambda| = r$. Άρα $|z^*(R(\lambda;T))\lambda^{k-1}| \leq K\|z^*\|r^{k-1}$ για κάθε λ με $|\lambda| = r$, οπότε $|a_k(z^*)| \leq \frac{1}{2\pi}K\|z^*\|r^{k-1}2\pi r = K\|z^*\|r^k$ για κάθε $k \geq 1$.

Από το Θεώρημα 5.12(3), λόγω συνέχειας του z^* έχουμε ότι $z^*(R(\lambda;T)) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^*(T^{k-1})\lambda^{-k}$ για κάθε λ με $|\lambda| > \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Λόγω μοναδικότητας της σειράς Laurent, συνεπάγεται ότι $a_k(z^*) = z^*(T^{k-1})$ όταν $k \geq 1$ και $a_k(z^*) = 0$ όταν $k \leq 0$ και

$$z^*(R(\lambda;T)) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^*(T^{k-1})\lambda^{-k}$$

για κάθε λ με $|\lambda| > r_\sigma(T)$.

Άρα $|z^*(T^{k-1})| = |a_k(z^*)| \leq K\|z^*\|r^k$ για κάθε $k \geq 1$, οπότε από το Θεώρημα 4.11 συνεπάγεται ότι $\|T^{k-1}\| = \max_{z^* \in (L(X))^*, \|z^*\| \leq 1} |z^*(T^{k-1})| \leq Kr^k$ για κάθε $k \geq 1$.

Επομένως, $r < \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim K^{\frac{1}{n}} r^{\frac{n+1}{n}} = r$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

5.13 Συμπαγείς τελεστές

Ορισμός 5.15 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Ο T ονομάζεται* ***συμπαγής*** *ή* ***τελείως συνεχής*** *αν το $T(B_X)$ έχει συμπαγή κλειστή θήκη στον Y, όπου B_X είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X.*

Το σύνολο όλων των συμπαγών $T \in L(X,Y)$ συμβολίζεται $\mathcal{K}(X,Y)$ ενώ το σύνολο όλων των συμπαγών $T \in L(X)$ συμβολίζεται $\mathcal{K}(X)$.

Πρόταση 5.23 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$.*
(1) Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε φραγμένη $\{x_n\}$ στον X υπάρχει $\{x_{n_k}\}$ ώστε η $\{Tx_{n_k}\}$ να συγκλίνει στον Y.
(2) Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε φραγμένο $K \subseteq X$ το $T(K)$ έχει συμπαγή κλειστή θήκη στον Y.
(3) Αν ο Y είναι πλήρης, τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε φραγμένο $K \subseteq X$ το $T(K)$ είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι ο T είναι συμπαγής και έστω φραγμένη $\{x_n\}$ στον X. Αν $\|x_n\| \leq M$ για κάθε n, τότε η $\{T(\frac{x_n}{M})\}$ είναι στο $T(B_X)$ και, επομένως, υπάρχει $\{x_{n_k}\}$ ώστε η $\{T(\frac{x_{n_k}}{M})\}$, οπότε και η $\{Tx_{n_k}\}$, να συγκλίνει στον Y.

Αντιστρόφως, έστω $\{y_n\}$ στο $cl(T(B_X))$. Για κάθε n παίρνουμε $x_n \in B_X$ ώστε $\|Tx_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, οπότε υπάρχει $\{x_{n_k}\}$ ώστε η $\{Tx_{n_k}\}$ να συγκλίνει σε κάποιο $y \in Y$. Τότε $y_{n_k} \to y$ και, επειδή το $cl(T(B_X))$ είναι κλειστό, $y \in$

$cl(T(B_X))$. Άρα το $cl(T(B_X))$ είναι συμπαγές.
(2) Έστω ότι ο T είναι συμπαγής και έστω φραγμένο $K \subseteq X$. Τότε υπάρχει M ώστε $\|x\| \leq M$ για κάθε $x \in K$, οπότε $T(K) \subseteq MT(B_X) = Mcl(T(B_X))$. Άρα το $cl(T(K))$ είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου και, επομένως, είναι συμπαγές. Το αντίστροφο είναι προφανές.
(3) Αν για κάθε φραγμένο $K \subseteq X$ το $T(K)$ είναι ολικά φραγμένο, τότε και το $cl(T(K))$ είναι ολικά φραγμένο. Το $cl(T(K))$ είναι και πλήρες, οπότε είναι συμπαγές. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Πρόταση 5.24 *Έστω χώροι X, Y, Z με νόρμα.*
(1) Ο $\mathcal{K}(X,Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $L(X,Y)$.
(2) Αν ο Y είναι πλήρης, τότε ο $\mathcal{K}(X,Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L(X,Y)$.
(3) Αν $T \in L(X,Y)$ και $S \in L(Y,Z)$, τότε ο ST είναι συμπαγής αν ένας τουλάχιστον από τους S, T είναι συμπαγής.

Απόδειξη: (1) Άσκηση.
(2) Έστω $\{T_n\}$ στον $\mathcal{K}(X,Y)$, $T \in L(X,Y)$ και $\|T_n - T\| \to 0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε φραγμένο $K \subseteq X$, οπότε υπάρχει M ώστε $\|x\| \leq M$ για κάθε $x \in K$, και θα αποδείξουμε ότι το $T(K)$ είναι ολικά φραγμένο. Αν $\epsilon > 0$, βρίσκουμε n ώστε $\|T_n - T\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Επειδή το $T_n(K)$ είναι ολικά φραγμένο, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_N \in Y$ ώστε $T_n(K) \subseteq \cup_{k=1}^N B(y_k; \frac{\epsilon}{2})$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι $T(K) \subseteq \cup_{k=1}^N B(y_k; \epsilon)$, οπότε το $T(K)$ είναι ολικά φραγμένο και ο T είναι συμπαγής. Πράγματι, αν $y = Tx$ με $x \in K$, τότε $\|y - T_n x\| = \|Tx - T_n x\| < \frac{\epsilon}{2M} M = \frac{\epsilon}{2}$. Για κάποιο $k = 1, \ldots, N$ έχουμε $\|T_n x - y_k\| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επομένως, $\|y - y_k\| < \epsilon$. Άρα κάθε $y \in T(K)$ ανήκει στην $\cup_{k=1}^N B(y_k; \epsilon)$.
(3) Αν ο T είναι συμπαγής, τότε $ST(B_X) \subseteq S(cl(T(B_X)))$. Το $cl(T(B_X))$ είναι συμπαγές και, επειδή ο S είναι συνεχής, το $S(cl(T(B_X)))$ είναι συμπαγές. Άρα το $cl(ST(B_X)) \subseteq S(cl(T(B_X)))$ είναι συμπαγές.

Έστω ότι ο S είναι συμπαγής. Επειδή ο T είναι φραγμένος, το $T(B_X)$ είναι φραγμένο, οπότε, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το $cl(S(T(B_X)))$ είναι συμπαγές.

Πρόταση 5.25 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X,Y)$. Αν ο $R(T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

Απόδειξη: Ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y, οπότε $cl(T(B_X)) \subseteq R(T)$. Επειδή ο T είναι φραγμένος, το $T(B_X)$ και, επομένως, το $cl(T(B_X))$ είναι φραγμένο. Άρα το $cl(T(B_X))$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο χώρου πεπερασμένης διάστασης, οπότε είναι συμπαγές.

Πρόταση 5.26 *Έστω χώροι X, Y με νόρμα, $\dim(Y) = +\infty$ και $T \in L(X,Y)$. Αν ο T είναι συμπαγής, τότε το $T(B_X)$ έχει κενό εσωτερικό. Ειδικότερα, αν ο T είναι τοπολογικός ισομορφισμός, τότε ο T δεν είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Άμεση από την Πρόταση 3.19.

Θεώρημα 5.14 *(Schauder) Έστω χώροι X, Y με νόρμα και τελεστής $T \in L(X,Y)$. Αν ο T είναι συμπαγής τότε ο T' είναι συμπαγής. Αν ο Y είναι πλήρης, τότε ισχύει και το αντίστροφο.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο T είναι συμπαγής. Θεωρούμε την κλειστή μοναδιαία μπάλα B_{Y^*} του Y^* και θα αποδείξουμε ότι το $cl(T'(B_{Y^*}))$ είναι συμπαγές. Το σύνολο $B_{Y^*} = \{y^* \in Y^* | \|y^*\| \leq 1\}$ είναι μία συλλογή συναρτήσεων $y^* : cl(T(B_x)) \to F$ φραγμένη και ισοσυνεχής σε κάθε σημείο του συμπαγούς $cl(T(B_x))$. Πράγματι, αν πάρουμε οποιοδήποτε $y \in cl(T(B_x))$ έχουμε $|y^*(y)| \leq \|y^*\|\|y\| \leq \|y\|$ για κάθε $y^* \in B_{Y^*}$, οπότε η B_{Y^*} είναι φραγμένη στο y. Επίσης, για κάθε $\epsilon > 0$ παίρνουμε $U = \{u \in cl(T(B_x)) | \|u - y\| < \epsilon\}$ και τότε $|y^*(u) - y^*(y)| \leq \|y^*\|\|u - y\| < \epsilon$ για κάθε $y^* \in B_{Y^*}$. Άρα η B_{Y^*} είναι ισοσυνεχής στο y.

Από το Θεώρημα Arzelà-Ascoli συνεπάγεται ότι για κάθε ακολουθία $\{y_n^*\} \in B_{Y^*}$ υπάρχει $\{y_{n_k}^*\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $cl(T(B_x))$ σε κάποια συνάρτηση $f \in C(cl(T(B_x)))$. Συνεπάγεται ότι η $\{y_{n_k}^*\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $T(B_x)$ στη συνάρτηση f και, επομένως, η $\{y_{n_k}^* \circ T\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο B_X στη συνάρτηση $g = f \circ T$. Δηλαδή, $T'y_{n_k}^* \to g$ ομοιόμορφα στο B_X. Αυτό σημαίνει, ειδικώτερα, ότι $T'y_{n_k}^*(x) \to g(x)$ για κάθε $x \in B_X$ και, επομέ-νως, $T'y_{n_k}^*(x) = \|x\|T'y_{n_k}^*(\frac{x}{\|x\|}) \to \|x\|g(\frac{x}{\|x\|})$ για κάθε $x \in X$. Άρα η $T'y_{n_k}^*$ συγκλίνει κατά σημείο στον X σε κάποια συνάρτηση $x^* : X \to F$. Η x^* είναι, προφανώς, γραμμικό συναρτησοειδές του X και το ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο B_X συνεπάγεται ότι $\|T'y_{n_k}^* - x^*\| = \sup_{x \in B_X} |T'y_{n_k}^*(x) - x^*(x)| \to 0$. Δηλαδή, $T'y_{n_k}^* \to x^*$ στον X^*.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\{y_n^*\} \in B_{Y^*}$ υπάρχει $\{y_{n_k}^*\}$ ώστε η $\{T'y_{n_k}^*\}$ να συγκλίνει στον X^*. Από την Πρόταση 5.23(1) συνεπάγεται ότι ο T' είναι συμπαγής.

Έστω, αντιστρόφως, ότι ο Y είναι πλήρης και ότι ο T' είναι συμπαγής. Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι ο $T'' : X^{**} \to Y^{**}$ είναι συμπαγής, οπότε το $cl(T''(B_{X^{**}}))$ είναι συμπαγές στον Y^{**}.

Θα αποδείξουμε (όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.10) ότι, αν J_X και J_Y είναι οι φυσιολογικές εμφυτεύσεις των X και Y στους X^{**} και Y^{**}, αντιστοίχως, τότε $T'' \circ J_X = J_Y \circ T$. Πράγματι, για κάθε $x \in X$ και κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $T''(J_X x)(y^*) = (J_X x)(T'y^*) = T'y^*(x) = y^*(Tx) = J_Y(Tx)(y^*)$, οπότε $T''(J_X x) = J_Y(Tx)$, οπότε $T'' \circ J_X = J_Y \circ T$.

Από την τελευταία σχέση και από το ότι $J_X(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$ συνεπάγεται ότι $J_Y(T(B_X)) = T''(J_X(B_X)) \subseteq T''(B_{X^{**}}) \subseteq cl(T''(B_{X^{**}}))$. Το τελευταίο σύνολο είναι συμπαγές και, επομένως, ολικά φραγμένο. Άρα και το $J_Y(T(B_X))$ είναι ολικά φραγμένο. Επειδή η J_Y είναι ισομετρική εμφύτευση, συνεπάγεται ότι το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο στον Y. Τέλος, επειδή ο Y είναι πλήρης, το $cl(T(B_X))$ είναι ολικά φραγμένο και πλήρες, οπότε είναι συμπαγές. Άρα ο T είναι συμπαγής.

Παραδείγματα.

1. Θεωρούμε τον τελεστή $T : l^p \to l^p$ με τύπο $Tx = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$. Η ακολουθία $\{\kappa_k\}$ στο F είναι φραγμένη, οπότε ο T είναι φραγμένος. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν $\kappa_k \to 0$.

Αν η $\{\kappa_k\}$ δε συγκλίνει στο 0, τότε υπάρχει $\lambda \neq 0$ και $\{k_l\}$ ώστε $\kappa_{k_l} \to \lambda$. Άρα για κάθε l, m με $l \neq m$ έχουμε ότι $\|Te_{k_l} - Te_{k_m}\|_p = \|\kappa_{k_l} e_{k_l} - \kappa_{k_m} e_{k_m}\|_p \geq |\lambda|\|e_{k_l} - e_{k_m}\|_p - |\kappa_{k_l} - \lambda|\|e_{k_l}\|_p - |\kappa_{k_m} - \lambda|\|e_{k_m}\|_p = 2^{\frac{1}{p}}|\lambda| - |\kappa_{k_l} - \lambda| - |\kappa_{k_m} - \lambda|$. Επομένως, δεν υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία της $\{Te_{k_l}\}$ και ο T δεν είναι συμπαγής.

Τώρα, έστω ότι $\kappa_k \to 0$. Θεωρούμε για κάθε n τον τελεστή $T_n : l^p \to l^p$ με τύπο $T_n x = (\kappa_1 x_1, \ldots, \kappa_n x_n, 0, 0, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$. Είναι προφανές ότι $R(T_n) \subseteq < \{e_1, \ldots, e_n\} >$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.25, κάθε T_n είναι συμπαγής. Ακόμη, έχουμε για κάθε $x \in l^p$ ότι $\|T_n x - Tx\|_p \leq \sup_{k \geq n+1} |\kappa_k| \|x\|_p$, οπότε $\|T_n - T\| \leq \sup_{k \geq n+1} |\kappa_k| \to 0$. Από την Πρόταση 5.24(2) συνεπάγεται ότι ο T είναι συμπαγής.

2. Το παράδειγμα αυτό αφορά σε ολοκληρωτικό τελεστή σε χώρο συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.15 *Έστω συμπαγείς, Hausdorff τοπολογικοί χώροι X, Y, συνάρτηση $K : X \times Y \to F$ συνεχής στο $X \times Y$ και Borel-μέτρο μ στον X (με τιμές στο F). Τότε ο τελεστής, που ορίζεται με τον τύπο*

$$Tf(y) = \int_X K(x,y) f(x)\, d\mu(x)$$

για κάθε $y \in Y$, είναι συμπαγής τελεστής από τον $C(X)$ στον $C(Y)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχούσα $f \in C(X)$, $y \in Y$ και $\epsilon > 0$. Επειδή η K είναι συνεχής στο $X \times Y$, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές U_x του x και V_x του y ώστε $|K(x', y') - K(x, y)| < \epsilon$ για κάθε $x' \in U_x$ και $y' \in V_x$. Βρίσκουμε $x_1, \ldots, x_n \in X$ ώστε $X = \cup_{j=1}^n U_{x_j}$ και θέτουμε $V_y = \cap_{j=1}^n V_{x_j}$. Τότε, $|K(x, y') - K(x, y)| < \epsilon$ για κάθε $x \in X$ και $y' \in V_y$. Άρα, για κάθε $y' \in V_y$ ισχύει $|Tf(y') - Tf(y)| \leq \int_X |K(x, y') - K(x, y)||f(x)|\, d|\mu|(x) \leq \|\mu\| \|f\|_u \epsilon$ και, επομένως, η Tf είναι συνεχής στο y. Άρα ο T είναι συνάρτηση του $C(X)$ στον $C(Y)$, είναι (προφανώς) γραμμικός και είναι φραγμένος διότι $|Tf(y)| \leq \int_X |K(x,y)||f(y)|\, d|\mu|(x) \leq \|K\|_u \|\mu\| \|f\|_u$, οπότε $\|Tf\|_u \leq \|K\|_u \|\mu\| \|f\|_u$ για κάθε $f \in C(X)$.

Απομένει να αποδείξουμε ότι η κλειστή θήκη του $T(B_{C(X)})$ στον $C(Y)$ είναι συμπαγής. Σύμφωνα με το Θεώρημα Arzelà-Ascoli, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $T(B_{C(X)})$ είναι φραγμένο και ισοσυνεχές σε κάθε $y \in Y$. Όμως, και τα δύο αυτά τα έχουμε ήδη αποδείξει: πρώτον, για τυχόν y και για κάθε $f \in B_{C(X)}$ έχουμε $|Tf(y)| \leq \|K\|_u \|\mu\|$ και, δεύτερον, για τυχόν y και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή V_y του y ώστε $|Tf(y') - Tf(y)| \leq \|\mu\| \epsilon$ για κάθε $f \in B_{C(X)}$ και κάθε $y' \in V_y$.

3. Ένα ακόμη παράδειγμα ολοκληρωτικού τελεστή.

Θεώρημα 5.16 *Έστω $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Θεωρούμε το χώρο μέτρου $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ και μετρήσιμη συνάρτηση $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \to F$. Υποθέτουμε ότι*

$$\Big(\int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K(a,b)|^p \, d\mu_2(b) \big)^{\frac{q}{p}} d\mu_1(a) \Big)^{\frac{1}{q}} = M < +\infty.$$

Τότε, ορίζεται ο τελεστής $T : L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ με τύπο

$$Tf(b) = \int_{\Omega_1} K(a,b) f(a)\, d\mu_1(a)$$

για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$, και ο T είναι συμπαγής με

$$\|T\| \leq M.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε, προσωρινά, ότι τα μ_1 και μ_2 είναι πεπερασμένα μέτρα και ότι η f και η K είναι φραγμένες συναρτήσεις. Τότε, για κάθε $b \in \Omega_2$ θέτουμε $h(b) = \int_{\Omega_1} |K(a,b)f(a)|\, d\mu_1(a)$, οπότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Tonelli και, κατόπιν, την ανισότητα Hölder, βρίσκουμε ότι $\int_{\Omega_2} h(b)^p\, d\mu_2(b) = \int_{\Omega_2} h(b)h(b)^{p-1}\, d\mu_2(b) = \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K(a,b)|h(b)^{p-1}\, d\mu_2(b)\big)|f(a)|\, d\mu_1(a) \leq \big(\int_{\Omega_2} h(b)^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{1}{q}} \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K(a,b)^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{1}{p}} |f(a)|\, d\mu_1(a)$.

Επομένως, $\big(\int_{\Omega_2} h(b)^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K(a,b)^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{1}{p}} |f(a)|\, d\mu_1(a) \leq \Big(\int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K(a,b)|^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{q}{p}}\, d\mu_1(a)\Big)^{\frac{1}{q}} \big(\int_{\Omega_1} |f(a)|^p\, d\mu_1(a)\big)^{\frac{1}{p}}$.

Αν οι προσωρινές υποθέσεις δεν ισχύουν, παίρνουμε σύνολα $\Omega_1^{(N)}$ και $\Omega_2^{(N)}$ με $\mu_1(\Omega_1^{(N)}) < +\infty$ και $\mu_2(\Omega_2^{(N)}) < +\infty$ για κάθε N, ώστε $\Omega_1^{(N)} \uparrow \Omega_1$ και $\Omega_2^{(N)} \uparrow \Omega_2$, και θέτουμε $f_N = \min(N, f)$ και $K_N = \min(N, K)$. Γράφουμε την ανισότητα στην οποία καταλήξαμε για τα $\Omega_1^{(N)}$, $\Omega_2^{(N)}$, f_N, K_N και το αντίστοιχο h_N και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης. Συμπεραίνουμε ότι γενικά ισχύει $\big(\int_{\Omega_2} h(b)^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{1}{p}} \leq M\big(\int_{\Omega_1} |f(a)|^p\, d\mu_1(a)\big)^{\frac{1}{p}}$.

Αν $f \in L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, τότε $h(b) < +\infty$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$. Συνεπάγεται ότι το $Tf(b) = \int_{\Omega_1} K(a,b)f(a)\, d\mu_1(a)$ ορίζεται για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$ και $\big(\int_{\Omega_2} |Tf(b)|^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{1}{p}} \leq M\big(\int_{\Omega_1} |f(a)|^p\, d\mu_1(a)\big)^{\frac{1}{p}}$.

Άρα ο $T : L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leq M$.

Για να αποδείξουμε ότι ο T είναι συμπαγής αρκεί, σύμφωνα με τις Προτάσεις 5.24(2) και 5.25, να αποδείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $S : L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ με $dim(R(S)) < +\infty$ ώστε $\|T - S\| < \epsilon$. Είναι προφανές, διασπώντας την K στο πραγματικό και στο αρνητικό μέρος της και καθένα από αυτά στο θετικό και στο αρνητικό μέρος του, ότι αρκεί να υποθέσουμε πως $K(a,b) \geq 0$ για κάθε $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Θεωρούμε, όπως πριν, τα $\Omega_1^{(N)}$, $\Omega_2^{(N)}$ και $K_N = \min(N, K)$ και θέτουμε $K^{(N)}(a,b) = K_N(a,b)\chi_{\Omega_1^{(N)}}(a)\chi_{\Omega_2^{(N)}}(b)$. Αν $T^{(N)}$ είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής που ορίζεται με την συνάρτηση $K^{(N)}$, τότε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι $\|T - T^{(N)}\| \leq \Big(\int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K(a,b) - K^{(N)}(a,b)|^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{q}{p}}\, d\mu_1(a)\Big)^{\frac{1}{q}} \to 0$. Άρα υπάρχει N ώστε $\|T - T^{(N)}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Κατόπιν, θεωρούμε τα σύνολα $C_{m,M} = \{(a,b) | \frac{m-1}{M}N < K^{(N)}(a,b) \leq \frac{m}{M}N\}$ για $1 \leq m \leq M$ και θέτουμε $L_M = N\sum_{m=1}^{M} \frac{m}{M}\chi_{C_{m,M}}$. Αν S_M είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής που ορίζεται με την συνάρτηση L_M, τότε έχουμε $\|T^{(N)} - S_M\| \leq \Big(\int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} |K^{(N)}(a,b) - L_M(a,b)|^p\, d\mu_2(b)\big)^{\frac{q}{p}}\, d\mu_1(a)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{N}{M}(\mu_1(\Omega_1^{(N)}))^{\frac{1}{q}}(\mu_2(\Omega_2^{(N)}))^{\frac{1}{p}}$. Άρα, υπάρχει M ώστε $\|T^{(N)} - S_M\| < \frac{\epsilon}{3}$. Τέλος, για κάθε $C_{m,M}$ υπάρχουν $C_{m,M,k}$ καθένα από τα οποία είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ξένων ανά δύο συνόλων της μορφής $A_1 \times A_2$ με $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$ ώστε $\chi_{C_{m,M,k}} \uparrow \chi_{C_{m,M}}$ σχεδόν παντού στο $\Omega_1 \times \Omega_2$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$\|S_M - S_{M,k}\| \to 0$ αν $S_{M,k}$ είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής που ορίζεται με την συνάρτηση $L_{M,k} = N \sum_{m=1}^{M} \frac{m}{M} \chi_{C_{m,M,k}}$.

Ορίζουμε $S = S_{M,k}$, όπου το k είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $\|S_M - S_{M,k}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Επομένως, $\|T - S\| < \epsilon$ και είναι εύκολο να δούμε ότι $\dim(R(S)) < +\infty$. Πράγματι, ο S είναι γραμμικός συνδυασμός ολοκληρωτικών τελεστών της μορφής $Uf(b) = \int_{\Omega_1} \chi_{A_1 \times A_2}(a,b) f(a)\, d\mu_1(a) = \big(\int_{A_1} f(a)\, d\mu_1(a)\big)\chi_{A_2}(b)$ και παρατηρούμε ότι $R(U) \subseteq < \{\chi_{A_2}\} >$.

5.14 Φάσματα συμπαγών τελεστών

Λήμμα 5.5 *(F. Riesz) Έστω χώρος X με νόρμα, συμπαγής $T \in L(X)$ και $\lambda \in F$ με $\lambda \neq 0$. Τότε ο $R(\lambda I - T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη: Έστω $\{x_n\}$ στον X με $\lambda x_n - Tx_n \to y$ στον X. Θα αποδείξουμε ότι $y \in R(\lambda I - T)$.

Αν $y = 0$, τότε έχουμε τελειώσει, οπότε υποθέτουμε ότι $y \neq 0$. Επειδή ο $N(\lambda I - T)$ είναι κλειστός, συνεπάγεται ότι, από κάποιον δείκτη και πέρα, ισχύει $x_n \notin N(\lambda I - T)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_n \notin N(\lambda I - T)$ για κάθε n.

Θέτουμε $d_n = \inf_{w \in N(\lambda I - T)} \|x_n - w\|$, οπότε $d_n > 0$ και παίρνουμε $w_n \in N(\lambda I - T)$ ώστε $d_n \leq \|x_n - w_n\| \leq 2d_n$.

Αν η $\{d_n\}$ είναι φραγμένη, τότε, λόγω της συμπάγειας του T, υπάρχει $\{n_k\}$ ώστε να υπάρχει το $\lim T(x_{n_k} - w_{n_k})$ στον X. Επειδή $\lambda(x_{n_k} - w_{n_k}) - T(x_{n_k} - w_{n_k}) \to y$, συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim \lambda(x_{n_k} - w_{n_k})$ στον X οπότε, επειδή $\lambda \neq 0$, υπάρχει και το $x = \lim(x_{n_k} - w_{n_k})$ στον X. Λόγω συνέχειας του T, έχουμε ότι $\lambda x - Tx = y$ και, επομένως, $y \in R(\lambda I - T)$.

Αν η $\{d_n\}$ δεν είναι φραγμένη, τότε υπάρχει $\{n_k\}$ ώστε $\|x_{n_k} - w_{n_k}\| \to +\infty$. Από τη σχέση $\lambda(x_{n_k} - w_{n_k}) - T(x_{n_k} - w_{n_k}) \to y$ παίρνουμε $\lambda \frac{x_{n_k} - w_{n_k}}{\|x_{n_k} - w_{n_k}\|} - T(\frac{x_{n_k} - w_{n_k}}{\|x_{n_k} - w_{n_k}\|}) \to 0$. Θέτουμε $z_k = \frac{x_{n_k} - w_{n_k}}{\|x_{n_k} - w_{n_k}\|}$, οπότε, πάλι λόγω συμπάγειας του T, υπάρχει $\{k_l\}$ ώστε να υπάρχει το $\lim T(z_{k_l})$ στον X. Από την $\lambda z_{k_l} - Tz_{k_l} \to 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim \lambda z_{k_l}$ στον X και, επειδή $\lambda \neq 0$, υπάρχει το $z = \lim z_{k_l}$ στον X. Λόγω συνέχειας του T βρίσκουμε $\lambda z - Tz = 0$, δηλαδή $z \in N(\lambda I - T)$.

Όμως, τώρα, έχουμε ότι $\frac{1}{2} \leq \frac{d_{n_{k_l}}}{\|x_{n_{k_l}} - w_{n_{k_l}}\|} \leq \frac{\big\|x_{n_{k_l}} - w_{n_{k_l}} - \|x_{n_{k_l}} - w_{n_{k_l}}\| z\big\|}{\|x_{n_{k_l}} - w_{n_{k_l}}\|} = \|z_{n_{k_l}} - z\| \to 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Θεώρημα 5.17 *Έστω χώρος Banach X, συμπαγής $T \in L(X)$ και $\lambda \in F$ με $\lambda \neq 0$. Αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή του T, τότε το λ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T.*

Απόδειξη: Αν αποδείξουμε ότι $R(\lambda I - T) = X$, τότε ο $\lambda I - T : X \to X$ θα είναι 1-1, επί και φραγμένος, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, θα έχει φραγμένο αντίστροφο. Άρα το λ θα ανήκει στο αναλύον σύνολο του T.

Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι ο $R(\lambda I - T)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του X και θα μελετήσουμε τους υπόχωρους $Y_n = R\big((\lambda I - T)^n\big)$ για $n \geq 1$.

(i) Κάθε Y_n είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Για $n = 1$, αυτό είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου λήμματος. Όμως, και για κάθε άλλο n παρατηρούμε ότι ο $(\lambda I - T)^n = \lambda^n I - T[n\lambda^{n-1}I - \cdots + (-1)^{n-2}n\lambda T^{n-2} + (-1)^{n-1}T^{n-1}]$ έχει τη μορφή $\mu I - S$, όπου $\mu \neq 0$ και ο S είναι συμπαγής ως γινόμενο συμπαγούς και φραγμένου τελεστή. Άρα, από το προηγούμενο λήμμα συνεπάγεται ότι κάθε $Y_n = R(\mu I - S)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

(ii) Για κάθε n, ο Y_{n+1} είναι γνήσιος υπόχωρος του Y_n.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $Y_{n+1} = R\big((\lambda I - T)^{n+1}\big) = (\lambda I - T)^{n+1}(X) = (\lambda I - T)\big((\lambda I - T)^n(X)\big) = (\lambda I - T)\big(R\big((\lambda I - T)^n\big)\big) = (\lambda I - T)(Y_n)$ για κάθε n. Επειδή ο $Y_1 = R(\lambda I - T)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του X και ο T είναι 1-1, συνεπάγεται ότι ο $Y_2 = (\lambda I - T)(Y_1)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $(\lambda I - T)(X) = Y_1$. Αν υποθέσουμε ότι ο Y_{n+1} είναι γνήσιος υπόχωρος του Y_n, τότε, επειδή ο $\lambda I - T$ είναι 1-1, ο $Y_{n+2} = (\lambda I - T)(Y_{n+1})$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $(\lambda I - T)(Y_n) = Y_{n+1}$.

Από το Θεώρημα 3.16, λόγω των (i) και (ii), συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει $y_n \in Y_n$ με $\|y_n\| = 1$ και $\inf_{y \in Y_{n+1}} \|y_n - y\| > \frac{1}{2}$.

Τώρα, γράφουμε $Ty_m - Ty_n = \lambda y_m - \big[\lambda y_n + (\lambda I - T)y_m - (\lambda I - T)y_n\big]$ και παρατηρούμε ότι, αν $n > m$ το $\big[\lambda y_n + (\lambda I - T)y_m - (\lambda I - T)y_n\big]$ είναι στοιχείο του Y_{m+1}. Άρα $\|Ty_m - Ty_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2}$, οπότε δεν υπάρχει $\{n_k\}$ ώστε να συγκλίνει η $\{Ty_{n_k}\}$. Αυτό αντιφάσκει με τη συμπάγεια του T.

Το θεώρημα αυτό λέει ότι, αν ο $T \in L(X)$ είναι συμπαγής, τότε όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία του $\sigma(T)$ (αν υπάρχουν τέτοια) είναι ιδιοτιμές. Δηλαδή, $\sigma(T) \setminus \{0\} = P_\sigma(T) \setminus \{0\}$.

Λήμμα 5.6 *Έστω χώρος X με νόρμα και $T \in L(X)$. Αν A είναι σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του T τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές του T, τότε το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη: Έστω ότι το A είναι γραμμικά εξηρτημένο και έστω n το ελάχιστο πλήθος γραμμικά εξηρτημένου υποσυνόλου του A. Τότε $n \geq 2$, αφού κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι μη-μηδενικό. Έστω, λοιπόν, γραμμικά εξηρτημένο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές του T που αντιστοιχούν στα $x_1, \ldots, x_n$.

Υποθέτουμε ότι $\kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_n x_n = 0$ με $\kappa_n \neq 0$. Τότε $\kappa_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \kappa_n\lambda_n x_n = T(\kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_n x_n) = 0$, οπότε $\kappa_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \kappa_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = 0$. Από τον τρόπο επιλογής του n συνεπάγεται ότι όλοι οι συντελεστές στην τελευταία ισότητα είναι ίσοι με 0 και, επειδή οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές ανά δύο, συνεπάγεται ότι $\kappa_1 = \ldots = \kappa_{n-1} = 0$. Αυτό είναι άτοπο.

Λήμμα 5.7 *Έστω χώρος X με νόρμα και συμπαγής τελεστής $T \in L(X)$. Αν το $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και όλα τα στοιχεία του είναι ιδιοδιανύ-*

σματα του T, όπου για κάθε n είναι λ_n η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο x_n, τότε η $\{\lambda_n\}$ δε συγκλίνει σε μη-μηδενικό στοιχείο του F.

Απόδειξη: Έστω $\lambda_n \to \lambda$ και $\lambda \neq 0$. Θέτουμε $X_n =< \{x_1, \dots, x_n\} >$, οπότε κάθε X_n είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X_{n+1}. Από το Θεώρημα 3.16 έχουμε ότι για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει $y_n \in X_n$ ώστε $\|y_n\| = 1$ και $\inf_{y \in X_{n-1}} \|y_n - y\| > \frac{1}{2}$.

Τότε $Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \left[\lambda_m y_m + (\lambda_n I - T)y_n - (\lambda_m I - T)y_m\right]$ και παρατηρούμε ότι, αν $n > m \geq 2$, τότε το $\lambda_m y_m + (\lambda_n I - T)y_n - (\lambda_m I - T)y_m$ είναι στοιχείο του X_{n-1}. Πράγματι, αν θέσουμε $y_n = \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_n x_n$, τότε $(\lambda_n I - T)y_n = (\lambda_n - \lambda_1)\kappa_1 x_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\kappa_{n-1} x_{n-1} \in X_{n-1}$ και, ομοίως, $(\lambda_m I - T)y_m \in X_{m-1} \subseteq X_{n-1}$.

Άρα, αν $n > m \geq 2$, τότε $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{|\lambda_n|}{2}$, οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση με τη συμπάγεια του T, αφού $\lambda_n \to \lambda \neq 0$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει σχεδόν όλη την πληροφορία για το φάσμα συμπαγούς τελεστή.

Θεώρημα 5.18 *(F.Riesz–Schauder) Έστω χώρος Banach X και συμπαγής $T \in L(X)$. Τότε*
(1) Αν $\dim(X) = +\infty$, τότε το 0 είναι στοιχείο του $\sigma(T)$.
(2) Το $\sigma(T)$ είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο. Στη δεύτερη περίπτωση, τα στοιχεία του αποτελούν ακολουθία η οποία συγκλίνει στο 0.
(3) Κάθε $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή πεπερασμένης πολλαπλότητας.
(4) Αν $\lambda \neq 0$, τότε το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν είναι ιδιοτιμή του T' και με την ίδια πολλαπλότητα.
(5) Αν $\lambda \neq 0$, τότε $R(\lambda I - T) = {}^{\perp}N(\lambda I - T')$.
(6) Αν $\lambda \neq 0$, τότε $R(\lambda I - T') = N(\lambda I - T)^{\perp}$.

Απόδειξη: (1) Αν το 0 δεν ανήκει στο $\sigma(T)$, τότε ο T είναι τοπολογικός ισομορφισμός του X με τον εαυτό του και αυτό αντίκειται στο συμπέρασμα της Πρότασης 5.26.
(2) Άν το σύνολο $\sigma_n(T) = \sigma(T) \cap \{\lambda \in F | \frac{r_\sigma(T)}{n} \leq |\lambda| \leq r_\sigma(T)\}$ ήταν άπειρο, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.17, θα υπήρχε ακολουθία διαφορετικών ανά δύο ιδιοτιμών του T με μη-μηδενικό όριο. Από τα δύο τελευταία λήμματα συνεπάγεται ότι αυτό είναι αδύνατο, οπότε το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο. Επειδή $\sigma(T) \setminus \{0\} = \cup_{n=1}^{+\infty} \sigma_n(T)$, αποδείχθηκε το (2).
(3) Αν $\lambda \neq 0$ και η διάσταση του $N(\lambda I - T)$ είναι άπειρη, τότε υπάρχει αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του T για την ίδια μη-μηδενική ιδιοτιμή. Αυτό αντιφάσκει με το τελευταίο λήμμα.
Η απόδειξη των (5) και (6) είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.5 και του Θεωρήματος Κλειστού Συνόλου Τιμών.
(4) Από την Πρόταση 5.20 συνεπάγεται ότι $\sigma(T) = \sigma(T')$ και, επομένως, $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma(T') \setminus \{0\}$. Το Θεώρημα 5.14 λέει ότι ο T' είναι συμπαγής, οπότε από το Θεώρημα 5.17 συνεπάγεται ότι, αν $\lambda \neq 0$, τότε το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν είναι ιδιοτιμή του T'.

Απομένει να αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda \neq 0$ ισχύει $\dim(N(\lambda I - T)) = \dim(N(\lambda I - T'))$.

Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή των T, T' και θέτουμε $n = \dim(N(\lambda I - T)) < +\infty$ και $m = \dim(N(\lambda I - T')) < +\infty$.

Θα καταλήξουμε σε άτοπο αν $n < m$. Έστω, λοιπόν, βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $N(\lambda I - T)$ και βάση $\{y_1^*, \ldots, y_m^*\}$ του $N(\lambda I - T')$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ και από το Λήμμα 4.4 συνεπάγεται ότι υπάρχουν $y_1, \ldots, y_m$ ώστε $y_i^*(y_j) = \delta_{ij}$.

Ορίζουμε το γραμμικό τελεστή $U : X \to X$ με τύπο $Ux = x_1^*(x)y_1 + \cdots + x_n^*(x)y_n$ για κάθε $x \in X$. Ο U είναι φραγμένος, διότι $\|Ux\| \leq |x_1^*(x)|\|y_1\| + \cdots + |x_n^*(x)|\|y_n\| \leq (\|x_1^*\|\|y_1\| + \cdots + \|x_n^*\|\|y_n\|)\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επειδή $R(U) \subseteq < \{y_1, \ldots, y_n\} >$, από την Πρόταση 5.25 συνεπάγεται ότι ο U είναι συμπαγής, οπότε και ο $S = T + U$ είναι συμπαγής.

Ισχύει ότι $N(\lambda I - S) = \{0\}$. Πράγματι, έστω $x \in N(\lambda I - S)$, οπότε $x_1^*(x)y_1 + \cdots + x_n^*(x)y_n = \lambda x - Tx \in R(\lambda I - T) = {}^{\perp}N(\lambda I - T')$. Τότε, για κάθε i έχουμε $x_i^*(x) = y_i^*(x_1^*(x)y_1 + \cdots + x_n^*(x)y_n) = 0$, οπότε $\lambda x - Tx = 0$. Άρα $x \in N(\lambda I - T)$, οπότε $x = \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_n x_n$ για κάποια $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$. Τώρα, για κάθε i έχουμε $\kappa_i = x_i^*(\kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_n x_n) = x_i^*(x) = 0$, οπότε $x = 0$.

Επομένως, το λ δεν είναι ιδιοτιμή του συμπαγούς S, οπότε από το Θεώρημα 5.17 συνεπάγεται ότι $R(\lambda I - S) = X$. Άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $y_m = (\lambda I - T)x - Ux$. Τότε $y_m + x_1^*(x)y_1 + \cdots + x_n^*(x)y_n = (\lambda I - T)x \in R(\lambda I - T) = {}^{\perp}N(\lambda I - T')$ και, επομένως, $1 = y_m^*(y_m + x_1^*(x)y_1 + \cdots + x_n^*(x)y_n) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\dim(N(\lambda I - T')) \leq \dim(N(\lambda I - T))$ και, εφαρμόζοντάς το στο συμπαγή T', παίρνουμε $\dim(N(\lambda I - T'')) \leq \dim(N(\lambda I - T')) \leq \dim(N(\lambda I - T))$.

Όμως, αν J είναι η φυσιολογική εμφύτευση του X στον X^{**} και $Q \in L(X)$, έχουμε αποδείξει δύο φορές μέχρι τώρα ότι $Q'' \circ J = J \circ Q$ (δείτε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 5.10 και 5.14). Συνεπάγεται αμέσως ότι $J(N(\lambda I - T)) \subseteq N(\lambda I - T'')$, οπότε $\dim(N(\lambda I - T)) = \dim(J(N(\lambda I - T))) \leq \dim(N(\lambda I - T''))$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\dim(N(\lambda I - T)) = \dim(N(\lambda I - T'))$.

5.15 Ασκήσεις

1. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστός υπόχωρος Y του X ώστε $T = P_Y$ αν και μόνον αν $T^2 = T$ και $(Tx|z) = (x|Tz)$ για κάθε $x, z \in X$.

2. Έστω χώροι Hilbert X, Y και $T \in L(X, Y)$.
(1) Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $T^* \in L(Y, X)$ ώστε $(Tx|y) = (x|T^*y)$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.
(Υπόδ.: Δείτε το $(T(\cdot)|y)$ ως συναρτησοειδές του X.)
(2) Αποδείξτε ότι $\|T\| = \|T^*\|$.
(3) Βρείτε τη σχέση ανάμεσα στον T^* και στον T'.

Ορισμός: *Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Ο τελεστής T^*, ο οποίος*

ορίσθηκε στην προηγούμενη άσκηση, ονομάζεται ***συζυγής του*** *T.*
Αν $T = T^*$, τότε ο T ονομάζεται ***αυτοσυζυγής****.*

3. Έστω χώροι X, Y με νόρμα και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αποδείξτε ότι ο $T : X \to R(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν υπάρχει $c > 0$ ώστε $c\|x\| \leq \|Tx\|$ για κάθε $x \in X$.

4. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αν υπάρχει $c > 0$ ώστε $\Re(Tx|x) \geq c\|x\|^2$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι $R(T^*) = X$.

5. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι οι $I + T^*T$ και $I + TT^*$ είναι αυτοσυζυγείς και έχουν φραγμένους αντίστροφους.
(Υπόδ.: Βρείτε $c > 0$ ώστε $((I + T^*T)x|x) \geq c\|x\|^2$ και χρησιμοποιείστε την άσκηση 120. Κατόπιν, πρέπει να αποδείξετε ότι ο $R(I + T^*T)$ είναι κλειστός και, τέλος, ότι $R(I + T^*T) = X$.)

6. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, δείξτε ότι $\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |(Tx|x)|$.

7. Έστω χώρος Hilbert X και $B : X \times X \to F$ με τις ιδιότητες:
(i) $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$ και $B(\kappa x, z) = \kappa B(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ και $\kappa \in F$,
(ii) $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$ και $B(x, \kappa z) = \overline{\kappa} B(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ και $\kappa \in F$,
(iii) υπάρχει $C > 0$ ώστε $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x, y \in X$,
(iv) υπάρχει $c > 0$ ώστε $B(x, x) \geq c\|x\|^2$ για κάθε $x \in X$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει $S \in L(X)$ με φραγμένο αντίστροφο $S^{-1} \in L(X)$ με $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ και $\|S\| \leq C$ ώστε $B(x, y) = (x|Sy)$ για κάθε $x, y \in X$.

8. Έστω χώροι X, Y με νόρμα. Αν ο $L(X, Y)$ είναι πλήρης, αποδείξτε ότι ο Y είναι πλήρης.

9. Έστω χώρος Banach X και χώρος Y με νόρμα. Αν ο $T \in L(X, Y)$ είναι επί του Y και ανοικτή απεικόνιση, αποδείξτε ότι ο Y είναι πλήρης.

10. Έστω χώροι X, Y με νόρμα και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αν $y^* \circ T \in X^*$ για κάθε $y^* \in Y^*$, αποδείξτε ότι $T \in L(X, Y)$.

11. Έστω χώροι X, Y με νόρμα ένας τουλάχιστον εκ των οποίων είναι χώρος Banach. Αν η $B : X \times Y \to F$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $B(x, \cdot) \in Y^*$ και για κάθε $y \in Y$ ισχύει $B(\cdot, y) \in X^*$, αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.
(Υπόδ.: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.)

12. Έστω χώρος X με νόρμα και $\{x_n\}$ στον X με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^*(x_n)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in X^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^*(x_n)| \leq C\|x^*\|$ για κάθε $x^* \in X^*$.

13. Έστω X ένας κλειστός υπόχωρος του $L^1([0,1])$. Αν για κάθε $f \in X$ υπάρχει $p > 1$ ώστε $f \in L^p([0,1])$, αποδείξτε ότι υπάρχει $p > 1$ ώστε $X \subseteq L^p([0,1])$.

14. Έστω $1 \leq p < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $\{S_l^n\}$ συγκλίνει ισχυρά αλλά όχι ομοιόμορφα στον 0 και ότι η $\{S_r^n\}$ συγκλίνει ασθενώς αλλά όχι ισχυρά στον 0.

15. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.
(Υπόδ.: Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης.)

16. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ ώστε ο X να είναι πλήρης και με τις δύο αυτές νόρμες. Υποθέτουμε ότι, αν μία $\{x_n\}$ στον X συγκλίνει στο x ως προς την $\|\cdot\|_1$ και στο x' ως προς την $\|\cdot\|_2$, τότε $x = x'$. Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.
(Υπόδ.: Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.)

17. Έστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $C([0,1])$ με την οποία ο $C([0,1])$ είναι πλήρης. Αν για κάθε $\{f_n\}$ και f στον $C([0,1])$ με $\|f_n - f\| \to 0$ συνεπάγεται ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη νόρμα.

18. Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L^1([0,2])$ και για κάθε $f \in L^1([0,1])$ υπάρχει $F \in X$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0,1])$ υπάρχει $F \in X$ με $\|F\|_1 \leq C\|f\|_1$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f.

19. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X,Y)$. Αν ο $R(T)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι κλειστός.

20. Έστω χώρος Banach X και κλειστοί υπόχωροι Y, Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$. Ορίζουμε τους τελεστές $P_Y, P_Z : X \to X$ με τύπους $P_Y x = y$ και $P_Z x = z$ για κάθε $x \in X$, όπου y, z είναι τα μοναδικά στοιχεία των Y, Z ώστε $x = y + z$. Αποδείξτε ότι $P_Y, P_Z \in L(X)$ και $P_Y^2 = P_Y$, $P_Z^2 = P_Z$, $P_Y P_Z = P_Z P_Y = 0$ και $R(P_Y) = Y, R(P_Z) = Z$.

21. Έστω χώρος Banach X και $\{x_i | i \in \mathbf{N}\}$ μία βάση Schauder του X. Για κάθε n θεωρούμε $P_n : X \to X$ με τύπο $P_n x = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i$ για κάθε $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \kappa_i x_i \in X$. Επίσης, για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $\|x\|' = \sup \|P_n x\|$.
(1) Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X.
(2) Αποδείξτε ότι ο X με την $\|\cdot\|'$ είναι πλήρης.
(3) Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 1$ ώστε $\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$.
(4) Αποδείξτε ότι για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$ ισχύει ότι $\|P_n x - x\| \to 0$ ομοιόμορφα στο K.

22. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X,Y)$. Αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y αν και μόνον αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $\inf_{z \in N(T)} \|x - z\| \leq$

$C\|Tx\|$ για κάθε $x \in X$.

23. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και σε κανένα σημείο του $[0,1]$ παραγωγίσιμη.

24. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι 2π-περιοδική και συνεχής στο $\mathbf{R}$ της οποίας η σειρά-Fourier αποκλίνει σε οποιοδήποτε δοσμένο σημείο.

25. Έστω χώρος Hilbert X και γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ με $(Tx|y) = (x|Ty)$ για κάθε $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι $T \in L(X)$.

26. (1) Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αν για κάθε $x \in X$ η σειρά $x + \sum_{n=1}^{+\infty} T^n x$ συγκλίνει στον X, αποδείξτε ότι ο $I - T$ έχει φραγμένο αντίστροφο.
(Υπόδ.: Είναι προφανές το πώς θα ορισθεί ο $(I-T)^{-1}$. Ίσως χρειασθεί η Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.)
(2) Έστω $K \in C([0,1] \times [0,1])$. Θεωρούμε την **εξίσωση Volterra**: $f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds$, όπου $g \in C([0,1])$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση $f \in C([0,1])$ για κάθε $g \in C([0,1])$.
(Υπόδ.: Θέσατε $Tf(t) = \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds$ για κάθε $t \in [0,1]$ και αποδείξτε επαγωγικά ότι $\|T^n f\|_u \leq \frac{\|K\|_u}{n!} \|f\|_u$.)

27. Έστω χώροι Banach X και Y. Αν U είναι το σύνολο όλων των φραγμένων τελεστών από τον X επί του Y, αποδείξτε ότι το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $L(X,Y)$.

28. Έστω χώρος Banach X, $T \in L(X)$ και πολυώνυμο p. Αποδείξτε ότι $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$.

29. Έστω χώρος Hilbert X και αυτοσυζυγής $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι $\sigma(T) \subseteq \mathbf{R}$, ότι $\max_{\lambda \in \sigma(T)} = \sup_{\|x\| \leq 1} (Tx|x)$ και ότι $\min_{\lambda \in \sigma(T)} = \inf_{\|x\| \leq 1} (Tx|x)$.

30. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbf{C}$ και $S, T \in L(X)$ με $ST = TS$. Αποδείξτε ότι $r_\sigma(S+T) \leq r_\sigma(S) + r_\sigma(T)$ και $r_\sigma(ST) \leq r_\sigma(S) r_\sigma(T)$.

31. Έστω χώρος Banach X, $T \in L(X)$.
(1) Αν το ανοικτό $U \subseteq F$ περιέχει το $\sigma(T)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\sigma(S) \subseteq U$ για κάθε $S \in L(X)$ με $\|S - T\| < \epsilon$.
(Υπόδ.: Η $R(\cdot\,; T)$ είναι φραγμένη στο $F \setminus U$. Παρατηρήστε ότι $\lambda I - S = [I + (T-S) R(\lambda; T)](\lambda I - T)$.)
(2) Αν $T_n \to T$ στον $L(X)$, αποδείξτε ότι $\limsup r_\sigma(T_n) \leq r_\sigma(T)$.

32. Έστω χώρος Banach X και $S, T \in L(X)$. Αν $\lambda \in F \setminus \{0\}$, αποδείξτε ότι $\lambda \in \sigma(ST)$ αν και μόνον αν $\lambda \in \sigma(TS)$.

33. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι $R_\sigma(T) \subseteq P_\sigma(T')$ και $P_\sigma(T) \subseteq P_\sigma(T') \cup R_\sigma(T')$.

34. Έστω οποιοδήποτε συμπαγές $K \subseteq F$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $T \in l^2$ ώστε $\sigma(T) = K$.

35. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι, αν το λ είναι συνοριακό σημείο του $\sigma(T)$, τότε $R(\lambda I - T) \neq X$.

36. Έστω χώροι X, Y με νόρμα και συμπαγής τελεστής $T : X \to Y$. Αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι διαχωρίσιμος.

37. Έστω χώροι X, Y με νόρμα και συμπαγής τελεστής $T : X \to Y$. Αν ο $R(T)$ είναι πλήρης, τότε $\dim(R(T)) < +\infty$.

38. Έστω χώροι X, Y με νόρμα και $T \in L(X, Y)$. Αποδείξτε ότι, αν ο T είναι συμπαγής, τότε η $\{Tx_n\}$ είναι συγκλίνουσα στον Y για κάθε ασθενώς συγκλίνουσα $\{x_n\}$ στον X. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αποδείξτε και το αντίστροφο.
(Υπόδ.: Για το πρώτο ερώτημα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι: αν υπάρχει y ώστε κάθε υποακολουθία μιας $\{y_n\}$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει στο y τότε $y_n \to y$.)

39. Έστω χώροι X, Y με νόρμα με $\dim(X) = +\infty$ και συμπαγής $T \in L(X, Y)$. Αποδείξτε ότι το $0 \in Y$ ανήκει στην κλειστή θήκη του $\{Tx | x \in X, \|x\| = 1\}$.

40. Έστω χώρος X με νόρμα και $T \in L(X)$. Αν $\widehat{X}$ είναι η πλήρωση του X και $\widehat{T} \in L(\widehat{X})$ είναι η μοναδική φραγμένη επέκταση του T στον $\widehat{X}$, αποδείξτε ότι $\sigma(\widehat{T}) = \sigma(T)$. Αν ο T είναι συμπαγής, τότε και ο $\widehat{T}$ είναι συμπαγής και $R(\widehat{T}) \subseteq X$.

41. Έστω χώροι Banach X_1 και X_2 και χώρος Y με νόρμα. Αν $T_1 \in \mathcal{K}(X_1, Y)$, $T_2 \in L(X_2, Y)$ και $R(T_2) \subseteq R(T_1)$, αποδείξτε ότι $T_2 \in \mathcal{K}(X_2, Y)$.

42. Έστω $1 < p < +\infty$ και $\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = K < +\infty$. Αποδείξτε ότι ορίζεται τελεστής $T : l^p \to l^p$ με τύπο $(Tx)_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}x_j$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$ και κάθε $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p$. Αποδείξτε ότι ο T είναι συμπαγής και ότι $\|T\| \leq K$.

43. Έστω χώρος X με νόρμα και χώρος Hilbert Y. Αν $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ αποδείξτε ότι υπάρχουν $T_n \in L(X, Y)$ με $\dim(R(T_n)) < +\infty$ για κάθε n ώστε $\|T_n - T\| \to 0$.