# Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Ανοιξη 2003

# Περιεχόμενα


**1 Μετρικοί χώροι** **5**

1.1 Ορισμός . . . 5
1.2 Παραδείγματα μετρικών χώρων . . . 6
1.3 Τοπολογικές έννοιες . . . 12
1.4 Ασκήσεις . . . 15

**2 Πλήρεις μετρικοί χώροι** **23**

2.1 Ακολουθίες Cauchy - πλήρεις μετρικοί χώροι . . . 23
2.2 Πλήρεις μετρικοί χώροι - παραδείγματα . . . 25
2.3 Πλήρωση μετρικού χώρου* . . . 32
2.4 Το Θεώρημα του Baire . . . 34
2.5 Ασκήσεις . . . 42

**3 Χώροι με νόρμα** **51**

3.1 Γραμμικοί χώροι . . . 51
3.2 Χώροι με νόρμα - Χώροι Banach . . . 54
3.3 Σύγκλιση σειρών . . . 57
3.4 Ασκήσεις . . . 60

**4 Χώροι πεπερασμένης διάστασης** **69**

4.1 Βασικές ιδιότητες . . . 69
4.2 Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση . . . 74
4.3 Ασκήσεις . . . 78

**5 Τελεστές και συναρτησοειδή** **83**

5.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές . . . 83
5.2 Γραμμικά συναρτησοειδή . . . 88
5.3 Χώροι τελεστών - δυϊκοί χώροι . . . 91
5.4 Ασκήσεις . . . 96

**6 Χώροι Hilbert** **107**

6.1 Χώροι Hilbert . . . 107
6.2 Καθετότητα . . . 109

6.3 Ορθογώνιο συμπλήρωμα - προβολές . . . . . . . . . . 112
6.4 Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz . . . . . . . . . . 115
6.5 Ορθοκανονικές βάσεις . . . . . . . . . . 117
6.6 Ασκήσεις . . . . . . . . . . 119

**7 Το Θεώρημα Hahn - Banach 129**
7.1 Το Λήμμα του Zorn . . . . . . . . . . 129
7.2 Το Θεώρημα Hahn - Banach . . . . . . . . . . 131
7.3 Εφαρμογές . . . . . . . . . . 135
7.4 Διαχωριστικά θεωρήματα . . . . . . . . . . 141
7.5 Ασκήσεις . . . . . . . . . . 144

**8 Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach 151**
8.1 Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος . . . . . . . . . . 151
8.2 Το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης . . . . . . . . . . 158
8.3 Το θεώρημα κλειστού γραφήματος . . . . . . . . . . 161
8.4 Ασκήσεις . . . . . . . . . . 162

**9 Το θεώρημα σταθερού σημείου 171**
9.1 Συστολές - θεώρημα σταθερού σημείου . . . . . . . . . . 171
9.2 Εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις . . . . . . . . . . 173
9.3 Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις . . . . . . . . . . 175
9.4 Ασκήσεις . . . . . . . . . . 176

**10 Η ζωή του Stefan Banach 179**
10.1 Τα πρώτα χρόνια . . . . . . . . . . 179
10.2 Η «μεγαλύτερη ανακάλυψη» του Hugo Steinhaus . . . . . . . . . . 182
10.3 Fundamenta Mathematicae . . . . . . . . . . 187
10.4 Τα μαθηματικά στην Lvov: 1919-1929 . . . . . . . . . . 189
10.5 Studia Mathematica . . . . . . . . . . 196
10.6 Scottish Café . . . . . . . . . . 201
10.7 Τα τελευταία χρόνια . . . . . . . . . . 206
10.8 Επίλογος . . . . . . . . . . 210

# Κεφάλαιο 1

# Μετρικοί χώροι

## 1.1 Ορισμός

Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο. Μια απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται *μετρική* στο $X$ (ή *συνάρτηση απόστασης* στο $X$) αν για κάθε $x, y, z \in X$ ικανοποιούνται τα εξής:

(M1) $d(x, y) \geq 0$,

(M2) $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (τριγωνική ανισότητα).

Το ζευγάρι $(X, d)$ λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του $X$ λέγονται *σημεία* του χώρου, και ο αριθμός $d(x, y)$ *απόσταση* του $x$ από το $y$. Οι (M1)$-$(M4) είναι τα *αξιώματα* της μετρικής.

Έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος, και $Y$ ένα μη κενό υποσύνολο του $X$. Θεωρούμε τον περιορισμό της $d$ στο $Y \times Y$. Ορίζουμε δηλαδή $\tilde{d} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in Y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $(Y, \tilde{d})$ είναι μετρικός χώρος: η $\tilde{d}$ ικανοποιεί τα αξιώματα (M1)$-$(M4). Λέμε ότι ο $(Y, \tilde{d})$ είναι ένας *υπόχωρος* του $(X, d)$. Η $\tilde{d}$ είναι η μετρική που *επάγεται* στο $Y$ από την $d$.

Δίνουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα μετρικών χώρων. Κάποια από αυτά είναι ειδικές περιπτώσεις γενικότερων παραδειγμάτων τα οποία θα εξετάσουμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο. Σε κάθε περίπτωση επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα της μετρικής.

(α) **Η πραγματική ευθεία.** Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, με μετρική την

$$d(x, y) = |x - y|.$$

(β) **Ο Ευκλείδειος χώρος**. Θεωρούμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων $m$-άδων $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ πραγματικών αριθμών, με την *Ευκλείδεια μετρική*: αν τα $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ και $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^m$, ορίζουμε

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_m - \eta_m)^2}.$$

(γ) **Ο χώρος ακολουθιών** $\ell_\infty$. Ο χώρος $X = \ell_\infty$ αποτελείται από όλες τις φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών: η ακολουθία $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$ (για συντομία θα γράφουμε $x = (\xi_k)$) ανήκει στον $X$ αν υπάρχει $M_x > 0$ (που εξαρτάται από την ακολουθία $x$) ώστε

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |\xi_k| \leq M_x.$$

Ισοδύναμα,

$$x = (\xi_k) \in X \iff \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Ορίζουμε την απόσταση δύο φραγμένων ακολουθιών $x = (\xi_k), y = (\eta_k)$ ως εξής:

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

(δ) **Ο χώρος συναρτήσεων** $C[a,b]$. Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $X = C[a,b]$ αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (τα *σημεία* του χώρου είναι συναρτήσεις).

Η απόσταση δύο σημείων του χώρου ορίζεται ως εξής: αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, θέτουμε

$$d(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

(το max ορίζεται καλά: η $|f - g|$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή). Ο μετρικός χώρος που ορίζεται έτσι, συμβολίζεται με $C[a,b]$ και λέγεται *χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο* $[a,b]$.

(ε) **Η διακριτή μετρική**. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο $X$, και για κάθε $x, y \in X$ ορίζουμε

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x \neq y, \\ 0 & , \text{αν } x = y. \end{cases}$$

Η $d$ είναι η *διακριτή μετρική* στο σύνολο $X$.

## 1.2 Παραδείγματα μετρικών χώρων

(α) **Ο χώρος** $B(A)$ **των φραγμένων συναρτήσεων στο** $A$. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο $A$. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ανήκει στον $B(A)$ αν και μόνο αν είναι φραγμένη (δηλαδή, αν $\sup\{|f(a)| : a \in A\} < +\infty$.) Αν $f, g \in B(A)$, ορίζουμε την απόστασή τους μέσω της

$$d(f,g) = \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$

Παρατηρήστε πρώτα ότι η απόσταση είναι καλά ορισμένη: αφού $f,g \in B(A)$, υπάρχουν $M_f, M_g > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $a \in A$, $|f(a)| \leq M_f$ και $|g(a)| \leq M_g$. Επομένως, για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$|f(a) - g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq M_f + M_g,$$

δηλαδή

$$0 \leq d(f,g) = \sup_{a\in A} |f(a) - g(a)| \leq M_f + M_g < +\infty.$$

Οι (M2) και (M3) ελέγχονται εύκολα: αν $f,g \in B(A)$, τότε

$$d(f,g) = \sup_{a\in A} |f(a) - g(a)| = \sup_{a\in A} |g(a) - f(a)| = d(g,f),$$

και

$$\begin{aligned} d(f,g) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sup_{a\in A} |f(a) - g(a)| = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{για κάθε } a \in A,\ \ |f(a) - g(a)| = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{για κάθε } a \in A,\ \ f(a) = g(a) \\ &\Rightarrow \quad f \equiv g. \end{aligned}$$

Για την τριγωνική ανισότητα: έστω $f,g,h \in B(A)$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(a) - g(a)| &= |f(a) - h(a) + h(a) - g(a)| \\ &\leq |f(a) - h(a)| + |h(a) - g(a)| \\ &\leq \sup_{a\in A} |f(a) - h(a)| + \sup_{a\in A} |h(a) - g(a)| \\ &= d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$d(f,g) = \sup_{a\in A} |f(a) - g(a)| \leq d(f,h) + d(h,g).$$

(β) **Οι χώροι ακολουθιών** $\ell_p$. Έστω $1 \leq p < \infty$. Τα σημεία του χώρου $\ell_p$ είναι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών $x = (\xi_k)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty.$$

**Ορισμός** (συζυγείς εκθέτες). Έστω $1 < p < +\infty$. Ο *συζυγής εκθέτης* $q$ του $p$ ορίζεται μέσω της

$$(*) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Δηλαδή, $q = p/(p-1)$. Ο $q$ είναι κι αυτός μεγαλύτερος από 1, και λόγω συμμετρίας της $(*)$ ο $p$ είναι με τη σειρά του ο συζυγής εκθέτης του $q$. Λέμε λοιπόν ότι οι $p$ και $q$ είναι *συζυγείς εκθέτες*. Παρατηρούμε ότι, αν $p$ και $q$ είναι συζυγείς εκθέτες,

$$p + q = pq \quad \Rightarrow \quad (p-1)(q-1) = 1.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε $f(t) = t^{p-1}$, $t \in [0,+\infty)$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $g$ της $f$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $g(s) = s^{q-1}$, $s \in [0,+\infty)$. Πράγματι,

$$g(f(t)) = [f(t)]^{q-1} = t^{(p-1)(q-1)} = t.$$

Πριν ορίσουμε την απόσταση δύο σημείων του $\ell_p$, θα δείξουμε δύο κλασικές ανισότητες: την ανισότητα του Hölder και την ανισότητα του Minkowski. Βασικό ρόλο στην απόδειξή τους παίζει η ανισότητα του Young.

**Ανισότητα του Young**. *Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση, με $f(0) = 0$. Αν $g$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f$, τότε για κάθε $a, b > 0$ ισχύει*

$$ab \leq \int_0^a f(t)dt + \int_0^b g(s)ds.$$

**Απόδειξη:** Κάντε ένα σχήμα:

Το γινόμενο $ab$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου. Σε κάθε περίπτωση,

$$ab \leq E_1 + E_2 = \int_0^a f(t)dt + \int_0^b g(s)ds.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $b = f(a)$. $\square$

**Εφαρμογή:** Παίρνουμε $f(t) = t^{p-1}$, $p > 1$. Η αντίστροφη της $f$ είναι η $g(s) = s^{q-1}$, όπου $q$ είναι ο συζυγής εκθέτης του $p$. Από την ανισότητα του Young, για κάθε $a, b > 0$,

$$ab \leq \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^b s^{q-1}ds,$$

δηλαδή

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad , \quad a, b \geq 0. \tag{1}$$

Μια άλλη απόδειξη της ανισότητας (1) μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια των κυρτών και κοίλων συναρτήσεων. Έστω $C$ ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* αν

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

για κάθε $x, y \in C$ και $t \in (0,1)$. Η $f$ λέγεται *γνησίως κυρτή* αν οποτεδήποτε έχουμε ισότητα στην (1) έπεται ότι $x = y$. Η $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, *γνησίως κοίλη*) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη (έχει αρνητική δεύτερη παράγωγο). Αν λοιπόν $x, y > 0$ και $t, s \in (0,1)$ με $t + s = 1$, τότε

$$\ln(tx + sy) \geq t \ln x + s \ln y = \ln(x^t y^s). \tag{3}$$

Έπεται ότι

$$x^t y^s \leq tx + sy, \tag{4}$$

με ισότητα μόνο αν $x = y$. Έστω τώρα $a, b > 0$ και $p, q$ συζυγείς εκθέτες. Εφαρμόζοντας την (4) με $x = a^p$, $y = b^q$ και $t = 1/p$, $s = 1/q$, παίρνουμε την (1). Ισότητα ισχύει μόνο αν $a^p = b^q$.

**Ανισότητα του Hölder** (1889) *Έστω $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Αν*

$$x = (\xi_k) \in \ell_p \quad , \quad y = (\eta_k) \in \ell_q,$$

*τότε η $z = (\xi_k \eta_k) \in \ell_1$, και*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{1/q}.$$

**Απόδειξη:** Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q = 1.$$

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, από την (1) έχουμε

$$|\xi_k \eta_k| = |\xi_k||\eta_k| \leq \frac{|\xi_k|^p}{p} + \frac{|\eta_k|^q}{q}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| &\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή την ανισότητα του Hölder σ' αυτή την ειδική περίπτωση (γιατί;).

Για τη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$ (γιατί;), οπότε ορίζουμε

$$\xi_k' = \frac{\xi_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}} \quad , \quad \eta_k' = \frac{\eta_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από τον τρόπο ορισμού τους, οι $(\xi_k')$, $(\eta_k')$ ικανοποιούν τις

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k'|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^p}{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\eta_k|^q}{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q} = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k'|^q.$$

Από το πρώτο βήμα της απόδειξης (το εφαρμόζουμε για τις $(\xi_k')$, $(\eta_k')$), βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k'\eta_k'| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k\eta_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}} \leq 1,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k\eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}. \quad \square$$

**Παρατήρηση**: Όταν $p = 2$, ο συζυγής εκθέτης του $p$ είναι ο $q = 2$, και η ανισότητα του Hölder με $p = q = 2$ δεν είναι άλλη από την *ανισότητα Cauchy-Schwarz*: Αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in \ell_2$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k\eta_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2}.$$

**Ανισότητα του Minkowski** (1896) *Έστω* $p \geq 1$. *Αν* $x = (\xi_k) \in \ell_p$ *και* $y = (\eta_k) \in \ell_p$, *τότε η* $z = (\xi_k + \eta_k) \in \ell_p$ *και*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

**Απόδειξη:** Αν $p = 1$, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|$$

η οποία επαληθεύεται εύκολα αφού $|\xi_k + \eta_k| \leq |\xi_k| + |\eta_k|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι $p > 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^p &= \sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k+\eta_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}\left(|\xi_k|+|\eta_k|\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k| + \sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\eta_k|.\end{aligned}$$

Για καθένα από τα δύο αθροίσματα εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder με εκθέτες $p, q$ (τα αθροίσματα έχουν $n$ όρους, αλλά η ανισότητα ισχύει και σ' αυτή την περίπτωση - γιατί;). Τότε,

$$\begin{aligned}S_n &:= \sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^p \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{1/p}\right],\end{aligned}$$

και επειδή $q(p-1) = qp - p = p$, παίρνουμε

$$S_n \leq S_n^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{1/p}\right].$$

Αν $S_n > 0$, διαιρούμε με $S_n^{1/q}$, και αφού $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

(Αν $S_n = 0$, τότε αυτή η τελευταία ανισότητα ισχύει ούτως ή άλλως.) Αφού το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο, το αριστερό παραμένει φραγμένο ανεξάρτητα από το $n$. Αφήνοντας το $n$ να πάει στο άπειρο, συμπεραίνουμε ότι η $z = (\xi_k + \eta_k) \in \ell_p$ και

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{1/q}. \quad \square$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την εξής μετρική $d_p$ στον $\ell_p$, $p \geq 1$: αν $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $y = (\eta_k) \in \ell_p$, ορίζουμε

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Τα αξιώματα (M1)$-$(M3) της μετρικής ελέγχονται άμεσα. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας του Minkowski: Πράγματι, αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k), z = (\zeta_k) \in \ell_p$, τότε

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \zeta_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y). \end{aligned}$$

Άρα, ο $\ell_p$ με τη μετρική $d_p$, *είναι* μετρικός χώρος.

## 1.3 Τοπολογικές έννοιες

(α) Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Για κάθε $x_0 \in X$ και $r > 0$,

1. Η *ανοικτή μπάλα* με κέντρο $x_0$ και ακτίνα $r$ είναι το σύνολο

$$D(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) < r\}.$$

2. Η *κλειστή μπάλα* με κέντρο $x_0$ και ακτίνα $r$ είναι το σύνολο

$$B(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) \leq r\}.$$

3. Η *σφαίρα* με κέντρο $x_0$ και ακτίνα $r$ είναι το σύνολο

$$S(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) = r\}.$$

Παρατηρησεις

(i) Για κάθε $x_0 \in X$ και $r > 0$ ισχύει $x_0 \in D(x_0, r) \subseteq B(x_0, r)$.

(ii) Μπορεί όμως να συμβεί $S(x_0, r) = \emptyset$ (παράδειγμα: διακριτή μετρική).

(iii) $S(x_0, r) = B(x_0, r) \setminus D(x_0, r)$.

Σε αυτό το μάθημα οι μετρικές θα είναι (ως ένα βαθμό) φυσιολογικές - για παράδειγμα, οι σφαίρες θα είναι πάντα μη κενές.

(β) Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η $D(x_0, \varepsilon)$ λέγεται *$\varepsilon$-περιοχή* του $x_0$. Αν $x_0 \in A \subseteq X$, το $x_0$ λέγεται *εσωτερικό σημείο* του $A$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_0, \varepsilon) \subseteq A$.

Ένα υποσύνολο $A$ του $X$ λέγεται *ανοικτό* αν κάθε σημείο του $A$ είναι εσωτερικό του σημείο. Για τυχόν $A \subseteq X$, το *εσωτερικό* $A^\circ$ του $A$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του $A$. Το $A^\circ$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του $A$. Το $A$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^\circ$.

(γ) Μια ακολουθία $(x_n)$ σημείων του $(X,d)$ *συγκλίνει* στο $x \in X$ (γράφουμε $x_n \to x$) αν $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$, $d(x_n,x) < \varepsilon$.

Απλές συνέπειες του ορισμού είναι οι παρακάτω.

(i) Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y$, τότε $x = y$ (μοναδικότητα του ορίου).

(ii) Αν $x_n \to x$, τότε η $(x_n)$ είναι *φραγμένη* (δηλαδή, υπάρχει κλειστή μπάλα στον $X$ που περιέχει όλα τα $x_n$).

(iii) Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον $X$, τότε $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

(δ) Ένα υποσύνολο $K$ του $X$ λέγεται *κλειστό* αν: για κάθε $(x_n)$ στο $K$ με $x_n \to x \in X$, έπεται ότι $x \in K$. Το $K$ είναι κλειστό αν και μόνο αν το $X \setminus K$ είναι ανοικτό.

Το $x_0 \in X$ λέγεται *σημείο επαφής* του $K$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $K \cap D(x_0,\varepsilon) \neq \emptyset$. Το σύνολο των σημείων επαφής του $K$ συμβολίζεται με $\overline{K}$, ονομάζεται *κλειστή θήκη* (ή *κλειστότητα*) του $K$, και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $K$. Το $K$ είναι κλειστό αν και μόνο αν $K = \overline{K}$.

(ε) Έστω $(X,d)$ και $(Y,\overline{d})$ δύο μετρικοί χώροι. Λέμε ότι μια απεικόνιση $T : X \to Y$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $d(x,x_0) < \delta$ τότε $\overline{d}(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$. Η $T$ είναι *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$.

Ισχύουν τα εξής:

(i) Η $T$ είναι συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow$ αν $x_n \to x_0$ ως προς την $d$, τότε $T(x_n) \to T(x_0)$ ως προς την $\overline{d}$.

(ii) Η $T$ είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε $A \subseteq Y$ ανοικτό, το $T^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$.

*Σημείωση:* Βεβαιωθείτε ότι όλα τα παραπάνω σάς είναι γνωστά, μαζί με τις αποδείξεις τους (έχουν γίνει στο μάθημα «Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ»).

**Ορισμός** Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο $M$ του $X$ λέγεται *πυκνό στον* $X$ αν

$$\overline{M} = X.$$

(Δηλαδή, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)$ στο $M$ με $x_n \to x$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $D(x,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.)

Ο $(X,d)$ λέγεται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει *αριθμήσιμο* $M \subseteq X$ που είναι πυκνό στον $X$.

Παραδειγματα

(α) Θεωρούμε την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ (με τη μετρική $d(x,y) = |x-y|$.) Ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος: το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο, και $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (αν $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ρητός στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, δηλαδή $D(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.)

(β) Ο χώρος ακολουθιών $\ell_\infty$ *δεν* είναι διαχωρίσιμος. Για να το αποδείξουμε, θα βασιστούμε στην ακόλουθη γενική παρατήρηση:

**Παρατήρηση**: Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε $x_i, i \in I$ στον $X$ ($I$ ένα σύνολο δεικτών) και $\lambda > 0$ που ικανοποιούν την

$$\forall i,j \in I \quad i \neq j \Longrightarrow d(x_i,x_j) \geq \lambda.$$

Τότε, κάθε πυκνό $M \subseteq X$ έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το $I$.

**Απόδειξη**: Οι μπάλες $D(x_i,\lambda/2)$, $i \in I$ είναι ξένες. Αν το $M$ είναι πυκνό, σε κάθε $D(x_i,\lambda/2)$ υπάρχει κάποιο $m_i \in M$. Αν $i \neq j$, τότε $m_i \neq m_j$ αφού $D(x_i,\lambda/2) \cap D(x_j,\lambda/2) = \emptyset$. Άρα, η $f : I \to M$ με $f(i) = m_i$ είναι ένα προς ένα. Δηλαδή, το $M$ έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το $I$. $\square$

Στο παράδειγμα του $\ell_\infty$, θεωρούμε το σύνολο $A = \{x = (\xi_k) : \xi_k \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}\}$. Κάθε ακολουθία με όρους 0 ή 1 είναι φραγμένη, άρα $A \subseteq \ell_\infty$.

Παρατηρούμε ότι αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in A$ και $x \neq y$, τότε $d(x,y) = 1$ (γιατί;). Σύμφωνα με την παρατήρηση, αν $M$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\ell_\infty$, τότε το $M$ έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το $A$.

Όμως, το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor δείχνει ότι το $A$ είναι υπεραριθμήσιμο. Έπεται ότι κάθε πυκνό υποσύνολο του $\ell_\infty$ είναι υπεραριθμήσιμο, δηλαδή ο $\ell_\infty$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Ο χώρος ακολουθιών $\ell_p$, $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \{y = (\eta_1,\ldots,\eta_n,0,0,\ldots) : n \in \mathbb{N}, \eta_k \in \mathbb{Q}\}.$$

Το $M$ είναι αριθμήσιμο (γιατί;) Θα δείξουμε ότι $\overline{M} = \ell_p$. Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$. Ψάχνουμε $y \in M$ τέτοιο ώστε $d_p(x,y) < \varepsilon$.

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Η σειρά $\sum_k |\xi_k|^p$ συγκλίνει, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

(ii) Για κάθε $k = 1,\ldots,n$ μπορούμε να βρούμε ρητό οσοδήποτε κοντά στον $\xi_k$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ρητό $\eta_k$ , $k = 1,\ldots,n$ που να ικανοποιεί την

$$|\xi_k - \eta_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Προσθέτοντας, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Ορίζουμε $y = (\eta_1,\ldots,\eta_n,0,0,\ldots)$. Τότε, $y \in M$ και

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \left( \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \\ &< \left( \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού τα $x \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, ισχύει $\overline{M} = \ell_p$ (άρα, ο $\ell_p$ είναι διαχωρίσιμος).

## 1.4 Ασκήσεις

**1.** Έστω $X$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων $m$-άδων από 0 ή 1. Δηλαδή, $X = \{0,1\}^m$. Ορίζουμε $d(x,y) =$ το πλήθος των συντεταγμένων στις οποίες διαφέρουν οι $m$-άδες $x$ και $y$. Δείξτε ότι η $d$ είναι μετρική.

**2.** Θεωρούμε τον $C[0,\pi]$ με απόσταση την $d(f,g) = \max_{t\in[0,\pi]} |f(t) - g(t)|$. Αν $x(t) = \sin t$ και $y(t) = \cos t$, βρείτε τον μικρότερο $r > 0$ για τον οποίο $y \in B(x,r)$.

**3.** Δείξτε ότι ένα μη κενό $A \subseteq (X,d)$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν είναι ένωση από ανοικτές μπάλες.

**4.** Το $x_0$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* του $A \subseteq (X,d)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $y \in A$, $y \neq x_0$ τέτοιο ώστε $d(x_0,y) < \varepsilon$. Δείξτε ότι το $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ η $D(x_0,\varepsilon)$ περιέχει άπειρα σημεία του $A$.

**5.** Αν $A, B \subseteq (X,d)$, δείξτε ότι $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

**6.** Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος, και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Η *διάμετρος* $\mathrm{diam}(A)$ του $A$ ορίζεται από την $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$. Δείξτε ότι:

(α) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$.

(β) $\mathrm{diam}(A) = 0 \Longleftrightarrow$ το $A$ είναι μονοσύνολο.

**7.** Έστω $A, B$ μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου $(X,d)$. Η *απόσταση* $d(A,B)$ των $A, B$ ορίζεται από την $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow d(A,B) = 0$. Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων $A, B$ του $\mathbb{R}^2$ με $d(A,B) = 0$.

**8.** Έστω $B$ μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου $(X,d)$. Η *απόσταση* του $x \in X$ από το $B$ ορίζεται από την $d(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in X$ ισχύει $|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y)$.

**9.** Αν $A \subseteq (X,d)$, δείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $d(x,A) = 0$. Δείξτε ότι αν $A$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$ και $x \notin A$, τότε $d(x,A) > 0$.

**10.** Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος, και $A, B$ ξένα, κλειστά υποσύνολα του $X$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση, με την ιδιότητα: $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$, και $f(b) = 1$ για κάθε $b \in B$.

**11.** Θεωρούμε το χώρο $s$ όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω $(m_k)$ ακολουθία θετικών αριθμών, με $\sum_k m_k < +\infty$. Ορίζουμε απόσταση $d$ στον $s$ ως εξής: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k) \in s$, θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Δείξτε ότι ο $(s,d)$ είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

**12.** Δείξτε ότι για κάθε $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|\right)^2 \leq n\left(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2\right).$$

**13.** (α) Βρείτε μια ακολουθία $x = (\xi_k)$ που έχει όριο το 0, αλλά $x \notin \ell_p$ για κάθε $p \geq 1$.

(β) Δείξτε ότι αν $x \in \ell_p$ για κάποιο $p \geq 1$, τότε $\xi_k \to 0$.

**14.** Βρείτε $x = (\xi_k)$ τέτοια ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.

**15.** Θεωρούμε το χώρο $B[a,b]$ όλων των φραγμένων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με απόσταση την $d(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$. Δείξτε ότι ο $B[a,b]$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

**16.** Θεωρούμε το χώρο $C[a,b]$ όλων των συνεχών $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με απόσταση την $d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$. Δείξτε ότι είναι διαχωρίσιμος.

**17.** Δείξτε ότι η εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης μεταξύ μετρικών χώρων δεν είναι αναγκαστικά ανοικτό σύνολο.

**18.** Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, και έστω $p, q$ συζυγείς εκθέτες. Δείξτε την ανισότητα του Hölder

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{1/q}.$$

Δείξτε την ανισότητα του Minkowski

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

**19.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, και $0 < q < p < r < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{\frac{r-p}{r-q}} \left(\int_a^b |f(t)|^r dt\right)^{\frac{p-q}{r-q}}.$$

## Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** Παρατηρήστε ότι αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ και $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in X$, τότε: αν $\xi_k = \eta_k$ έχουμε $|\xi_k - \eta_k| = 0$, ενώ αν $\xi_k \neq \eta_k$ έχουμε $|\xi_k - \eta_k| = 1$. Άρα, το πλήθος των συντεταγμένων στις οποίες διαφέρουν οι $x$ και $y$ ισούται με

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k|.$$

Τώρα μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η $d$ είναι μετρική:

(α) $d(x,y) = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k| \geq 0$, με ισότητα μόνο αν $|\xi_k - \eta_k| = 0$ για κάθε $k$, δηλαδή αν $\xi_k = \eta_k$ για κάθε $k$, δηλαδή αν $x = y$.

(β) $d(y,x) = \sum_{k=1}^{m} |\eta_k - \xi_k| = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k| = d(x,y)$.

(γ) Αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$ και $z = (\zeta_k) \in X$, τότε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k| = \sum_{k=1}^{m} |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \zeta_k| + \sum_{k=1}^{m} |\zeta_k - \eta_k| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

**2.** Έχουμε $y \in B(x,r)$ αν και μόνο αν $d(x,y) \leq r$. Ο μικρότερος $r$ για το οποίο ισχύει αυτή η ανισότητα είναι η απόσταση των $x$ και $y$:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max_{0 \leq t \leq \pi} |\sin t - \cos t| = \sqrt{\max_{0 \leq t \leq \pi} (\sin t - \cos t)^2} \\ &= \sqrt{\max_{0 \leq t \leq \pi} (1 - \sin(2t))} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**3.** Έστω ότι $A = \cup_{i \in I} D(x_i, r_i)$ όπου $x_i \in X$ και $r_i > 0$. Αν $a \in A$, τότε υπάρχει $i_0 \in I$ για το οποίο $a \in D(x_{i_0}, r_{i_0})$. Θέτουμε $r(a) = r_{i_0} - d(a, x_{i_0}) > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$D(a, r(a)) \subseteq D(x_{i_0}, r_{i_0}) \subseteq A.$$

Το τυχόν $a \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του $A$, άρα το $A$ είναι ανοικτό.

Έστω $A$ ανοικτό υποσύνολο του $X$. Για κάθε $a \in A$ μπορούμε να βρούμε $r(a) > 0$ τέτοιο ώστε $a \in D(a, r(a)) \subseteq A$. Τότε,

$$A = \bigcup_{a \in A} D(a, r(a)).$$

**4.** Υποθέτουμε πρώτα ότι το $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε το $D(x_0, \varepsilon) \cap A$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Δηλαδή,

$$D(x_0, \varepsilon) \cap A = \{x_0\} \cup \{y_1, \ldots, y_N\}$$

για κάποια $y_i \neq x_0$ (τουλάχιστον ένα τέτοιο $y_i$ υπάρχει, από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης). Θέτουμε $\varepsilon_1 = \min\{d(x_0,y_1),\ldots,d(x_0,y_N)\} > 0$. Τότε,

$$D(x_0,\varepsilon_1)\cap A = \{x_0\},$$

το οποίο είναι άτοπο, πάλι από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι κάθε περιοχή του $A$ περιέχει άπειρα σημεία του $A$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, το $D(x_0,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο σύνολο, άρα έχει στοιχείο διαφορετικό από το $x_0$. Έπεται ότι το $x_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$.

**5.** (α) Αφού $A,B\subseteq A\cup B$, έχουμε $\overline{A},\overline{B}\subseteq \overline{A\cup B}$. Άρα,

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}.$$

Αντίστροφα, έστω $x\in\overline{A\cup B}$. Υπάρχουν $x_n\in A\cup B$ με $x_n\to x$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι άπειροι όροι της $(x_n)$ βρίσκονται στο $A$. Δηλαδή, υπάρχουν $k_1<k_2<\ldots<k_n<\ldots$ τέτοιοι ώστε $x_{k_n}\in A$. Αφού $x_n\to x$, έπεται ότι $x_{k_n}\to x$. Αφού $x_{k_n}\in A$, συμπεραίνουμε ότι $x\in\overline{A}$. Αν άπειροι όροι της $(x_n)$ βρίσκονται στο $B$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $x\in\overline{B}$. Σε κάθε περίπτωση $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$, οπότε

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

(β) Αφού $A\cap B\subseteq A,B$, έχουμε $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A},\overline{B}$. Άρα,

$$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

**6.** (α) Αν $A\subseteq B$, τότε $\{d(x,y):x,y\in A\}\subseteq\{d(x,y):x,y\in B\}$. Άρα,

$$\mathrm{diam}(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}\leq\sup\{d(x,y):x,y\in B\}=\mathrm{diam}(B).$$

(β) Αν $A=\{a\}$, τότε $\mathrm{diam}(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}=\sup\{d(a,a)\}=\sup\{0\}=0$. Αν πάλι υπάρχουν $a_1\neq a_2$ στο $A$, τότε $\mathrm{diam}(A)\geq d(a_1,a_2)>0$. Άρα, $\mathrm{diam}(A)=0\iff$ το $A$ είναι μονοσύνολο.

**7.** (α) Έστω $w\in A\cap B$. Τότε,

$$0\leq d(A,B)=\inf\{d(a,b):a\in A,b\in B\}\leq d(w,w)=0.$$

Δηλαδή, $d(A,B)=0$.

(β) Ορίζουμε τα υποσύνολα $A=\{(n,0):n\in\mathbb{N}\}$ και $B=\{(k,\frac{1}{k}):k\in\mathbb{N}\}$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$. Τότε $A\cap B=\emptyset$, τα $A,B$ είναι κλειστά γιατί όλα τα σημεία τους είναι μεμονωμένα, και

$$d(A,B)\leq d((n,0),(n,1/n))=1/n$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $d(A,B)=0$.

**8.** Έστω $x,y\in X$. Για κάθε $b\in B$ έχουμε $d(x,b)\leq d(x,y)+d(y,b)$. Αφού $d(x,B)\leq d(x,b)$, συμπεραίνουμε ότι

$$d(x,B)\leq d(x,y)+d(y,b)\Longrightarrow d(x,B)-d(x,y)\leq d(y,b).$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $b\in B$, παίρνουμε

$$d(x,B)-d(x,y)\leq\inf\{d(y,b):b\in B\}=d(y,B),$$

δηλαδή
$$d(x,B) - d(y,B) \le d(x,y).$$
Όμοια βλέπουμε ότι $d(y,B) - d(x,B) \le d(x,y)$. Άρα,
$$|d(x,B) - d(y,B)| \le d(x,y).$$
Έπεται ότι η $d(\cdot,B) : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**9.** (α) Έστω $x \in \overline{A}$. Υπάρχει ακολουθία $(x_n)$ στο $A$ με $x_n \to x$. Τότε, $0 \le d(x,A) \le d(x,x_n) \to 0$. Άρα, $d(x,A) = 0$. Αντίστροφα, αν $d(x,A) = 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in A$ με $d(x,x_n) < 1/n$, οπότε $x_n \to x$ και αυτό σημαίνει ότι $x \in \overline{A}$.

(β) Αφού $x \notin A$ και το $A$ είναι κλειστό, υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $D(x,r) \cap A = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $d(x,a) \ge r$ για κάθε $a \in A$, άρα $d(x,A) \ge r > 0$.

**10.** Για κάθε $x \in X$ έχουμε $d(x,A) + d(x,B) > 0$. Αν το άθροισμα αυτό ήταν ίσο με μηδέν, θα είχαμε $d(x,A) = d(x,B) = 0$ και αφού τα $A, B$ είναι κλειστά, από την προηγούμενη άσκηση θα είχαμε $x \in A \cap B$, το οποίο είναι άτοπο γιατί τα $A, B$ έχουν υποτεθεί ξένα.

Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$
Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται, άρα η $f$ είναι καλά ορισμένη. Επίσης, η $f$ είναι συνεχής γιατί οι $d(\cdot,A)$ και $d(\cdot,B)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις από την Άσκηση 8. Αφού $d(x,A), d(x,B) \ge 0$, είναι φανερό ότι $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in X$.

Τέλος, αν $a \in A$ τότε
$$f(a) = \frac{d(a,A)}{d(a,A) + d(a,B)} = 0,$$
ενώ αν $b \in B$ τότε
$$f(b) = \frac{d(b,A)}{d(b,A) + d(b,B)} = \frac{d(b,A)}{d(b,A)} = 1.$$

**11.** Η $d$ είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k) \in s$, τότε
$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \le \sum_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty.$$
Αυτό δείχνει ταυτόχρονα ότι η διάμετρος του $(s,d)$ είναι $\mathrm{diam}(s) \le \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

Από τις ιδιότητες της μετρικής, η μόνη που χρειάζεται έλεγχο είναι η τριγωνική ανισότητα: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$ και $z = (\zeta_k) \in s$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\frac{t}{1+t}$ είναι αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και την $|\xi_k - \eta_k| \le |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|$, παίρνουμε
$$\begin{aligned}
\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\le \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&= \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&\le \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας ως προς $k$ αφού πολλαπλασιάσουμε με τους θετικούς $m_k$, έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|} \\ &= d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

Τέλος, αν πάρουμε $x_M=(M,\ldots,M,\ldots)$ όπου $M>0$, και $y=(0,\ldots,0,\ldots)$, έχουμε

$$\mathrm{diam}(s) \geq d(x_M,y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{M}{1+M} = \frac{M}{1+M}\sum_{k=1}^{\infty} m_k,$$

και αφού $\frac{M}{1+M} \nearrow 1$ όταν $M\to\infty$, παίρνουμε

$$\mathrm{diam}(s) \geq \sup_{M>0} d(x_M,y) = \left(\sup_{M>0}\frac{M}{1+M}\right)\sum_{k=1}^{\infty} m_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_k.$$

Δηλαδή, $\mathrm{diam}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

**12.** Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\xi_1|+\cdots+|\xi_n| &= 1\cdot|\xi_1|+\cdots+1\cdot|\xi_n| \\ &\leq \left(1^2+\cdots+1^2\right)^{1/2}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n}\left(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε το ζητούμενο.

**13.** (α) Παίρνουμε $\xi_k=\frac{1}{\ln(k+1)}$, $k\in\mathbb{N}$. Τότε, $\xi_k\to 0$ όταν $k\to\infty$, όμως το κριτήριο συμπύκνωσης δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$$

για κάθε $p\geq 1$. Άρα $(\frac{1}{\ln(k+1)})\notin \ell_p$ για όλα τα $p\geq 1$.

(β) Υποθέτουμε ότι $x=(\xi_k)\in\ell_p$ για κάποιο $p\geq 1$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p < +\infty.$$

Αφού η σειρά συγκλίνει, παίρνουμε $|\xi_k|^p\to 0$. Έπεται ότι $|\xi_k|\to 0$, άρα $\xi_k\to 0$.

**14.** Δοκιμάστε $\xi_k=\frac{1}{k}$. Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$ (η αρμονική σειρά αποκλίνει), όμως για κάθε $p>1$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ συγκλίνει (Ανάλυση ΙΙ).

**15.** Για κάθε $x\in(a,b)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_x:[a,b]\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f_x(t)=1$ αν $a\leq t\leq x$ και $f_x(t)=0$ αν $x<t\leq b$. Κάθε $f_x$ είναι φραγμένη, άρα ανήκει στον $B[a,b]$. Το πλήθος των $f_x$ είναι υπεραριθμήσιμο (όσα τα σημεία του $(a,b)$).

Έστω $x < y$ στο $(a,b)$. Τότε, υπάρχει $t_0$ με $x < t_0 < y$. Αυτό μάς δίνει $f_x(t_0) = 0$ και $f_y(t_0) = 1$. Άρα,

$$d(f_x, f_y) = \sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in [a,b]\} \geq |f_x(t_0) - f_y(t_0)| = 1.$$

Στο μετρικό χώρο $B[a,b]$ βρήκαμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία (τις $f_x$) που ανά δύο απέχουν απόσταση τουλάχιστον ίση με 1 (είναι ακριβώς ίση με 1 - γιατί;). Από γενική παρατήρηση, ο χώρος δεν μπορεί να είναι διαχωρίσιμος.

**16.** Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$, $a_i \in \mathbb{R}$, είναι ένα πολυώνυμο στο $[a,b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$ με ρητούς συντελεστές $b_i \in \mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε

$$d(p,q) = \max_{t \in [a,b]} |p(t) - q(t)| < \varepsilon.$$

Πράγματι, αν $M = \max\{|a|, |b|\}$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m$ μπορούμε να βρούμε $b_i \in \mathbb{Q}$ τέτοιον ώστε

$$|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{M^j(m+1)}.$$

Τότε, αν ορίσουμε $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$, για κάθε $t \in [a,b]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |p(t) - q(t)| &= |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t + \cdots + (a_m - b_m)t^m| \\ &\leq |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1| \cdot |t| + \cdots + |a_m - b_m| \cdot |t|^m \\ &< \frac{\varepsilon}{m+1} + \frac{\varepsilon}{M(m+1)} M + \cdots + \frac{\varepsilon}{M^m(m+1)} M^m \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $d(p,q) < \varepsilon$.

Ορίζουμε $D = \{q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b_i \in \mathbb{Q}\}$. Το $D$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Αν $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$, από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο $p$ με πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $d(f,p) < \varepsilon/2$. Από την προηγούμενη παρατήρηση, υπάρχει $q \in D$ για το οποίο $d(p,q) < \varepsilon/2$. Άρα,

$$d(f,q) \leq d(f,p) + d(p,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού η $f$ και το $\varepsilon$ ήταν τυχόντα, βλέπουμε ότι $\overline{D} = C[a,b]$. Αφού το $D$ είναι αριθμήσιμο, ο $C[a,b]$ είναι διαχωρίσιμος.

**17.** Θέτουμε $X = Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y) = |x - y|$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $f$ είναι συνεχής, αλλά δεν στέλνει τα μη κενά ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$: αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε $f(A) = \{0\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό.

**18.** (α) Θέτουμε $A = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ και $B = \left(\int |g|^q\right)^{1/q}$. Αν $A = 0$ ή $B = 0$, τότε από τη συνέχεια των $f, g$ βλέπουμε ότι $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ στο $[a,b]$, οπότε η ανισότητα γίνεται $0 \leq 0$. Αν $A > 0$ και $B > 0$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young γράφουμε

$$\left| \int_a^b \frac{f(t)}{A} \frac{g(t)}{B} dt \right| \quad \leq \quad \int_a^b \frac{|f(t)|}{A} \frac{|g(t)|}{B} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b \left(\frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(t)|^q}{B^q}\right) dt \\
&= \frac{1}{p}\frac{\int_a^b |f|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_a^b |g|^q}{B^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq AB = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

(β) Αν $p = 1$, η ανισότητα του Minkowski είναι απλή:

$$\int |f+g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g|.$$

Αν $p > 1$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p &= \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) \\
&= \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \\
&\leq \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \\
&+ \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \left(\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right),
\end{aligned}$$

γιατί $(p-1)q = p$. Αν το αριστερό μέλος είναι γνήσια θετικό, διαιρώντας με $\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}$ και χρησιμοποιώντας την $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, παίρνουμε

$$\left(\int |f+g|^p\right)^{1/p} = \left(\int |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}.$$

Αν $\int |f+g|^p = 0$, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

**19.** Παρατηρούμε ότι οι $\alpha = \frac{r-q}{r-p}$ και $\beta = \frac{r-q}{p-q}$ είναι συζυγείς εκθέτες και $p = \frac{q}{\alpha} + \frac{r}{\beta}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder για τις $|f|^{q/\alpha}$ και $|f|^{r/\beta}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int |f|^p &= \int |f|^{q/\alpha} \cdot |f|^{r/\beta} \\
&\leq \left(\int (|f|^{q/\alpha})^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(\int (|f|^{r/\beta})^{\beta}\right)^{1/\beta} \\
&= \left(\int |f|^q\right)^{\frac{r-p}{r-q}} \left(\int |f|^r\right)^{\frac{p-q}{r-q}}.
\end{aligned}$$

# Κεφάλαιο 2

# Πλήρεις μετρικοί χώροι

## 2.1 Ακολουθίες Cauchy - πλήρεις μετρικοί χώροι

**Ορισμός** Έστω $(X,d)$ ένας μετρικός χώρος. Μια ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ένα από τα πιο βασικά αποτελέσματα στην «Ανάλυση Ι» είναι το εξής: μια ακολουθία $(x_n)$ πραγματικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Το παραπάνω δεν ισχύει σε *κάθε* μετρικό χώρο $(X,d)$. Παράδειγμα: πάρτε $X = (0,1]$ με απόσταση την $d(x,y) = |x-y|$. Η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$ είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει σε σημείο του $X$ (το σημείο 0, στο οποίο η $(x_n)$ «θέλει» να συγκλίνει, δεν ανήκει στον $X$.) Δοκιμάστε να δώσετε αυστηρή απόδειξη του ότι δεν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.

Υπάρχουν πάντως αρκετές ομοιότητες ανάμεσα στη θεωρία των ακολουθιών Cauchy τυχόντος μετρικού χώρου $(X,d)$ και την αντίστοιχη θεωρία στο $\mathbb{R}$.

**Πρόταση 2.1.1** *Αν η $(x_n)$ συγκλίνει στο $x$, τότε η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy.*

**Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι *φραγμένο* αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $A \subseteq B(x_0, r)$. Μια ακολουθία $(x_n)$ είναι *φραγμένη* αν υπάρχουν $x_0 \in X, r > 0$ τέτοια ώστε

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; x_n \in B(x_0, r).$$

**Πρόταση 2.1.2** *Κάθε ακολουθία Cauchy $(x_n)$ είναι φραγμένη.*

**Απόδειξη:** Παίρνουμε $\varepsilon = 1$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $n, m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) < 1$. Ειδικότερα,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Παίρνουμε $r = \max\{d(x_1, x_{n_0}) + 1, \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}) + 1\}$. Ελέγξτε ότι

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq r$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή όλοι οι όροι της $(x_n)$ βρίσκονται στην $B(x_{n_0}, r)$. $\square$

**Πρόταση 2.1.3** *Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x \in X$ και υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to x$. Τότε, $x_n \to x$ (αν λοιπόν μια ακολουθία Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.)*

**Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Η $(x_{k_n})$ συγκλίνει στο $x$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η $(x_n)$ είναι Cauchy, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_1 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Αν $n \geq n_2$, τότε $k_n \geq n \geq n_2 \geq n_1$, άρα

$$d(x_n, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

και $k_n \geq n \geq n_2 \geq n_0$, άρα

$$d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Προσθέτοντας, βλέπουμε ότι αν $n \geq n_2$,

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, $x_n \to x$. $\square$

**Ορισμός** Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος. Ο $X$ λέγεται *πλήρης* αν κάθε ακολουθία Cauchy $(x_n)$ στον $X$ συγκλίνει (σε σημείο του $X$).

Με βάση αυτόν τον ορισμό, ο $X = (0, 1]$, με μετρική την $d(x, y) = |x - y|$, δεν είναι πλήρης.

Οι *συμπαγείς* μετρικοί χώροι μάς δίνουν μια πρώτη ευρεία κλάση πλήρων μετρικών χώρων (θυμηθείτε ότι, ο $X$ είναι συμπαγής $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)$ στον $X$, υπάρχουν $x \in X$ και υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to x$):

**Πρόταση 2.1.4** *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος $(X,d)$ είναι πλήρης.*

**Απόδειξη:** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Αφού ο $X$ είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to x \in X$. Από την Πρόταση 2.1.3,

$$x_n \to x. \quad \square$$

Αργότερα, θα χρειαστούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας υπόχωρος ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης:

**Πρόταση 2.1.5** *Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος, και έστω $Y$ ένας υπόχωρος του $X$.*
(α) *Αν ο $Y$ είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική, τότε ο $Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.*
(β) *Αν ο $(X,d)$ είναι πλήρης και ο $Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$, τότε ο $Y$ είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική.*
*Ειδικότερα, αν ο $X$ είναι πλήρης, τότε ο είναι $Y$ πλήρης μετρικός χώρος αν και μόνο αν ο $Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.*

**Απόδειξη:** (α) Έστω $x_n \in Y$ και $x_n \to x \in X$. Η $(x_n)$ συγκλίνει στον $X$, άρα είναι ακολουθία Cauchy στον $X$ (Πρόταση 2.1.1). Η απόσταση $\tilde{d}$ στον $Y$ είναι απλώς ο περιορισμός της $d$, άρα η $(x_n)$ είναι Cauchy στον $Y$. Ο $Y$ είναι πλήρης ως προς την $\tilde{d}$, άρα η $(x_n)$ συγκλίνει *σε σημείο του* $Y$. Η σύγκλιση αυτή είναι ταυτόχρονα σύγκλιση ως προς την $d$ στον $X$, και από μοναδικότητα του ορίου, το όριο πρέπει να είναι το $x$. Δηλαδή, $x \in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.

(β) Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $Y$. Αφού $x_n \in Y \subseteq X$, η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X$. Ο $X$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$. Επομένως, $x \in \overline{Y}$. Όμως το $Y$ είναι κλειστό, άρα $x \in Y$. Δηλαδή, $x_n \to x$ στον $Y$. $\square$

## 2.2 Πλήρεις μετρικοί χώροι - παραδείγματα

Μια γενική παρατήρηση για τον τρόπο με τον οποίο δείχνουμε ότι ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης: θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_n)$ που είναι Cauchy στον $(X,d)$, και

(α) εντοπίζουμε το σημείο $x$ στο οποίο θα πρέπει να συγκλίνει η $(x_n)$ (στα κλασικά παραδείγματα, πολύ συχνά μάς βοηθάει η πληρότητα της πραγματικής ευθείας).

(β) δείχνουμε ότι $x \in X$.

(γ) δείχνουμε ότι $x_n \to x$ ως προς τη μετρική $d$.

**Πρόταση 2.2.1** *Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^m$ με μετρική την*

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m}(\xi_k - \eta_k)^2\right)^{1/2}$$

*είναι πλήρης.*

**Απόδειξη:** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^m$. Γράφουμε $x_n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm})$, $\xi_{nk} \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η $(x_n)$ είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$n, s \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_s) < \varepsilon.$$

Στην περίπτωσή μας αυτό σημαίνει ότι

$$(*) \qquad n, s \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\forall k = 1, \ldots, m, \qquad |\xi_{nk} - \xi_{sk}| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $n, s \geq m_0$, τότε για κάθε $k = 1, \ldots, m$ χωριστά έχουμε

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $k = 1, \ldots, m$ η ακολουθία $(\xi_{nk})$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nm} \to \xi_m$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, και μένει να δείξουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Επιστρέφουμε στην $(*)$: για κάθε $n, s \geq n_0$ έχουμε

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε το $n$ και αφήνουμε το $s$ να πάει στο άπειρο:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} \to \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2\right)^{1/2}.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x$. $\square$

**Πρόταση 2.2.2** *Ο χώρος $\ell_\infty$ των φραγμένων ακολουθιών, με μετρική την*

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

*είναι πλήρης.*

**Απόδειξη:** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $\ell_\infty$. Γράφουμε $x_n = (\xi_{nk}) = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η $(x_n)$ είναι Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \forall n, s \geq n_0, \ \ \sup\{|\xi_{nk} - \xi_{sk}| : k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $n, s \geq n_0$ έχουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωριστά

$$(**) \qquad |\xi_{nk} - \xi_{sk}| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\xi_{nk})$ είναι Cauchy (ως προς $n$) στο $\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχουν $\xi_k \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nk} \to \xi_k, \ldots \quad (n \to \infty).$$

Ορίζουμε $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty$.
Επιστρέφοντας στην $(*)$ και σταθεροποιώντας $s = n_0$, έχουμε

$$\forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_{nk} - \xi_{n_0 k}| < \varepsilon$$

και, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi_{nk} - \xi_{n_0 k}| \to |\xi_k - \xi_{n_0 k}|$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, $|\xi_k - \xi_{n_0 k}| \leq \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_k| \leq |\xi_{n_0 k}| + \varepsilon.$$

Όμως $x_{n_0} \in \ell_\infty$. Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_{n_0 k}| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sup_k |\xi_k| \leq M + \varepsilon$, δηλαδή $x \in \ell_\infty$.

Επίσης, από την $(**)$, αφήνοντας το $s \to \infty$ έχουμε:

$$\forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_{nk} - \xi_k| \leq \varepsilon,$$

δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) = \sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $x_n \to x$ ως προς την $d$. □

**Ορισμός**. Ο *χώρος* $c$ αποτελείται από όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, επομένως ο $c$ είναι υποσύνολο του $\ell_\infty$. Τον βλέπουμε σαν υπόχωρο του $\ell_\infty$, με μετρική την

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε επίσης το χώρο $c_0$ των μηδενικών ακολουθιών ($x = (\xi_k) \in c_0$ αν και μόνο αν $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$) σαν υπόχωρο του $c$.

**Πρόταση 2.2.3** *Οι $c$ και $c_0$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.*

**Απόδειξη:** Ο $c$ είναι εξ ορισμού υπόχωρος του $\ell_\infty$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.5, για να δείξουμε ότι είναι πλήρης αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_\infty$.

Έστω $x = (\xi_k) \in \overline{c}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (\xi_{nk}) \in c$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c$, δηλαδή ότι η $(\xi_k)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $(\xi_k)$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\forall n \geq n_0 \; \forall k \in \mathbb{N}, \quad |\xi_k - \xi_{nk}| < \varepsilon. \tag{1}$$

Κρατάμε ένα μόνο $n$: τον $n_0$. Η $x_{n_0} = (\xi_{n_0 k})$ ανήκει στον $c$, δηλαδή συγκλίνει, δηλαδή είναι Cauchy. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall s, r \geq k_0, \quad |\xi_{n_0 s} - \xi_{n_0 r}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (1) και (2) βλέπουμε ότι, για κάθε $s, r \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |\xi_s - \xi_r| &\leq |\xi_s - \xi_{n_0 s}| + |\xi_{n_0 s} - \xi_{n_0 r}| + |\xi_{n_0 r} - \xi_r| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η $(\xi_k)$ είναι Cauchy, δηλαδή $x \in c$. Αφού $\overline{c} \subseteq c$, ο $c$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_\infty$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, έστω $x = (\xi_k) \in \overline{c_0}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (\xi_{nk}) \in c_0$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$, δηλαδή ότι $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\forall n \geq n_0 \; \forall k \in \mathbb{N}, \quad |\xi_k - \xi_{nk}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Η $x_{n_0} = (\xi_{n_0 k})$ ανήκει στον $c_0$, άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall k \geq k_0, \quad |\xi_{n_0 k}| < \varepsilon. \tag{4}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (3) και (4) βλέπουμε ότι, για κάθε $k \geq k_0$,

$$|\xi_k| \leq |\xi_k - \xi_{n_0 k}| + |\xi_{n_0 k}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, δηλαδή $x \in c_0$. $\square$

**Πρόταση 2.2.4** *Ο χώρος $\ell_p$, $1 \leq p < +\infty$, είναι πλήρης.*

**Απόδειξη:** Θα μιμηθούμε την απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $\ell_p$. Γράφουμε $x_n = (\xi_{nk}) = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots)$, $\xi_{nk} \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η $(x_n)$ είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad n, s \geq n_0 \Longrightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Άρα, για κάθε $n, s \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(\xi_{nk})$ είναι Cauchy (ως προς $n$) στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nk} \to \xi_k, \ldots$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_p$.

Κρατάμε $N \in \mathbb{N}$ σταθερό, και από την $(*)$ έχουμε

$$\forall n, s \geq m_0, \qquad \left( \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

και

$$\left( \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} \to \left( \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p}$$

καθώς $s \to \infty$, οπότε

$$\forall n \geq n_0, \qquad \left( \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$(**) \qquad \forall n \geq n_0, \qquad \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Δηλαδή, π.χ. για $n = n_0$, η $(\xi_{nk} - \xi_k) \in \ell_p$, και αφού $(\xi_{nk}) \in \ell_p$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (\xi_k) = ((\xi_k - \xi_{nk}) + \xi_{nk}) \in \ell_p$.

Επιπλέον, η $(**)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \geq n_0, \;\; d(x, x_n) \leq \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$. $\square$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικά σημαντικά παραδείγματα μετρικών χώρων που *δεν* είναι πλήρεις:

(α) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, με μετρική την $d(x,y) = |x-y|$. Ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης: είναι υπόχωρος της πραγματικής ευθείας, κι αν ήταν πλήρης θα έπρεπε να είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(β) Θεωρούμε το χώρο $C[a,b]$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, με μετρική την

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Ο $(C[a,b], d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (άσκηση). Θεωρούμε τον υπόχωρο $X$ του $C[a,b]$ που αποτελείται από τα πολυώνυμα $p : [a,b] \to \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα του Weierstrass, για κάθε $f \in C[a,b]$ και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο $p \in X$ τέτοιο ώστε

$$d(f,p) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\overline{X} = C[a,b] \neq X$ (υπάρχουν συνεχείς $f$ που δεν είναι πολυώνυμα). Άρα, ο $X$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $C[a,b]$, και από την Πρόταση 2.1.5 συμπεραίνουμε ότι ο $X$ δεν είναι πλήρης.

Τα παραδείγματα (α) και (β) είναι κατά κάποιον τρόπο «τεχνητά»: ξεκινήσαμε με έναν πλήρη χώρο (την πραγματική ευθεία ή το χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$), και πήραμε ένα γνήσιο πυκνό υποσύνολό του (τους ρητούς ή τα πολυώνυμα) σαν υπόχωρό του, με την επαγόμενη δηλαδή μετρική. Αφού ο υπόχωρός μας δεν είναι κλειστός, δεν μπορεί να είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ας δούμε κι ένα πιο ουσιαστικό παράδειγμα:

(γ) Θεωρούμε το χώρο $X$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, τώρα όμως με μια άλλη μετρική:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $d$ ικανοποιεί τα αξιώματα (M1)−(M4).

**Ο $(X,d)$ δεν είναι πλήρης**: Ορίζουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)$, $n \geq 3$, στον $X$ ως εξής:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < t < a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , a_n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(1) Η $(f_n)$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την $d$: έστω $n > m$. Τότε,

$$a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n,$$

και (βλέπε Σχήμα),

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^{1/2} |f_n - f_m| + \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| + \int_{a_m}^1 |f_n - f_m| \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| \leq a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d(f_n, f_m) \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η $(f_n)$ είναι Cauchy.

(2) Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την $d$) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leq \int_0^{1/2} |f(t)| dt = \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

και αφού η $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, πρέπει να ισχύει $f(t) = 0$, $t \in [0, 1/2]$.

Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$f_n(t) = 1, \qquad t \in [\delta, 1].$$

Όμως,

$$0 \leq \int_\delta^1 |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0,$$

άρα

$$\int_\delta^1 |1 - f(t)|dt = 0$$

(γιατί;). Από τη συνέχεια της $f$, συμπεραίνουμε ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$, και αφού το $\delta$ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in (1/2, 1]$. Έπεται ότι η $f$ είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η $f$ υποτέθηκε συνεχής στο $[0, 1]$.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy $(f_n)$ στον $X$, η οποία δεν συγκλίνει (ως προς την $d$) σε στοιχείο του $X$. Άρα, ο $(X, d)$ δεν είναι πλήρης. $\square$

## 2.3 Πλήρωση μετρικού χώρου*

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τη συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος. «Προσθέτοντάς» του όμως κάποια σημεία, παίρνουμε την πλήρη πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$. Το $\mathbb{R}$ είναι η «πλήρωση» του $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ αποτελείται ακριβώς από τα όρια εκείνων των ακολουθιών Cauchy στο $\mathbb{Q}$ που *δεν* συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$ (τα όρια που «λείπουν»).

Θα δούμε (εν συντομία) με ποιόν τρόπο κάθε μετρικός χώρος $X$ μπορεί να «γίνει» πυκνός μέσα σε έναν πλήρη μετρικό χώρο $\hat{X}$ (ο οποίος είναι με μια έννοια μοναδικός και λέγεται *πλήρωση* του $X$). Η διαδικασία της πλήρωσης βασίζεται ακριβώς στο μοντέλο «$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$».

**Ορισμός** Έστω $(X, d)$ και $(Y, \rho)$ δύο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $T : (X, d) \to (Y, \rho)$ λέγεται *ισομετρία* αν διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει

$$\rho(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Παρατηρήστε ότι μια ισομετρία είναι πάντα ένα προς ένα: αν $T(x_1) = T(x_2)$, τότε

$$0 = \rho(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Δύο μετρικοί χώροι $X$ και $Y$ λέγονται *ισομετρικοί* αν υπάρχει $T : X \to Y$ ισομετρία επί. Δύο ισομετρικοί χώροι ουσιαστικά ταυτίζονται, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε αντιστοιχία ένα προς ένα και οι αποστάσεις διατηρούνται.

**Θεώρημα 2.3.1** *Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος. Υπάρχει πλήρης μετρικός χώρος $(\hat{X}, \hat{d})$ ο οποίος έχει πυκνό υπόχωρο $W$ που είναι ισομετρικός με τον $(X, d)$.*

*Ιδέα της απόδειξης:* Φανταστείτε τον $X$ σαν μη πλήρη χώρο, όπως στο Σχήμα (και έχετε στο μυαλό σας το $\mathbb{Q}$). Υπάρχουν ακολουθίες Cauchy στον $X$ που δεν έχουν όριο στον $X$ (π.χ. η $(x_n)$ που καταλήγει στο κενό: δε «βρίσκει» το όριό της μέσα στο χώρο). Άλλες, όπως η $(y_n)$, συγκλίνουν σε κάποιο $y \in X$.

(1) Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο των ακολουθιών Cauchy του $X$:

$$(x_n) \sim (x'_n) \Longleftrightarrow d(x_n, x'_n) \to 0.$$

Ακολουθίες, όπως η $(y_n)$, που συγκλίνουν σε $y \in X$ είναι ισοδύναμες με σταθερές ακολουθίες:

$$y_n \to y \in X \Longleftrightarrow (y_n) \sim (y, y, \ldots).$$

Θεωρούμε το σύνολο $\hat{X}$ των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ (πρέπει βέβαια πρώτα να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας).

(2) Ο $X$ μπορεί να θεωρηθεί σαν υποσύνολο του $\hat{X}$: αν $y \in X$, στο $y$ αντιστοιχεί φυσιολογικά η σταθερή ακολουθία Cauchy $(y, y, \ldots)$, καθώς και η κλάση της, που είναι στοιχείο του $\hat{X}$.

Αν $y \neq y'$ στον $X$, τότε δεν μπορεί να ισχύει $(y, y, \ldots) \sim (y', y', \ldots)$ (γιατί;) Άρα, διαφορετικά σημεία του $X$ ορίζουν διαφορετικές κλάσεις στον $\hat{X}$.

(3) Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\hat{X}$ με $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$.

(4) Πως ορίζουμε μετρική $\hat{d}$ στον $\hat{X}$; Έστω $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$. Θεωρούμε τυχόντες αντιπροσώπους $(x_n) \in \hat{X}$, $(y_n) \in \hat{Y}$, και θέτουμε

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n).$$

Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει. Θυμηθείτε ότι οι $(x_n), (y_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy: από την τριγωνική ανισότητα,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \to 0$$

καθώς $n, m \to \infty$. Άρα, η $(d(x_n, y_n))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$, και έχει όριο.

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι η επιλογή των αντιπροσώπων $(x_n) \in \hat{x}$ και $(y_n) \in \hat{y}$ δεν έχει σημασία, και ότι η $\hat{d}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής (Άσκηση). Έτσι, ορίστηκε ο $(\hat{X}, \hat{d})$.

(5) Ορίζουμε $W = \{\hat{b} : b \in X\}$, όπου $\hat{b}$, $b \in X$, είναι η κλάση της σταθερής ακολουθίας $(b, b, \ldots)$.

Παρατηρήστε ότι $\hat{d}(\hat{b_1}, \hat{b_2}) = \lim_{n\to\infty} d(b_1, b_2) = d(b_1, b_2)$ αν $b_1, b_2 \in X$. Δηλαδή, η $T : (X, d) \to (W, \hat{d})$ με $b \to \hat{b}$ είναι ισομετρία επί.

(6) Τέλος, δείχνουμε ότι ο $(\hat{X}, \hat{d})$ είναι πλήρης, και ότι $\overline{W} = \hat{X}$ (Άσκηση).

(7) Αν $(\tilde{X}, \tilde{d})$ είναι ένας άλλος πλήρης μετρικός χώρος που έχει πυκνό υπόχωρο ισομετρικό με τον $(X, d)$, τότε αποδεικνύεται ότι οι $(\hat{X}, \hat{d})$ και $(\tilde{X}, \tilde{d})$ είναι ισομετρικοί. Δηλαδή, η πλήρωση του $(X, d)$ γίνεται «κατά μοναδικό τρόπο».

Δεν θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα που περιγράψαμε. Για μια λεπτομερή απόδειξη, δείτε π.χ. το βιβλίο του E. Kreyszig.

## 2.4 Το Θεώρημα του Baire

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το θεώρημα του Baire στην ακόλουθη μορφή:

**Θεώρημα 2.4.1** *Έστω $(X, d)$ πλήρης μετρικός χώρος. Αν $(F_n)$ είναι μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε τουλάχιστον ένα από τα $F_n$ έχει μη κενό εσωτερικό.*

**Ορισμός**. Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος, και έστω $\emptyset \neq A \subseteq X$. Η *διάμετρος* του $A$ ορίζεται από την

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Παρατηρησεις.

(i) $0 \leq \mathrm{diam}(A) \leq +\infty$.

(ii) $\mathrm{diam}(A) < +\infty \Leftrightarrow$ το $A$ είναι φραγμένο.

(iii) $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος του Baire θα χρειαστούμε τον εξής χαρακτηρισμό του πλήρους μετρικού χώρου (Cantor):

**Θεώρημα 2.4.2** *Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος. Ο $X$ είναι πλήρης αν και μόνο αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ κλειστών μη κενών υποσυνόλων του $X$ με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.*

**Απόδειξη:** $(\Rightarrow)$ Αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Γιατί, αν $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ τότε

$$0 \leq d(x, y) \leq \mathrm{diam}(F_n) \to 0,$$

δηλαδή $d(x, y) = 0$, άρα $x = y$. Αν λοιπόν το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μη κενό, τότε θα είναι μονοσύνολο.

Για να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μη κενό, δουλεύουμε ως εξής: αφού κάθε $F_n \neq \emptyset$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Ισχυρισμός.** Η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X$.

**Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε $x_n, x_m \in F_m$ (η $(F_n)$ είναι φθίνουσα), άρα

$$d(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(F_m) < \varepsilon. \quad \square$$

Ο $X$ είναι πλήρης και η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $x \in X$ με $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$:

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Έχουμε $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots \in F_m$ και $x_n \to x$, άρα $x \in \overline{F_m} = F_m$. Αφού το $m$ ήταν τυχόν, $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$.

($\Leftarrow$) Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Ορίζουμε:

$$F_n' = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \{x_m : m \geq n\},$$

και $F_n = \overline{F_n'}$. Αφού η $(F_n')$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών συνόλων, η $(F_n)$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών συνόλων.

**Ισχυρισμός.** $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

**Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Αν λοιπόν $n \geq n_0$, τότε για κάθε $x, y \in F_n'$ ισχύει $d(x, y) < \varepsilon$ (γιατί;) επομένως

$$\mathrm{diam}(F_n) = \mathrm{diam}(F_n') \leq \varepsilon. \quad \square$$

Από τον ισχυρισμό και την υπόθεσή μας, έπεται ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$. Τότε,

$$0 \leq d(x_n, x) \leq \mathrm{diam}(F_n) \to 0,$$

δηλαδή $x_n \to x$. Άρα, ο $X$ είναι πλήρης. $\square$

*Παρατήρηση.* Η υπόθεση $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ δεν είναι περιττή. Πάρτε $F_n = [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε $F_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$, όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (γιατί;).

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Baire ας δούμε μια κάπως απλούστερη πρόταση:

**Πρόταση 2.4.1** *Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος, και $G_1, G_2$ ανοιχτά πυκνά υποσύνολα του $X$. Τότε, το $G_1 \cap G_2$ είναι (ανοιχτό) πυκνό υποσύνολο του $X$.*

**Απόδειξη:** Έστω $D(x_0, r_0)$ ανοιχτή μπάλα στον $X$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$D(x_0, r_0) \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset.$$

Το $G_1$ είναι πυκνό στον $X$, άρα υπάρχει $x_1 \in D(x_0, r_0) \cap G_1$. Το $D(x_0, r_0) \cap G_1$ είναι ανοιχτό, άρα το $x_1$ είναι εσωτερικό του σημείο. Επομένως, υπάρχει $r_1 > 0$ τέτοιος ώστε

$$D(x_1, r_1) \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1.$$

Όμως το $G_2$ είναι πυκνό, άρα υπάρχει

$$x_2 \in D(x_1, r_1) \cap G_2 \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1 \cap G_2.$$

Δηλαδή, $D(x_0, r_0) \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. □

Είναι φανερό ότι, επαγωγικά, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $G_1, \ldots, G_m$ είναι ανοιχτά πυκνά υποσύνολα του μετρικού χώρου $(X, d)$, τότε το ίδιο ισχύει και για την τομή τους. Αν ο $(X, d)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε κάτι παραπάνω (Baire):

**Θεώρημα 2.4.3** *Έστω $(X, d)$ πλήρης μετρικός χώρος. Αν $(G_n)$ είναι μια ακολουθία ανοιχτών πυκνών υποσυνόλων του $X$, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του $X$.*

**Απόδειξη:** Έστω $D(x_0, r_0)$ ανοιχτή μπάλα στον $X$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$D(x_0, r_0) \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \neq \emptyset.$$

Αφού το $G_1$ είναι πυκνό, υπάρχει $x_1 \in D(x_0, r_0) \cap G_1$, κι αφού το $D(x_0, r_0) \cap G_1$ είναι ανοιχτό, υπάρχει $r_1 > 0$ (μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι $r_1 \leq 1$, μικραίνοντάς το αν χρειαστεί) ώστε

$$\overline{D(x_1, r_1)} \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1.$$

(Πάρτε πρώτα κατάλληλη ανοιχτή μπάλα με κέντρο το $x_1$, και μετά, κλειστή με μικρότερη ακτίνα). Το $G_2$ είναι πυκνό, άρα υπάρχει $x_2 \in D(x_1, r_1) \cap G_2$, και το $D(x_1, r_1) \cap G_2$ είναι ανοιχτό, επομένως μπορούμε να βρούμε $0 < r_2 \leq 1/2$ τέτοιο ώστε

$$\overline{D(x_2, r_2)} \subseteq D(x_1, r_1) \cap G_2.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in X$ και $0 < r_n \leq 1/n$, τέτοια ώστε

$$\overline{D(x_n, r_n)} \subseteq D(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Από την κατασκευή,

$$\overline{D(x_1, r_1)} \supseteq \overline{D(x_2, r_2)} \supseteq \ldots \supseteq \overline{D(x_n, r_n)} \supseteq \ldots$$

και $\mathrm{diam}(\overline{D(x_n, r_n)}) \leq 2r_n \to 0$. Ο $X$ είναι πλήρης, οπότε το Θεώρημα του Cantor μας εξασφαλίζει ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D(x_n, r_n)} = \{x\}$$

για κάποιο $x \in X$. Τότε,

(i) $x \in \overline{D(x_n, r_n)} \subseteq D(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n \subseteq G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

(ii) $x \in \overline{D(x_1, r_1)} \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1 \subseteq D(x_0, r_0)$.

Δηλαδή,

$$D(x_0, r_0) \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \neq \emptyset. \quad \square$$

Το Θεώρημα 2.4.1 είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.3:

**Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1:** Έστω $(X, d)$ πλήρης μετρικός χώρος, και $(F_n)$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $X$, τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Υποθέτουμε ότι $F_n^{\circ} = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $G_n = X \setminus F_n$. Κάθε $G_n$ είναι ανοιχτό, και

$$\overline{G_n} = \overline{X \setminus F_n} = X \setminus F_n^{\circ} = X \setminus \emptyset = X,$$

δηλαδή κάθε $G_n$ είναι ανοιχτό και πυκνό στον $X$. Από το Θεώρημα 2.4.3,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset \Longrightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Αυτό αντιφάσκει προς την υπόθεση. Άρα, τουλάχιστον ένα από τα $F_n$ έχει μη κενό εσωτερικό. $\square$

Το Θεώρημα του Baire θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη μελέτη των χώρων Banach. Για την ώρα, δίνουμε τρείς εφαρμογές από τις οποίες γίνεται φανερή η ισχύς του:

(1) **Το θεώρημα του Osgood** (1897) *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))$ είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχουν $[a,b] \subseteq [0,1]$ και $M > 0$ τέτοια ώστε*

$$\forall t \in [a,b] \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leq M.$$

*(Δηλαδή, η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$.)*

Ένα παράδειγμα πριν από την απόδειξη: πάρτε σαν $f_n$ την συνάρτηση στο σχήμα. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$, $f_n(t) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Άρα, η

$(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη για κάθε $t$.

Η $(f_n)$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0,1]$, γιατί $\max_{t\in[0,1]}|f_n(t)| = n \to \infty$. Όμως η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη π.χ. στο $[\frac{1}{2},1]$, γιατί $f_n \equiv 0$ στο $[\frac{1}{2},1]$ αν $n \geq 2$, και $|f_1(t)| \leq 1$ στο $[\frac{1}{2},1]$. Δηλαδή,

$$\forall t \in [1/2,1]\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n(t)| \leq 1.$$

**Απόδειξη του θεωρήματος:** Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{t \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq m\}.$$

(α) Κάθε $A_m$ είναι κλειστό: αν $t_k \in A_m$ και $t_k \to t$, τότε

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |f_n(t_k)| \leq m$$

και, από την συνέχεια των $f_n$ έχουμε $f_n(t_k) \to f_n(t)$ καθώς $k \to \infty$, άρα

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |f_n(t)| \leq m,$$

δηλαδή $t \in A_m$.

(β) $[0,1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $t \in [0,1]$. Από την υπόθεση, η $(f_n(t))$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_t > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq M_t$. Υπάρχει $m = m(t) \in \mathbb{N}$ με $m \geq M_t$, και γι' αυτό το $m$ έχουμε $t \in A_m$.

(γ) Ο $[0,1]$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το Θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο $A_{m_0}$ έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχει διάστημα $[a,b] \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$:

$$\forall t \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ |f_n(t)| \leq m_0. \quad \square$$

(2) **Πρόταση**. *Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:*

$$\forall x \geq 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(nx) = 0.$$

*Τότε, $f(y) \to 0$ καθώς $y \to \infty$.*

**Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε
$$A_m = \{x \geq 1 : \forall n \geq m \ |f(nx)| \leq \varepsilon\}.$$
(α) Κάθε $A_m$ είναι κλειστό: αν $x_k \in A_m$ και $x_k \to x$, τότε για κάθε $n \geq m$, από την συνέχεια της $f$ στο $nx$,
$$|f(nx)| = \lim_{k\to\infty} |f(nx_k)| \leq \varepsilon.$$
Άρα, $x \in A_m$.

(β) $[1,\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \geq 1$. Από την υπόθεση, $f(nx) \to 0$. Άρα, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq m_0$, $|f(nx)| \leq \varepsilon$. Δηλαδή, $x \in A_{m_0}$.

(γ) Ο $[1,\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (κλειστό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας). Από το Θεώρημα του Baire, κάποιο $A_m$ έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $[\gamma,\delta] \subseteq A_m$. Παρατηρούμε τα εξής:

1. Αν $x \in [\gamma,\delta]$, τότε $|f(nx)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq m$. Δηλαδή, $|f(y)| \leq \varepsilon$ για κάθε
$$(*) \qquad y \in [m\gamma, m\delta] \cup [(m+1)\gamma, (m+1)\delta] \cup \dots$$
2. Υπάρχει $k \geq m$ τέτοιος ώστε, για κάθε $s \geq k$, $s\delta > (s+1)\gamma$ (αρκεί να διαλέξουμε $k > \gamma/(\delta-\gamma)$.) Τότε,
$$[k\gamma, k\delta] \cup [(k+1)\gamma, (k+1)\delta] \cup \dots = [k\gamma, \infty).$$
Από την $(*)$ έπεται ότι, για κάθε $y \geq k\gamma$, $|f(y)| \leq \varepsilon$.

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $M(=k\gamma) > 0$ τέτοιον ώστε $|f(y)| \leq \varepsilon$ για κάθε $y \geq M$. Άρα, $\lim_{y\to\infty} f(y) = 0$. □

(3) **Πρόταση**. *Θεωρούμε το χώρο $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$, με μετρική την $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Το σύνολο $M$ των $f \in C[0,1]$ που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο του $[0,1]$ είναι πυκνό στον $C[0,1]$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Baire και το εξής Λήμμα:

**Λήμμα 2.4.1** *Για κάθε συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχή και κατά τμήματα γραμμική, με την ιδιότητα $d(f,g) < \varepsilon$.*

[Η $g$ λέγεται *κατά τμήματα γραμμική* αν υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ τέτοια ώστε η $g$ να είναι γραμμική σε κάθε $(t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, N$.]

**Απόδειξη:** Θα χρησιμοποιήσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της $f$: Για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε: αν $t, s \in [0,1]$ και $|t-s| < \delta$ τότε $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/2$.

Βρίσκουμε φυσικό αριθμό $N$ που ικανοποιεί την $1/N < \delta$, και χωρίζουμε το $[0,1]$ σε $N$ ίσα τμήματα. Παίρνουμε δηλαδή τη διαμέριση $P = \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$. Ορίζουμε $g$ έτσι ώστε να είναι γραμμική σε κάθε $[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$, $i = 1, \dots, N$, και στα άκρα κάθε υποδιαστήματος να συμπίπτει με την $f$:

$$g(i/N) = f(i/N), \qquad i = 0, 1, \dots, N.$$

Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $1 \leq i \leq N$ τέτοιος ώστε $\frac{i-1}{N} \leq t \leq \frac{i}{N}$. Τότε,

$$(*) \qquad |f(t) - g(t)| \leq |f(t) - f(i/N)| + |f(i/N) - g(t)|.$$

Όμως,

$$\left|t - \frac{i}{N}\right| < \delta \Longrightarrow \left|f(t) - f(i/N)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

και, από τη γραμμικότητα της $g$ στο $[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ και το γεγονός ότι $|\frac{i}{N} - \frac{i-1}{N}| = \frac{1}{N} < \delta$, βλέπουμε ότι

$$\left|f(\frac{i}{N}) - g(t)\right| = \left|g(\frac{i}{N}) - g(t)\right| \leq \left|g(\frac{i}{N}) - g(\frac{i-1}{N})\right| = \left|f(\frac{i}{N}) - f(\frac{i-1}{N})\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιστρέφοντας στην $(*)$, βλέπουμε ότι $|f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Αφού το $t$ ήταν τυχόν, $d(f,g) < \varepsilon$. $\square$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$D_n = \left\{ f \in C[0,1] : \forall t \in [0,1]\ \exists y \in \left(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}\right) \cap (0,1) : |f(y) - f(t)| > n|y - t| \right\}.$$

**Ισχυρισμός.** Κάθε $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ είναι συνεχής, πουθενά παραγωγίσιμη συνάρτηση.

**Απόδειξη:** Έστω $f \in \bigcap_n D_n$. Για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y_n = y_n(t) \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $|t - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(y_n) - f(t)| > n|y_n - t|$. Αφού $y_n \neq t$, $y_n \to t$, και

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{f(y_n) - f(t)}{y_n - t}\right| = \infty,$$

δεν υπάρχει η $f'(t)$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\bigcap_n D_n$ είναι πυκνό στον $C[0,1]$, και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Baire, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $D_n$ είναι ανοιχτό και πυκνό.

**Ισχυρισμός.** Κάθε $D_n$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $C[0,1]$.

**Απόδειξη:** Είναι πιο εύκολο να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα $D_n^c$ του $D_n$ είναι κλειστό. Έστω $f_k \in D_n^c$ και $f_k \to f$ ως προς την $d$ (αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη - γιατί;)

Αφού $f_k \in D_n^c$, υπάρχει $t_k \in [0,1]$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y \in (0,1)$ με $|y - t_k| < 1/n$ να ισχύει $|f(y) - f(t_k)| \leq n|y - t_k|$.

Αφού $t_k \in [0,1]$, υπάρχουν $t \in [0,1]$ και υπακολουθία $(t_{k_m})$ της $(t_k)$ με $t_{k_m} \to t$. Θα δείξουμε ότι αν $y \in (0,1)$ και $|y-t| < 1/n$, τότε $|f(y)-f(t)| \leq n|y-t|$ (οπότε, $f \in D_n^c$.)

Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in (0,1)$ με $|y-t| < 1/n$. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $y_{k_m} = y + (t_{k_m} - t)$, τότε $y_{k_m} \to y$. Άρα, για μεγάλα $m$ έχουμε $y_{k_m} \in (0,1)$ και $|y_{k_m} - t_{k_m}| = |y-t| < 1/n$. Οπότε,

$$\left|f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})\right| \leq n|y-t|.$$

(ii) Η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $t_{k_m} \to t$. Επίσης, $y_{k_m} - y = t_{k_m} - t \to 0$. Άρα, για μεγάλα $m$ ισχύουν οι

$$|f(t) - f(t_{k_m})| < \varepsilon \quad , \quad |f(y) - f(y_{k_m})| < \varepsilon.$$

(iii) Πάλι για μεγάλα $m$, $d(f_{k_m}, f) < \varepsilon$ (αφού $f_{k_m} \to f$.)

Παίρνουμε $m$ τόσο μεγάλο που να ικανοποιούνται τα (i), (ii) και (iii), και γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(y) - f(t)| &\leq |f(y) - f(y_{k_m})| + |f(y_{k_m}) - f_{k_m}(y_{k_m})| + |f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})| \\ &+ |f_{k_m}(t_{k_m}) - f(t_{k_m})| + |f(t_{k_m}) - f(t)| \\ &< \varepsilon + d(f, f_{k_m}) + n|y-t| + d(f_{k_m}, f) + \varepsilon \\ &< n|y-t| + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $|f(y)-f(t)| \leq n|y-t|$. Αυτό ισχύει για το τυχόν $y \in (0,1)$ με $|y-t| < 1/n$, άρα $f \in D_n^c$. □

**Ισχυρισμός.** Κάθε $D_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του $C[0,1]$.

**Απόδειξη:** Έστω $f \in C[0,1]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από το Λήμμα, υπάρχει $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, κατά τμήματα γραμμική, τέτοια ώστε $d(f,g) < \varepsilon/2$. Επομένως, αρκεί να βρούμε $h \in D_n$ τέτοια ώστε $d(g,h) < \varepsilon/2$.

Η $g$ είναι κατά τμήματα γραμμική, δηλαδή υπάρχουν $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ τέτοια ώστε η $g$ να είναι γραμμική σε κάθε $(t_{i-1}, t_i)$. Έστω $l_i$ η κλίση της $g$ στο $(t_{i-1}, t_i)$.

Ορίζουμε μια μικρή «οδοντωτή» συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $0 \leq w(t) < \varepsilon/2$ στο $[0,1]$, και οι κλίσεις της $w$ είναι (κατ' απόλυτη τιμή ίσες και) μεγαλύτερες από $n + \max\{|l_j| : j = 1, \ldots, N\}$. Θέτουμε $h = g + w$, οπότε

$$d(g,h) = \max_{t \in [0,1]} |w(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι $h \in D_n$: Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $i \leq N$ για τον οποίο $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Επιλέγουμε $|s| < 1/n$ τόσο μικρό ώστε στο διάστημα με άκρα τα $t, t+s$ οι $g$ και $w$ να είναι και οι δύο γραμμικές (το $s$ μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό). Αν $y$ είναι ένα σημείο του ανοιχτού διαστήματος με άκρα $t, t+s$, έχουμε $y \in (0,1)$, $|y-t| < 1/n$, και

$$\begin{aligned}
|h(y) - h(t)| &\geq |w(y) - w(t)| - |g(y) - g(t)| \\
&> \left(n + \max_j |l_j|\right) |y-t| - |l_i||y-t| \\
&= n|y-t|.
\end{aligned}$$

Άρα, $h \in D_n$. □

## 2.5 Ασκήσεις

**1.** Έστω $(x_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $(X,d)$. Είναι η $(x_n)$ Cauchy; Συγκλίνει;

**2.** Έστω $(x_n)$ και $(y_n)$ δύο ακολουθίες Cauchy στο μετρικό χώρο $(X,d)$. Δείξτε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_n = d(x_n, y_n)$ συγκλίνει.

**3.** Θεωρούμε δύο μετρικές $d_1$ και $d_2$ στο ίδιο σύνολο $X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x, y \in X$,

$$ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y).$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ είναι Cauchy στον $(X, d_1)$ αν και μόνο αν είναι Cauchy στον $(X, d_2)$.

**4.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο $(X,d)$, τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$

Δείξτε ότι η $(x_n)$ είναι Cauchy.

**5.** Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Αν κάθε κλειστή μπάλα $B(x,r)$ του $X$ είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς την επαγόμενη μετρική, τότε ο $X$ είναι πλήρης.

**6.** Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος, και $M$ πυκνό υποσύνολο του $X$. Αν κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $M$ συγκλίνει στον $X$, τότε ο $X$ είναι πλήρης.

**7.** Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων με μετρική την $d(m,n) = |m-n|$. Δείξτε ότι ο $(\mathbb{Z}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

**8.** Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών με μετρική την $d(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Δείξτε ότι ο $(X,d)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

**9.** Έστω $U$ μη κενό, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\rho(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)}\right|$$

στο $U \times U$. Δείξτε ότι ο $(U,\rho)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

**10.** (α) Δείξτε ότι ο χώρος $C[a,b]$ των συνεχών συναρτήσεων $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με μετρική την $d(f,g) = \max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$ είναι πλήρης.

[Δείξτε πρώτα ότι $d(f_n,f)\to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα.]

**11.** Έστω $c_{00} \subseteq \ell_\infty$ ο υπόχωρος που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $x=(\xi_k)$ των οποίων οι όροι είναι τελικά μηδέν. Δηλαδή, $x\in c_{00}$ αν και μόνο αν υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geq n_x$.

Δείξτε ότι ο $c_{00}$ δεν είναι πλήρης.

**12.** Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η $d$ είναι μετρική, αλλά ο $(\mathbb{R},d)$ δεν είναι πλήρης.

**13.** Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y$ του $C[a,b]$ που αποτελείται από όλες τις συνεχείς $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=f(b)$. Δείξτε ότι ο $Y$ είναι πλήρης.

**14.** Δείξτε ότι κάθε μη κενό σύνολο $X$ με τη διακριτή μετρική γίνεται πλήρης μετρικός χώρος.

**15.** Θεωρούμε τον $C[a,b]$ με μετρική την $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|$. Δείξτε ότι η $(f_n)$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} n & , 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & , \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

είναι ακολουθία Cauchy, αλλά δεν συγκλίνει.

**16.** Θεωρούμε τον $c_{00}$ με μετρική την $d(x,y) = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k - \eta_k|$. (Παρατηρήστε ότι αυτό είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα: υπάρχει $n(x,y)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\xi_k = \eta_k = 0$ για κάθε $k \geq n(x,y)$.) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_n = (1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, \ldots)$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την $d$, αλλά δεν συγκλίνει στον $(c_{00}, d)$.

**17.** Έστω $X$ πλήρης μετρικός χώρος, $Y$ μετρικός χώρος, και $f: X\to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι αν $(A_n)$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $X$ με $\mathrm{diam}(A_n)\to 0$, τότε $f(\bigcap_n A_n) = \bigcap_n f(A_n)$.

.

## Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** Όχι. Πάρτε ας πούμε την ακολουθία $a_k = (-1)^k$ στο $\mathbb{R}$. Είναι φραγμένη, αλλά $|a_k - a_{k+1}| = 2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε η $(a_k)$ δεν είναι ακολουθία Cauchy. Αφού δεν είναι Cauchy, δεν συγκλίνει.

**2.** Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

δηλαδή,

$$a_n \leq d(x_n, x_m) + a_m + d(y_n, y_m) \Longrightarrow a_n - a_m \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Λόγω συμμετρίας,

$$|a_n - a_m| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι $(x_n), (y_n)$ είναι Cauchy, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, η $(a_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$, οπότε συγκλίνει.

**3.** Υποθέτουμε ότι η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(X, d_1)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $m, n \geq n_0$ τότε $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon/b$. Τότε, αν $m, n \geq n_0$,

$$d_2(x_n, x_m) \leq b \cdot d(x_n, x_m) < b\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(X, d_2)$. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι εντελώς ανάλογη.

**4.** Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{n=N}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Αν $k > l \geq N$, τότε

$$\begin{aligned} d(x_l, x_k) &\leq d(x_l, x_{l+1}) + d(x_{l+1}, x_{l+2}) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) \\ &\leq \sum_{n=l}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy.

**5.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Έχουμε δεί ότι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Υπάρχουν λοιπόν $x \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in B(x, r).$$

Η $B(x,r)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος με την επαγόμενη μετρική (από την υπόθεση), και η $(x_n)$ είναι Cauchy στον $X$, άρα Cauchy και στον $(B(x,r),d)$. Επομένως, υπάρχει $x_0 \in B(x,r)$ τέτοιο ώστε $d(x_n,x_0) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x_0$ στον $X$.

Η $(x_n)$ ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy στον $X$, άρα ο $(X,d)$ είναι πλήρης.

**6.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Το $M$ είναι πυκνό υποσύνολο του $X$, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $w_n \in M$ με την ιδιότητα $d(x_n,w_n) < 1/n$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(x_n)$ είναι Cauchy, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n,m \geq n_0$,

$$d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επίσης, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/n_1 < \varepsilon/3$. Αν θέσουμε $n_2 = \max\{n_0,n_1\}$, τότε για κάθε $n,m \geq n_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(w_n,w_m) &\leq d(w_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,w_m) \\ &< \frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{m} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, η $(w_n)$ είναι Cauchy στο $M$. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $d(w_n,x) \to 0$. Όμως, $d(w_n,x_n) \leq 1/n$, δηλαδή $d(w_n,x_n) \to 0$. Άρα,

$$0 \leq d(x_n,x) \leq d(x_n,w_n)+d(w_n,x) \to 0+0 = 0.$$

Δηλαδή, $x_n \to x$. Αφού η $(x_n)$ ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy στον $X$, ο $(X,d)$ είναι πλήρης.

**7.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{Z}$. Για $\varepsilon = 1/2 > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε, αν $n,m \geq n_0$ τότε $d(x_n,x_m) < 1/2$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n,x_{n_0}) < \frac{1}{2}.$$

Όμως, από τον ορισμό της μετρικής, έχουμε $d(y,x_{n_0}) \geq 1$ αν $y \neq x_{n_0}$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η $(x_n)$ είναι τελικά σταθερή, οπότε συγκλίνει (γιατί;).

**8.** Ορίζουμε $x_n = n$. Η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{N},d)$: έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/n_0 < \varepsilon/2$. Τότε, αν $m,n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n,x_m) = d(n,m) = \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n \to k$ ως προς την $d$. Τότε,

$$d(x_n,k) \to 0 \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right| \to 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \to \frac{1}{k}$$

καθώς $n \to \infty$. Όμως, $1/n \to 0$, άρα $1/k = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{N},d)$, η οποία δεν συγκλίνει ως προς την $d$. Άρα, ο $(\mathbb{N},d)$ δεν είναι πλήρης.

**9.** Παρατηρούμε ότι αν $x,y \in U$, τότε $d(x,U^c) > 0$ και $d(y,U^c) > 0$ (γιατί το $U^c$ είναι κλειστό και $x,y \notin U^c$). Άρα, η $\rho$ ορίζεται καλά.

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι η $\rho$ είναι μετρική. Το πιο ενδιαφέρον σημείο είναι ότι

$$\rho(x,y)=0 \Longrightarrow |x-y|+\left|\frac{1}{d(x,U^c)}-\frac{1}{d(y,U^c)}\right|=0 \Longrightarrow |x-y|=0 \Longrightarrow x=y.$$

Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $(U,\rho)$. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $m,n\geq n_0$ τότε

$$0\leq |x_n-x_m|\leq \rho(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

άρα η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy και στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Υπάρχει λοιπόν $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|x_n-x|\to 0$. Επίσης,

$$0\leq\left|\frac{1}{d(x_n,U^c)}-\frac{1}{d(x_m,U^c)}\right|\leq \rho(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

δηλαδή, η $(1/d(x_n,U^c))$ είναι Cauchy στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$, άρα είναι φραγμένη. Υπάρχει λοιπόν $M>0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{d(x_n,U^c)}\leq M \Longrightarrow d(x_n,U^c)\geq \frac{1}{M}.$$

Αφού $x_n\to x$ ως προς την $|\cdot|$, έχουμε $d(x_n,U^c)\to d(x,U^c)$, και

$$d(x,U^c)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,U^c)\geq \frac{1}{M}>0,$$

δηλαδή $x\in U$. Τέλος,

$$\rho(x,x_n)=|x-x_n|+\left|\frac{1}{d(x,U^c)}-\frac{1}{d(x_n,U^c)}\right|\to 0.$$

**10.** Από τον ορισμό της μετρικής του $C[a,b]$,

$$\begin{aligned} d(f_n,f)\to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \ d(f_n,f)<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \ \max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \forall t\in[a,b]\ \ |f_n(t)-f(t)|<\varepsilon, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ακριβώς ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_n)$ στην $f$.

Έστω τώρα $(f_n)$ ακολουθία Cauchy στον $C[a,b]$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall n,m\geq n_0\ \ d(f_n,f_m)<\varepsilon,$$

δηλαδή,

$$\forall n,m\geq n_0\ \forall t\in[a,b]\ \ |f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(f_n)$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Από γνωστό θεώρημα (Ανάλυση ΙΙ), υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα. Όπως είδαμε παραπάνω, αυτό γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $d(f_n,f)\to 0$.

Αφού η $(f_n)$ ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy στον $C[a,b]$, ο $C[a,b]$ είναι πλήρης.

**11.** Αρκεί να δείξουμε ότι ο $c_{00}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_\infty$ (γιατί ο $\ell_\infty$ είναι πλήρης).

Ορίζουμε

$$x_n = \Big(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\Big), \quad x = \Big(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\Big) \in \ell_\infty \backslash c_{00}.$$

Τότε,

$$d(x_n, x) = \sup \left\{ |1-1|, \dots, \Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\Big|, \Big|0 - \frac{1}{n+1}\Big|, \dots \right\} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Βρήκαμε $(x_n)$ στον $c_{00}$ με $x_n \to x \in \ell_\infty \backslash c_{00}$. Άρα, ο $c_{00}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_\infty$.

**12.** Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε τα αξιώματα της μετρικής. Το μόνο σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι η αιτιολόγηση της συνεπαγωγής

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| = 0 \Longrightarrow x = y,$$

η οποία όμως προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η $f(x) = \arctan x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα ένα προς ένα, στο $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης, ορίζουμε $x_n = n$. Η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{R}, d)$: έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\pi/2 - \arctan n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, αν $m, n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(n, m) = |\arctan n - \arctan m| \\ &\leq |\pi/2 - \arctan n| + |\pi/2 - \arctan m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x_n \to w$ ως προς την $d$. Τότε,

$$d(x_n, w) \to 0 \Longleftrightarrow |\arctan n - \arctan w| \to 0 \Longleftrightarrow \arctan n \to \arctan w$$

καθώς $n \to \infty$. Όμως τότε $\arctan w = \pi/2$, το οποίο είναι άτοπο.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{R}, d)$, η οποία δεν συγκλίνει ως προς την $d$. Άρα, ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.

**13.** Ο $C[a, b]$ είναι πλήρης, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι ο $Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $C[a, b]$. Έστω $f, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f_n \in Y$ και $d(f_n, f) \to 0$.

Από την υπόθεση που κάνουμε, $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, άρα

$$f_n(a) \to f(a), \quad f_n(b) \to f(b).$$

Όμως $f_n \in Y$, άρα $f_n(a) = f_n(b)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(b) = f(b),$$

δηλαδή $f \in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $C[a, b]$.

**14.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Για $\varepsilon = 1/2 > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε $d(x_n, x_m) < 1/2$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2}.$$

Όμως, η $d$ είναι η διακριτή μετρική, δηλαδή $d(y, x_{n_0}) = 1$ αν $y \neq x_{n_0}$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η $(x_n)$ είναι τελικά σταθερή, οπότε συγκλίνει (γιατί;).

**15.** Κάντε ένα σχήμα. Έστω $m < n$. Οι $f_n, f_m$ συμπίπτουν στο $[\frac{1}{m^2}, 1]$ (ίσες με $1/\sqrt{t}$). Άρα,

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^{1/n^2} |n-m| dt + \int_{1/n^2}^{1/m^2} \Big|\frac{1}{\sqrt{t}} - m\Big| dt \\ &= \frac{n-m}{n^2} + 2\sqrt{t}\Big|_{1/n^2}^{1/m^2} - m\Big(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{m}{n^2} + \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{1}{m} + \frac{m}{n^2} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$d(f_n, f_m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Άρα, η $(f_n)$ είναι ακολουθία Cauchy.

Έστω ότι υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $d(f_n, f) \to 0$. Για κάθε $\delta > 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_0^2 < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\delta^1 \Big|\frac{1}{\sqrt{t}} - f(t)\Big| dt \leq \int_{1/n^2}^1 \Big|\frac{1}{\sqrt{t}} - f(t)\Big| dt \\ &= \int_{1/n^2}^1 |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \\ &= d(f_n, f) \to 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_\delta^1 \Big|\frac{1}{\sqrt{t}} - f(t)\Big| dt = 0 \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t \in [\delta, 1].$$

Το $\delta \in (0,1)$ ήταν τυχόν, άρα $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ στο $(0,1]$. Όμως τότε, $\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού $f \in C[0,1]$.

**16.** Αν $n > m$, τότε

$$d(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^m \Big|\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\Big| + \sum_{k=m+1}^n \Big|\frac{1}{k^2} - 0\Big| + \sum_{k=n+1}^\infty |0-0| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Όμως η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $m \geq n_0$

$$\sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι: αν $n > m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Δηλαδή, η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $c_{00}$.

Ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k)_k \in c_{00}$. Θα δείξουμε ότι $\xi_k = \frac{1}{k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο (γιατί τότε, $x \notin c_{00}$). Έστω ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\xi_{k_0} \neq 1/k_0^2$. Δηλαδή, $\left|\xi_{k_0} - \frac{1}{k_0^2}\right| = \alpha > 0$. Τότε, για κάθε $n > k_0$ ισχύει

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k^2} - \xi_k\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k| \geq \left|\frac{1}{k_0^2} - \xi_{k_0}\right| = \alpha,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $d(x_n, x) \to 0$.

Άλλος τρόπος: δείξτε ότι ο $c_{00}$ με αυτή τη μετρική δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_1$ (γιατί αυτό είναι αρκετό;).

**17.** Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq f(A_m) \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Έπεται ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: έστω $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in A_n$ τέτοιο ώστε $f(x_n) = y$.

Αφού $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$, η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy (θυμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος του Cantor). Ο $X$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $x_n \to x$. Αυτό το σημείο $x$ ανήκει στο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (για την ακρίβεια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ - θυμηθείτε πάλι την απόδειξη του θεωρήματος του Cantor). Τέλος, αφού η $f$ είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y = y.$$

Δηλαδή, $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

# Κεφάλαιο 3

# Χώροι με νόρμα

## 3.1 Γραμμικοί χώροι

**3.1.1** Ένα μη κενό σύνολο $X$ λέγεται *γραμμικός χώρος* (ή *διανυσματικός χώρος*) πάνω από το $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις

$+ : X \times X \to X$ (την πρόσθεση)

και

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ (τον πολλαπλασιασμό)

που ικανοποιούν τα εξής:

(I) *Αξιώματα της πρόσθεσης:* για κάθε $x, y, z \in X$,

1. $x + y = y + x$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. Υπάρχει ένα στοιχείο $\vec{0} \in X$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, $\vec{0} + x = x$.
4. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in X$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

Δηλαδή, το $X$ είναι αντιμεταθετική ομάδα με την πράξη της πρόσθεσης.

(II) *Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:* για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

1. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
2. $1x = x$.
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων του γραμμικού χώρου είναι, για παράδειγμα, οι

$$0x = \vec{0}, \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad -x = (-1)x.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τέτοιου είδους ιδιότητες (η δομή του γραμμικού χώρου θα θεωρηθεί, σε γενικές γραμμές, γνωστή). Τα στοιχεία του $X$ θα λέγονται σημεία (ή και διανύσματα).

**3.1.2. Παραδείγματα** (α) Ο $\mathbb{R}^m$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) + (\eta_1, \ldots, \eta_m) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_m + \eta_m),$$

$$\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_m).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ και $-(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (-\xi_1, \ldots, -\xi_m)$.

(β) Το σύνολο $s$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, και $\lambda \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$x + y = (\xi_k + \eta_k) \quad , \quad \lambda x = (\lambda\xi_k).$$

(γ) Αν $A \neq \emptyset$ και $F(A)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$, τότε το $F(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f, g \in F(A)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $f + g, \lambda f \in F(A)$ θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

**3.1.3** Αν $X$ είναι ένας γραμμικός χώρος και $Y$ ένα μη κενό υποσύνολο του $X$, το $Y$ λέγεται (γραμμικός) *υπόχωρος* του $X$ αν για κάθε $x, y \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda x + \mu y \in Y$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $Y$ είναι υπόχωρος του $X$ αν και μόνο αν ο $Y$ είναι γραμμικός χώρος με πράξεις τους περιορισμούς των $+, \cdot$ στα $Y \times Y$ και $\mathbb{R} \times Y$ αντίστοιχα. Ο $Y$ λέγεται *γνήσιος υπόχωρος* του $X$ αν είναι υπόχωρος του $X$ και $Y \neq \{0\}, X$.

Πολλά από τα κλασικά παραδείγματα χώρων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι υπόχωροι του $s$ ή κάποιου $F(A)$:

(1) Ο $\ell_\infty$ είναι γραμμικός χώρος: αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = (\xi_k), y = (\eta_k)$ είναι φραγμένες ακολουθίες, τότε η $\lambda x + \mu y = (\lambda\xi_k + \mu y_k)$ είναι φραγμένη.

(2) Ο $c$ είναι γραμμικός χώρος: αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in c$, τότε υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\xi_k \to a$, $\eta_k \to b$. Τότε, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda\xi_k + \mu\eta_k \to \lambda a + \mu b$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in c$.

(3) Ο $c_0$ είναι γραμμικός χώρος: αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in c_0$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\xi_k \to 0, \ \eta_k \to 0 \Longrightarrow \lambda\xi_k + \mu\eta_k \to 0 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in c_0.$$

(4) Ο $\ell_p$, $1 \leq p < +\infty$ είναι γραμμικός χώρος: αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p < +\infty,$$

τότε, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, από την ανισότητα του Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\xi_k + \mu\eta_k|^p\right)^{1/p} \leq |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + |\mu| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p} < +\infty,$$

δηλαδή $(\lambda\xi_k + \mu\eta_k) \in \ell_p$.

(5) Ο $B(A)$ είναι γραμμικός χώρος: αν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι φραγμένη συνάρτηση.

(6) Ο $C[a,b]$ είναι γραμμικός χώρος: αν οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι συνεχής για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τελείως ανάλογα, οι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $C^1[a,b]$, οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $D[a,b]$, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $I[a,b]$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $F[a,b]$.

**3.1.4** Αν $x_1, \ldots, x_m$ είναι διανύσματα του γραμμικού χώρου $X$, τότε *γραμμικός συνδυασμός* των $x_i$ είναι κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Αν $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$, τότε ο *υπόχωρος που παράγεται από το* $M$ (γράφουμε $\mathrm{span}(M)$ ή $\langle M \rangle$) είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του $M$:

$$\mathrm{span}(M) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m : \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in M, m \in \mathbb{N}\}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathrm{span}(M)$ είναι όντως υπόχωρος του $X$.

**3.1.5** Αν $x_1, \ldots, x_m \in X$, λέμε ότι τα $x_i$ είναι *γραμμικά ανεξάρτητα* αν

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ισοδύναμα, αν κανένα $x_i$ δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $x_j$, $j \neq i$. Λέμε ότι το πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πιό γενικά, ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε *πεπερασμένο* υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τα $x_1, \ldots, x_m$ λέγονται *εξαρτημένα* αν υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0}$. Ένα $M \neq \emptyset$ λέγεται εξαρτημένο αν έχει πεπερασμένο εξαρτημένο υποσύνολο, αν δηλαδή υπάρχουν εξαρτημένα $x_1, \ldots, x_m \in M$.

**Παραδείγματα**. (α) Στον $C[a,b]$, το σύνολο $M = \{1, t, \ldots, t^N, \ldots\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N = \vec{0}$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, και $\lambda_N \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N$ μηδενίζεται ταυτοτικά στο $[a,b]$. Άρα και η $N$-στή του παράγωγος είναι ταυτοτικά 0 στο $[a,b]$. Όμως,

$$P^{(N)}(t) \equiv N! \lambda_N \neq 0,$$

άτοπο. Άρα, το $M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (γιατί;).

(β) Ορίζουμε $\delta_{nk} = 0$ αν $n \neq k$ και $\delta_{nk} = 1$ αν $n = k$. Το σύνολο $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ (όπου $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$) είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $s$ (εξηγήστε), άρα και στους $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$, $c$, και $c_0$.

**3.1.6** Λέμε ότι ο χώρος $X$ έχει *πεπερασμένη διάσταση* αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

1. Στον $X$ υπάρχουν $n$ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$.
2. Αν $k \geq n+1$, οποιαδήποτε $k$ διανύσματα του $X$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έπεται ότι τα $x_1, \ldots, x_n$ παράγουν το χώρο: $X = \text{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ (άσκηση).

Ο $X$ έχει άπειρη διάσταση αν $X \neq \{0\}$ και ο $X$ δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Δηλαδή, αν περιέχει άπειρο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο.

*Παράδειγμα:* Ο $C[a, b]$ και οι χώροι $\ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$ είναι απειροδιάστατοι.

**3.1.7** Ένα υποσύνολο $M$ του $X$ λέγεται *βάση* (Hamel βάση) του $X$ αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον $X$. Αναβάλλουμε την απόδειξη του Θεωρήματος Ύπαρξης Βάσης:

**Θεώρημα** *Κάθε γραμμικός χώρος $X$ έχει βάση. Οποιεσδήποτε δύο βάσεις του $X$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του $X$ λέγεται *διάσταση* του $X$.

## 3.2 Χώροι με νόρμα - Χώροι Banach

**Ορισμός**. Έστω $X$ ένας γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν ικανοποιεί τα εξής: για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

(N1) $\|x\| \geq 0$.

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(η νόρμα του διανύσματος $x$ «μετράει» την απόσταση του $x$ από το 0, και ζητάμε να έχει τις πιό φυσιολογικές ιδιότητες που η απόσταση θα έπρεπε να έχει.)

Κάθε νόρμα επάγει μια *μετρική* στον $X$: για κάθε $x, y \in X$, ορίζουμε

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

**Πρόταση 3.2.1** *Η $d$ είναι μετρική.*

**Απόδειξη:** (M1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, από την (N1).

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, από την (N2).

(M3) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \, \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$, από την (N3).

(M4) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$, από την (N4). $\square$

**Ορισμός**. *Χώρος Banach* είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή, ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική $d$ που επάγεται από τη νόρμα.)

**Παραδείγματα.** (α) Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2}$, όπου $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα (η τριγωνική ανισότητα είναι η ανισότητα του Minkowski με $p = 2$.)

Στην Παράγραφο 2.2 είδαμε ότι ο $\mathbb{R}^m$ είναι πλήρης ως προς τη μετρική $d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\xi_k - \eta_k|^2}$. Άρα, ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

(β) Στον $\ell_p = \{x = (\xi_k) : \sum_k |\xi_k|^p < \infty\}$, $1 \le p < \infty$, ορίζουμε

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \xi_k|^p \right)^{1/p} = \left( |\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \\ &= |\lambda| \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|. \end{aligned}$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι η ανισότητα του Minkowski. Άρα, ο $\ell_p$ είναι χώρος με νόρμα. Στην Παράγραφο 2.2 είδαμε ότι ο $\ell_p$ είναι πλήρης ως προς τη μετρική

$$d(x,y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p}.$$

Άρα, ο $\ell_p$, $1 \le p < \infty$, είναι χώρος Banach.

(γ) Η $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ είναι νόρμα στον $\ell_\infty$. Έχουμε δεί ότι ο $\ell_\infty$ είναι πλήρης ως προς την

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Άρα, ο $\ell_\infty$ είναι χώρος Banach. Οι $c$, $c_0$ είναι κλειστοί υπόχωροι του $\ell_\infty$, άρα χώροι Banach.

(δ) Ο $C[a,b]$ είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Ελέγξτε τις λεπτομέρειες.

(ε) Η $\|f\|' = \int_a^b |f(t)| dt$ είναι επίσης νόρμα στον $C[a,b]$. Είδαμε όμως ότι ο $C[a,b]$ δεν είναι πλήρης ως προς την $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$. Άρα, ο $(C[a,b], \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά όχι χώρος Banach.

Η επόμενη πρόταση συνδέει τη γραμμική με την τοπολογική δομή ενός χώρου με νόρμα:

**Πρόταση 3.2.2** *Σε κάθε χώρο με νόρμα, οι* $\|\cdot\|$ *και* $+, \cdot$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

**Απόδειξη:** Τι εννοούμε μ' αυτό: πρώτα-πρώτα, αν $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ στον $X$ αν και μόνο αν $d(x_n, x) \to 0$, δηλαδή αν $\|x_n - x\| \to 0$. Κατόπιν, για να ελέγξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης $f$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x).$$

(α) *Η* $\|\cdot\|$ *είναι συνεχής:* Ζητάμε, $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. Αυτό όμως έπεται από την

$$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x - x_n\|,$$

αφού $\|x - x_n\| \to 0$.

(β) *Η* $+$ *είναι συνεχής:* Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $x_n + y_n \to x + y$. Αυτό είναι συνέπεια της

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

(γ) *Η* $\cdot$ *είναι συνεχής:* Θα δείξουμε ότι αν $\lambda_n \to \lambda$ και $x_n \to x$, τότε $\lambda_n x_n \to \lambda x$. Γράφουμε

$$(*) \quad \|\lambda x - \lambda_n x_n\| = \|\lambda_n(x - x_n) + (\lambda - \lambda_n)x\| \leq |\lambda_n|\, \|x - x_n\| + \|x\|\, |\lambda - \lambda_n|.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $\lambda_n \to \lambda$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\lambda_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, η $(*)$ γίνεται

$$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \leq M\|x - x_n\| + \|x\|\, |\lambda - \lambda_n| \to 0. \quad \square$$

Κάθε μετρική που επάγεται από νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες: είναι «καλή» μετρική (παρατηρήστε ότι στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.1 δεν χρησιμοποιήθηκαν όλες οι ιδιότητες της νόρμας):

**Πρόταση 3.2.3** *Έστω* $X$ *χώρος με νόρμα, και* $d$ *η επαγόμενη μετρική. Τότε, για κάθε* $x, y, z \in X$ *και κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$, *έχουμε*

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,
2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

**Απόδειξη:** (α) $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$.
(β) $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\, \|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$. $\square$

**Παράδειγμα**: Στον $s$, η

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

είναι μετρική. Ο $s$ είναι γραμμικός χώρος, όμως η $d$ δεν επάγεται από κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $s$: θα έπρεπε να ικανοποιεί την

$$d(2x,0) = \|2x\| = 2\|x\| = 2d(x,0),$$

δηλαδή για κάθε $x = (\xi_k) \in s$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{2|\xi_k|}{1+2|\xi_k|} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|}.$$

Αυτό δεν ισχύει (πάρτε, για παράδειγμα, $x = (1,0,\ldots)$.)

**Ορισμός** Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Η *μοναδιαία μπάλα* $B_X$ του $X$ είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Δηλαδή,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

**Πρόταση 3.2.4** *Σε κάθε χώρο με νόρμα $X$, η μοναδιαία μπάλα $B_X$ είναι σύνολο κλειστό, φραγμένο, κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0, με μη κενό εσωτερικό.*

**Απόδειξη:** (α) Η $B_X$ είναι φραγμένη: $B_X \subseteq D(0,2)$.

(β) Αν $\|x_n\| \leq 1$ και $x_n \to x$, τότε $\|x\| = \lim_n \|x_n\| \leq 1$. Δηλαδή, η $B_X$ είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Η $B_X$ είναι κυρτή: αν $x, y \in B_X$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

δηλαδή, $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_X$.

(δ) Αν $x \in B_X$, τότε $\|-x\| = \|x\| \leq 1$, δηλαδή $-x \in B_X$. Άρα, η $B_X$ είναι συμμετρική ως προς το 0.

(ε) $D(0,1/2) \subseteq B_X$, άρα $B_X^\circ \neq \emptyset$. □

## 3.3 Σύγκλιση σειρών

Έχουμε δεί τον ορισμό της *συγκλίνουσας ακολουθίας* σε ένα χώρο με νόρμα: αν $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι $x_n \to x$ αν $\|x_n - x\| \to 0$.

Τελείως ανάλογα, μια ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ο $X$ είναι γραμμικός χώρος, επομένως μπορούμε να *προσθέτουμε* τους όρους μιάς ακολουθίας στον $X$. Αυτό οδηγεί σε μια φυσιολογική γενίκευση της έννοιας της *συγκλίνουσας σειράς* σε αυθαίρετο χώρο με νόρμα:

**Ορισμός** (α) Έστω $(x_k)$ ακολουθία στον $X$. Η ακολουθία $(s_n)$ των *μερικών αθροισμάτων* της $(x_k)$ ορίζεται από την

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $s_n \to x$, τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει στο* $x$, και γράφουμε

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

(β) Λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει απολύτως*, αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$$

(δηλαδή, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.)

**Πρόταση 3.3.1** *Έστω $X$ χώρος Banach. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως στον $X$, τότε συγκλίνει στον $X$.*

**Απόδειξη:** Έστω $(x_k)$ ακολουθία στον $X$, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geq n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η $(s_n)$ είναι Cauchy. Ο $X$ είναι πλήρης, άρα η $s_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Αυτό εξ' ορισμού σημαίνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο $x$. $\square$

Η ιδιότητα της Πρότασης 3.3.1 χαρακτηρίζει τους πλήρεις χώρους με νόρμα:

**Πρόταση 3.3.2** *Αν σε ένα χώρο $X$ με νόρμα, κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει, τότε ο $X$ είναι πλήρης (είναι χώρος Banach).*

**Απόδειξη:** Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $X$. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε (γιατί;) $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τέτοια ώστε

$$\forall n > m \geq n_k, \quad \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$n_2 > n_1 \geq n_1 \Longrightarrow \|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2},$$

$$n_3 > n_2 \geq n_2 \Longrightarrow \|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2},$$

και, γενικά,

$$n_{k+1} > n_k \geq n_k \Longrightarrow \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{n_{m+1}} - x_{n_1} \to x$. Άρα, $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$. Δείξαμε ότι η $(x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον $X$ (Πρόταση 2.1.3). Έπεται ότι ο $X$ είναι πλήρης. □

Έχοντας στη διάθεσή μας την έννοια της συγκλίνουσας σειράς, μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια «βάσης» διαφορετική από αυτήν της Hamel βάσης:

**Ορισμός** Μια ακολουθία $(e_n)$ λέγεται *βάση Schauder* του χώρου $X$, αν $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

(υπάρχουν δηλαδή μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\|x - (a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m)\| \to 0$$

καθώς $m \to \infty$.) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ είναι το *ανάπτυγμα* του $x$ ως προς τη βάση $(e_n)$.

**Παράδειγμα** Αν $1 \leq p < +\infty$, η ακολουθία $(e_n)$ με $e_n = (\delta_{nk})$ είναι βάση Schauder του $\ell_p$ (εξηγήστε).

**Πρόταση 3.3.3** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Αν ο $X$ έχει βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε ο $X$ είναι διαχωρίσιμος.*

**Απόδειξη:** Ορίζουμε $M = \{\sum_{n=1}^{m} q_n e_n : m \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q}\}$. Το $M$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{m} a_n e_n\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \ldots, m$, βρίσκουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιους ώστε

$$|q_n - a_n| \, \|e_n\| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Τότε, $\sum_{n=1}^m q_n e_n \in M$, και

$$\begin{aligned} \Big\|x - \sum_{n=1}^m q_n e_n\Big\| &\leq \Big\|x - \sum_{n=1}^m a_n e_n\Big\| + \Big\|\sum_{n=1}^m (a_n - q_n) e_n\Big\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^m |a_n - q_n| \, \|e_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + m\frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M} = X$. $\square$

*Σημείωση:* Το 1936, ο Mazur ρώτησε αν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 3.3.3: αν δηλαδή, κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder. Το ερώτημα αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο: το 1973, ο Per Enflo έδωσε αρνητική απάντηση.

## 3.4 Ασκήσεις

**1.** Αν $Y$ και $Z$ είναι υπόχωροι του $X$, δείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του $X$, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του $X$ αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

**2.** (α) Δείξτε ότι, αν $1 \leq p < r \leq \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα $x$ για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

**3.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου $Y$ του $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$.

**4.** Δείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύει

$$B(x,r) = \overline{D(x,r)}.$$

**5.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $Y$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $X$. Δείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

**6.** Έστω $X$ γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον $X$. Δείξτε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

**7.** Ο $c_{00}$ περιέχεται σε κάθε $\ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι είναι πυκνός στον $\ell_p$, $1 \leq p < +\infty$, όχι όμως στον $\ell_\infty$.

**8.** Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το $S$ είναι κλειστό στον $\ell_1$ (και στον $\ell_\infty$) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.

Δείξτε ότι ο $\ell_1$ με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

**9.** Στον $\ell_1$ ορίζουμε

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)|\xi_k|.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

**10.** Έστω $X$ $n$-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον $X$. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

**11.** Έστω $C^1[0,1]$ ο χώρος των συνεχώς παραγωγίσιμων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|f\| = \max\left\{\max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \max_{0 \leq t \leq 1} |f'(t)|\right\}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι όντως νόρμα, και ότι ο $(C^1[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

**12.** Στον $c_0$ θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k}$. Δείξτε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.

**13.** Θεωρούμε τον $c_{00}$ σαν υπόχωρο του $\ell_\infty$. Έστω $y_n = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \ldots\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον $Y$. Τι συμπεραίνετε;

## Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** (α) Για την τομή: υποθέτουμε ότι $x, y \in Y \cap Z$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αφού $x, y \in Y$ και ο $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$, παίρνουμε $\lambda x + \mu y \in Y$. Ομοίως, $\lambda x + \mu y \in Z$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in Y \cap Z$.

(β) Για την ένωση: αν $Y \subseteq Z$ τότε $Y \cup Z = Z$, ενώ αν $Z \subseteq Y$ τότε $Y \cup Z = Y$. Σε κάθε περίπτωση, ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$. Με την υπόθεση ότι υπάρχουν $y \in Y \setminus Z$ και $z \in Z \setminus Y$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αφού $y, z \in Y \cup Z$, έχουμε $y + z \in Y \cup Z$.

Αν $y + z \in Y$ τότε $(y + z) - y \in Y$ γιατί ο $Y$ είναι υπόχωρος, δηλαδή $z \in Y$ το οποίο είναι άτοπο.

Αν $y + z \in Z$ τότε $(y + z) - z \in Z$ γιατί ο $Z$ είναι υπόχωρος, δηλαδή $y \in Z$ το οποίο είναι πάλι άτοπο.

Αφού δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι $Y \setminus Z \neq \emptyset$ και $Z \setminus Y \neq \emptyset$, έχουμε είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

**2.** (α) Δείξτε την εξής ανισότητα: αν $r \geq 1$ και $a, b \geq 0$, τότε $(a+b)^r \geq a^r + b^r$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $r \geq 1$ και $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_n)^r \geq a_1^r + \cdots + a_n^r.$$

Έστω $p < r$. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\|_p^r = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{r/p} \geq (|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p} = |\xi_1|^r + \cdots + |\xi_n|^r = \|x\|_r^r,$$

οπότε $\|x\|_r \leq \|x\|_p$ (χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη ανισότητα για τα $r/p > 1$ και $a_k = |\xi_k|^p$). Ισότητα ισχύει αν $x = \vec{0}$ ή $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Για την άλλη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^p &= |\xi_1|^p \cdot 1 + \cdots + |\xi_n|^p \cdot 1 \\
&\leq \Big((|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p}\Big)^{\frac{p}{r}} (1 + \cdots + 1)^{1-\frac{p}{r}} \\
&= \|x\|_r^p n^{1-\frac{p}{r}},
\end{aligned}$$

άρα $\|x\|_p \leq \|x\|_r n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$. Ισότητα ισχύει αν $x = (1, \ldots, 1)$. Η περίπτωση $r = \infty$ είναι απλή.

(β) Από το (α) έχουμε $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$ για κάθε $p \geq 1$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $n^{1/p} \to 1$ όταν $p \to \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^{1/p} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $p > N$. Τότε, για κάθε $p > N$ ισχύει η

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

**3.** Έστω $z, w \in \overline{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν $z_n, w_n \in Y$ με $z_n \to z$ και $w_n \to w$. Αφού ο $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda z_n + \mu w_n \in Y$.

Όμως οι πράξεις του $X$ είναι συνεχείς ως προς τη νόρμα, άρα

$$\lambda z_n + \mu w_n \to \lambda z + \mu w.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda z + \mu w \in \overline{Y}$.

**4.** Η $B(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο και $D(x,r) \subseteq B(x,r)$. Άρα,

$$\overline{D(x,r)} \subseteq B(x,r).$$

Αντίστροφα, έστω $y \in B(x,r)$, $y \neq x$. Ορίζουμε $y_n = x + \lambda_n(y-x)$, όπου $(\lambda_n)$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με όριο το 1. Τότε $y_n \to x + (y-x) = y$ και

$$\|x - y_n\| = \|\lambda_n(y-x)\| = \lambda_n\|y-x\| < \|y-x\| \leq r,$$

δηλαδή $y_n \in D(x,r)$ και $y_n \to y$. Έπεται ότι $y \in \overline{D(x,r)}$, και αφού το $y \in B(x,r)$, $y \neq x$ ήταν τυχόν, $B(x,r) \subseteq \overline{D(x,r)}$.

**5.** Αφού $Y^\circ \neq \emptyset$, υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $D(y,r) \subseteq Y$. Ειδικότερα, $y \in Y$.

Έστω $x \in X$, $x \neq y$. Τότε, $y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in D(y,r)$ (γιατί;), άρα

$$y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y.$$

Όμως ο $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$, οπότε χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $y \in Y$ παίρνουμε

$$\frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y \Longrightarrow x - y \in Y \Longrightarrow x \in Y.$$

Το $x$ ήταν τυχόν, άρα $Y = X$.

**6.** Έστω ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|')}$, τότε $\|x\|' \leq 1$. Άρα, $\|x\| \leq \|x\|' \leq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$. Δηλαδή, $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\|' = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|'} \in B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)},$$

δηλαδή

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\| \leq 1 \Longrightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leq 1.$$

Η $\|0\| \leq \|0\|'$ ισχύει σαν ισότητα, οπότε δείξαμε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$.

**7.** (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon^p$.

Ορίζουμε $w = (\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, \ldots) \in c_{00}$. Τότε,

$$\|x - w\| = \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

δηλαδή $D(x,\varepsilon) \cap c_{00} \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ και το $x \in \ell_p$ ήταν τυχόντα, συμπεραίνουμε ότι ο $c_{00}$ είναι πυκνός στον $\ell_p$, $1 \leq p < +\infty$.

(β) Θεωρούμε το $x = (1, \ldots, 1, \ldots) \in \ell_\infty$. Αν $w \in c_{00}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $w_k = 0$ για κάθε $k \geq N$. Άρα,

$$\|x - w\| = \sup\{|1 - w_k| : k \in \mathbb{N}\} \geq |1 - w_N| = 1.$$

Δηλαδή $d(x, c_{00}) \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $D(x,1) \cap c_{00} = \emptyset$. Άρα, ο $c_{00}$ δεν είναι πυκνός στον $\ell_\infty$.

**8.** (α) Έστω $x_n = (\xi_{nk}) \in S$, δηλαδή $\sum_k |\xi_{nk}| \leq 1$ για κάθε $n$. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k) \in \ell_\infty$. Τότε,

$$\sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\xi_{nk} \to \xi_k$ καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}| \leq 1,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leq 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $N$, έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1$, δηλαδή $x \in S$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $S$ είναι κλειστό στον $\ell_\infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι το $S$ έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ - άρα και στον $\ell_\infty$. Έστω ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$\{z \in \ell_1 : \|z - x\|_{\ell_\infty} < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \ldots$ για τους οποίους $\xi_{k_j} \geq 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τα αρνητικά $\xi_k$). Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $N\varepsilon/2 > 1$ και ορίζουμε $\xi'_{k_1} = \xi_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \xi'_{k_N} = \xi_{k_N} + \frac{\varepsilon}{2}$, και $\xi'_k = \xi_k$ για όλους τους άλλους $k$. Τότε το $x' = (\xi'_k) \in \ell_1$, $\|x - x'\|_{\ell_\infty} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{N\varepsilon}{2} > 1,$$

δηλαδή $x' \notin S$. Άτοπο, γιατί είχαμε υποθέσει ότι $\ell_1 \cap D(x,\varepsilon) \subseteq S$.

(γ) Έστω ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος Banach. Τότε, ο $\ell_1$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_\infty$ ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$ (γιατί;). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = nS = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq n\}.$$

Κάθε $F_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\ell_1$ ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$, και έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$: αν το $nS$ περιείχε μπάλα ακτίνας $r > 0$, τότε το $S$ θα περιείχε μπάλα ακτίνας $r/n$, άτοπο από το (β).

Τα $F_n$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\ell_1$ με κενό εσωτερικό και $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα του Baire. Άρα, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

**9.** Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά, γιατί αν $x \in \ell_1$ έχουμε

$$2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| < +\infty.$$

Η μόνη ιδιότητα της νόρμας που χρειάζεται προσοχή, είναι η $\|x\|' = 0 \Longrightarrow x = 0$. Έχουμε

$$\|x\|' = 0 \Longrightarrow 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k| = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geq 2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0$. Αυτά τα δύο μάς δίνουν και την $\xi_1 = 0$, άρα $x = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|'$ και η συνήθης νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\ell_1$ είναι ισοδύναμες. Αφού ο $(\ell_1, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, αυτό δείχνει αμέσως ότι ο $\ell_1$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). Έχουμε:

$$\|x\|' \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = \frac{7}{2}\|x\|,$$

και

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = |\xi_1| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k - \sum_{k=2}^{\infty}\xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right| + |\sum_{k=2}^{\infty}\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right| + 2\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leq 2\left(2\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k|\right) \\
&= 2\|x\|'.
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι $\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x\|' \leq \frac{7}{2}\|x\|$ για κάθε $x \in \ell_1$, άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

**10.** Τα $x_i$ παράγουν τον $X$, επομένως κάθε $x \in X$ γράφεται με τουλάχιστον έναν τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Άρα, το

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}$$

είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, οπότε η

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}$$

ορίζεται καλά. Προφανώς, $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Για το $(N2)$: Έστω ότι $\|x\| = 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\lambda_i^{(k)}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i^{(k)}| < \frac{1}{k}$ και $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k)}x_i$. Αφού $|\lambda_i^{(k)}| < 1/k$, έχουμε $\lambda_i^{(k)} \to 0$ για κάθε $i \leq m$. Πάρτε οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|'$ στον $X$. Τότε, $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k)}x_i \to \sum_{k=1}^{m} 0 \cdot x_i = \vec{0}$ ως προς την $\|\cdot\|'$, άρα $x = \vec{0}$.

Για το $(N3)$: Έστω $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ και $\|x\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon$. Τότε, $ax = \sum_{i=1}^m (a\lambda_i)x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |a\lambda_i| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon \Longrightarrow \|ax\| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon$ ήταν τυχόν, $\|ax\| \leq |a| \cdot \|x\|$. Τελείως ανάλογα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για το $(N4)$: Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|y\| + \varepsilon.$$

Τότε, $x + y = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i)x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| + \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$\|x + y\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon$ ήταν τυχόν, παίρνουμε την $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**11.** Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $C^1[0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι $(f_n)$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $C^1[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $n, m \geq n_0$, τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|f_n - f_m\|^* < \varepsilon$ και $\|f_n' - f_m'\|^* < \varepsilon$, όπου $\|\cdot\|^*$ η συνήθης νόρμα στον $C[0,1]$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης, οι $(f_n)$ και $(f_n')$ είναι ακολουθίες Cauchy, άρα υπάρχουν συνεχείς $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f_n \to f$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα. Από γνωστό θεώρημα (Ανάλυση ΙΙ), η $f$ είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. Αφού η $g$ είναι συνεχής, έχουμε $f \in C^1[0,1]$. Τέλος, $\|f_n - f\|^* \to 0$ και $\|f_n' - f'\|^* \to 0$, άρα

$$\|f_n - f\| = \max\{\|f_n - f\|^*, \|f_n' - f'\|^*\} \to 0.$$

Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $C^1[0,1]$. Η $(f_n)$ ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy, άρα ο $(C^1[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

**12.** Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά: αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε $|\xi_k| \to 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_k| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{M}{2^k} = M < +\infty.$$

Τα αξιώματα της νόρμας ελέγχονται εύκολα.

Θα ορίσουμε ακολουθία Cauchy στον $(c_0, \|\cdot\|')$, η οποία δεν συγκλίνει. Αυτό θα δείξει ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ δεν είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ ($n$ μονάδες). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$\|x_n - x_m\| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

δηλαδή η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|'$. Έστω ότι υπάρχει $x=(\xi_k)\in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x_n-x\|'\to 0$. Αφού $\xi_k\to 0$, υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\xi_{k_0}|<1/2$. Αν $n\geq k_0$, τότε

$$\|x_n-x\|'=\sum_{k=1}^{n}\frac{|1-\xi_k|}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\xi_k|}{2^k}\geq\frac{|1-\xi_{k_0}|}{2^{k_0}}\geq\frac{1}{2^{k_0+1}}.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\|x_n-x\|'\to 0$.

**13.** Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$. Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_n y_n$ είναι

$$s_k=y_1+\cdots+y_k=(1,\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{k^2},0,\ldots)\to x=(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

στον $\ell_\infty$. Αν υπήρχε $y\in c_{00}$ για το οποίο $s_k\to y$, από μοναδικότητα του ορίου (στον $\ell_\infty$) θα είχαμε $y=x\notin c_{00}$, άτοπο. Βρήκαμε σειρά στον $c_{00}$ η οποία συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει. Άρα, ο $(c_{00},\|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

# Κεφάλαιο 4

# Χώροι πεπερασμένης διάστασης

## 4.1 Βασικές ιδιότητες

Η πρώτη κλάση χώρων με νόρμα που θα μελετήσουμε είναι αυτή των χώρων που, σαν γραμμικοί χώροι, έχουν πεπερασμένη διάσταση. Είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι η δομή τους θα είναι απλούστερη. Στο Κεφάλαιο αυτό θα δούμε αρκετές καλές τους ιδιότητες, καθώς και μερικές σημαντικές διαφορές τους από τους χώρους άπειρης διάστασης.

**Λήμμα 4.1.1** *Εστω $X$ χώρος με νόρμα, και έστω $x_1, \dots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $X$. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ (που εξαρτάται από τη νόρμα και από τα $x_1, \dots, x_m$), τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ να ισχύει*

$$c\,(|a_1| + \cdots + |a_m|) \leq \|a_1x_1 + \cdots + a_mx_m\|.$$

*(δηλαδή, αν οι συντελεστές $a_i$ είναι «μεγάλοι», τότε το διάνυσμα $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$ δεν μπορεί να έχει «αυθαίρετα» μικρή νόρμα.)*

**Απόδειξη:** Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = 1 \Longrightarrow \|\beta_1x_1 + \cdots + \beta_mx_m\| \geq c.$$

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\beta_1^{(k)}, \dots, \beta_m^{(k)} \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k)}| = 1$ και

$$\|\beta_1^{(k)}x_1 + \cdots + \beta_m^{(k)}x_m\| < \frac{1}{k}.$$

Δηλαδή, αν θέσουμε $y^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^{(k)}x_i$, έχουμε $\|y^{(k)}\| \to 0$.

Σκεφτόμαστε ως εξής: αφού για κάθε $k$ ισχύει η $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k)}| = 1$, ειδικότερα για κάθε $k$ έχουμε $|\beta_1^{(k)}| \leq 1$. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(\beta_1^{(k_s)})$ της $(\beta_1^{(k)})$ που συγκλίνει σε κάποιον $\beta_1 \in \mathbb{R}$.

Κοιτάμε τώρα την $(\beta_2^{(k_s)})$: πάλι, $|\beta_2^{(k_s)}| \leq 1$, επομένως υπάρχει υπακολουθία $(\beta_2^{(k_{l_s})})$ της $(\beta_2^{(k_s)})$ με $\beta_2^{(k_{l_s})} \to \beta_2 \in \mathbb{R}$. Όμως τότε, $\beta_1^{(k_{l_s})} \to \beta_1$ (είναι υπακολουθία της $(\beta_1^{(k_s)})$.)

Κάνοντας $m$ βήματα, βρίσκουμε $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ τέτοιους ώστε

$$\forall i = 1, \ldots, m, \qquad \beta_i^{(k_n)} \to \beta_i.$$

Ορίζουμε $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$. Τότε,

$$\|y - y^{(k_n)}\| = \|\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \beta_i^{(k_n)}) x_i\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\beta_i - \beta_i^{(k_n)}| \, \|x_i\| \to 0.$$

Άρα, $y^{(k_n)} \to y$ και αφού $\|y^{(k_n)}\| \to 0$,

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y^{(k_n)}\| = 0,$$

δηλαδή, $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m = \vec{0}$. Τα $x_1, \ldots, x_m$ έχουν υποτεθεί γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. Όμως,

$$\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k_n)}| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την $(*)$.

Έστω τώρα τυχόντες $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Αν $a_1 = \ldots = a_m = 0$, τότε

$$0 = \|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq c \sum_{i=1}^{m} |a_i| = 0.$$

Αν $A = \sum_{i=1}^{m} |a_i| \neq 0$, ορίζουμε $\beta_i = a_i / A$. Τότε, $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = 1$, οπότε η $(*)$ δίνει

$$\Big\| \frac{1}{A} (a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m) \Big\| = \|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m\| \geq c,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq cA = c \sum_{i=1}^{m} |a_i|. \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το Λήμμα, δείχνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων πεπερασμένης διάστασης:

**Θεώρημα 4.1.1** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και έστω $Y$ υπόχωρος του $X$ που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο $Y$ είναι πλήρης. Ειδικότερα, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.*

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι $\dim Y = n$, και σταθεροποιούμε μια βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $Y$. Έστω $(y^{(m)})$ ακολουθία Cauchy στον $Y$. Κάθε $y^{(m)}$ γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των $e_i$:

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} e_i.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(y^{(m)})$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $m, s \geq m_0$, τότε $\|y^{(m)} - y^{(s)}\| < \varepsilon$. Δηλαδή, για κάθε $m, s \geq m_0$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i^{(s)}) e_i\Big\| < \varepsilon.$$

Τα $e_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα, από το Λήμμα υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $m, s \geq m_0$,

$$c \sum_{i=1}^{n} |a_i^{(m)} - a_i^{(s)}| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i^{(s)}) e_i\Big\| < \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $m, s \geq m_0$,

$$|a_i^{(m)} - a_i^{(s)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

(γιατί;). Άρα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, η $(a_i^{(m)})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Οπότε, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$a_1^{(m)} \to a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n^{(m)} \to a_n.$$

Ορίζουμε $y = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in Y$. Τότε,

$$\|y - y^{(m)}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i^{(m)}| \, \|e_i\| \to 0,$$

δηλαδή, $y^{(m)} \to y$. Άρα, ο $Y$ είναι πλήρης. □

*Σημείωση:* Στην Πρόταση 2.1.5(α) είδαμε ότι αν $(X, d)$ είναι ένας μετρικός χώρος, τότε κάθε πλήρης υπόχωρός του είναι κλειστός. Η παρατήρηση αυτή και το Θεώρημα 4.1.1 έχουν την εξής άμεση συνέπεια:

**Θεώρημα 4.1.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και έστω $Y$ υπόχωρος του $X$ που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο $Y$ είναι κλειστός στον $X$.*

**Απόδειξη:** Από το Θεώρημα 4.1.1, ο $Y$ είναι πλήρης. □

**Εφαρμογή:** *Αν $X$ είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε κάθε βάση Hamel του $X$ είναι υπεραριθμήσιμη.*

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι ο $X$ έχει άπειρη αριθμήσιμη βάση Hamel

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

Ορίζουμε $Y_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Κάθε $Y_n$ έχει πεπερασμένη διάσταση, επομένως είναι κλειστός υπόχωρος του $X$.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in X$ είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των $e_n$, άρα

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Όμως, ο $X$ είναι *πλήρης*. Το Θεώρημα του Baire μας λέει ότι κάποιος $Y_n$ έχει *μη κενό εσωτερικό*. Υπάρχουν δηλαδή $n \in \mathbb{N}$, $x \in Y_n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$\{z \in X : \|z - x\| < r\} \subseteq Y_n.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: έστω $w \in X$. Υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο $\|\lambda w\| < r$. Τότε, $x + \lambda w \in Y_n$ (γιατί;). Όμως $x \in Y_n$, και ο $Y_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$. Άρα,

$$w = \frac{1}{\lambda}\left((x + \lambda w) - x\right) \in Y_n.$$

Έπεται ότι $Y_n = X$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί ο $X$ είναι απειροδιάστατος. □

*Συνέπεια:* Αν $X$ είναι ένας γραμμικός χώρος που έχει άπειρη αριθμήσιμη διάσταση, τότε όποια νόρμα κι αν ορίσουμε στον $X$ αποκλείεται να πάρουμε χώρο Banach. Ένα τέτοιο παράδειγμα μας δίνει ο χώρος $P[a, b]$ των πολυωνύμων στο $[a, b]$ (εξηγήστε).

**Ορισμός** Έστω $X$ ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον $X$ λέγονται *ισοδύναμες* αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί $a, b$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $x \in X$

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

**Πρόταση 4.1.1** *Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον $X$. Αν $x_n, x \in X$, τότε*

$$\|x - x_n\| \to 0 \Leftrightarrow \|x - x_n\|' \to 0.$$

*(δηλαδή, $x_n \to x$ στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν $x_n \to x$ στον $(X, \|\cdot\|')$: οι δύο χώροι έχουν ακριβώς τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες.)*

**Απόδειξη:** Αν $\|x - x_n\|' \to 0$, τότε $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{a}\|x - x_n\|' \to 0$. Δηλαδή, $\|x - x_n\| \to 0$.

Όμοια, αν $\|x - x_n\| \to 0$, τότε $\|x - x_n\|' \leq b\|x - x_n\| \to 0$, δηλαδή $\|x - x_n\|' \to 0$. □

**Πρόταση 4.1.2** *Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον $X$. Αν $A \subseteq X$, τότε το $A$ είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν το $A$ είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|')$.*

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι το $A$ είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$. Έστω $x_n \in A$ με $x_n \to x$ ως προς την $\|\cdot\|'$. Από την Πρόταση 4.1.1, $x_n \to x$ ως προς την $\|\cdot\|$, και αφού το $A$ είναι κλειστό ως προς την $\|\cdot\|$, έπεται ότι $x \in A$. Άρα, το $A$ είναι κλειστό ως προς την $\|\cdot\|'$.

Η αντίστροφη συνεπαγωγή αποδεικνύεται εντελώς ανάλογα. □

Οι δύο αυτές Προτάσεις οδηγούν στο εξής:

**Θεώρημα 4.1.3** *Δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο $X$ ορίζουν την ίδια τοπολογία στον $X$.*

**Απόδειξη:** Ένα $A \subseteq X$ είναι ανοιχτό ως προς την $\|\cdot\|$ αν και μόνο αν είναι ανοιχτό ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). □

Αυτό που μπορεί να δείξει κανείς είναι ότι, σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης οποιεσδήποτε δύο νόρμες είναι ισοδύναμες:

**Θεώρημα 4.1.4** *Έστω $X$ γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι δύο νόρμες στον $X$, τότε υπάρχουν $a, b > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι $\dim X = n$, και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια βάση του $X$. Από το Λήμμα 4.1.1 (το εφαρμόζουμε για την $\|\cdot\|$ *και* για την $\|\cdot\|'$), υπάρχουν $c, c'$ τέτοια ώστε, για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$c \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|,$$

και

$$c' \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|'.$$

Έστω $x \in X$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, \|e_i\| \\
&\leq \left(\max_{i \leq n} \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\
&\leq \frac{\max \|e_i\|}{c'} c' \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\
&\leq \frac{\max \|e_i\|}{c'} \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|' \\
&= \frac{1}{a} \|x\|',
\end{aligned}$$

όπου $a = c' / \max \|e_i\|$. Όμοια,

$$\|x\|' = \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|' \leq \frac{\max \|e_i\|'}{c} \|x\| = b\|x\|.$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει με

$$a = \frac{c'}{\max \|e_i\|} \quad , \quad b = \frac{\max \|e_i\|'}{c}. \qquad \square$$

Το Θεώρημα 4.1.4 μας λέει λοιπόν ότι σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης, όλες οι νόρμες επάγουν *την ίδια τοπολογία*: ένα σύνολο είναι ανοιχτό ως προς όλες τις δυνατές νόρμες στον $X$ ή δεν είναι ανοιχτό για καμμία απ' αυτές.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα παράδειγμα νορμών που *δεν* είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $c_{00}$ των ακολουθιών $x = (\xi_k)$ που έχουν πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους. Δηλαδή,

$$x \in c_{00} \Longleftrightarrow \exists n_x \in \mathbb{N} : \forall k > n_x, \quad \xi_k = 0.$$

Ορίζουμε δύο νόρμες στον $c_{00}$:

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

Προφανώς, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in X, \qquad \|x\|_1 \leq b\|x\|_\infty.$$

Αν υπήρχε τέτοιος $b$, θέτοντας $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ θα είχαμε

$$n = \|x_n\|_1 \leq b\|x_n\|_\infty = b,$$

κι αυτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. Ο $X$ είναι βέβαια απειροδιάστατος.

## 4.2 Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Ο ορισμός της συμπάγειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός της *ακολουθιακής συμπάγειας*: Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Ένα μη κενό υποσύνολο $M$ του $X$ λέγεται *συμπαγές* αν για κάθε ακολουθία $(x_m)$ στο $M$ υπάρχουν $x \in M$ και υπακολουθία $(x_{k_m})$ της $(x_m)$ τέτοια ώστε $\|x - x_{k_m}\| \to 0$.

**Πρόταση 4.2.1** *Αν το $M$ είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο.*

**Απόδειξη:** (α) Το $M$ είναι κλειστό: έστω $x \in \overline{M}$. Υπάρχει $(x_m)$ στο $M$ με $x_m \to x$. Αφού το $M$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $y \in M$ και $x_{k_m} \to y$. Αφού όμως $x_m \to x$, θα πρέπει $x_{k_m} \to x$. Άρα, $x = y \in M$. Δηλαδή, $\overline{M} \subseteq M$.

(β) Θα δείξουμε ότι υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\| \leq A$ για κάθε $x \in M$. Αλλιώς υπάρχουν $x_m \in M$, $m \in \mathbb{N}$, με $\|x_m\| > m$. Από συμπάγεια, υπάρχουν $x \in M$ και $x_{k_m} \to x$. Τότε, $\|x_{k_m}\| \to \|x\|$. Όμως, από την επιλογή των $x_m$, $\|x_{k_m}\| \to \infty$. Άτοπο. □

Το αντίστροφο της Πρότασης 4.2.1 δεν είναι σωστό. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον $\ell_1$. Αν $n \neq m$, τότε $\|e_n - e_m\|_1 = 2$.

Το $M$ είναι κλειστό και φραγμένο (δείξτε το), αλλά δεν είναι συμπαγές. Η ακολουθία $(e_n)$ στο $M$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: αν είχε, οι όροι της θα έπρεπε να είναι τελικά ο ένας κοντά στον άλλον, ενώ οποιοιδήποτε δύο απ' αυτούς έχουν απόσταση ίση με 2.

**Θεώρημα 4.2.1** *Έστω $X$ χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, και έστω $\emptyset \neq M \subseteq X$. Τότε, το $M$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

**Απόδειξη:** ($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\dim X = n$, και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μιά βάση του $X$. Έστω $x_m = a_1^{(m)} e_1 + \cdots + a_n^{(m)} e_n$, ακολουθία στο $M$.

Το $M$ είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|a_1^{(m)} e_1 + \cdots + a_n^{(m)} e_n\| = \|x_m\| \leq A, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Από το Λήμμα, υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$c \sum_{i=1}^{n} |a_i^{(m)}| \leq \|x_m\| \leq A, \quad m \in \mathbb{N},$$

και, όπως ακριβώς στην απόδειξη του Λήμματος 4.1.1, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ και $a_i \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε

$$a_1^{(k_m)} \to a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n^{(k_m)} \to a_n.$$

Ορίζουμε $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Τότε,

$$\|x - x_{k_m}\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i^{(k_m)}) e_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i^{(k_m)}| \, \|e_i\| \to 0,$$

δηλαδή $x_{k_m} \to x$. Τέλος, $x \in M$ αφού $x_{k_m} \in M$ και το $M$ είναι κλειστό. Κάθε ακολουθία του $M$ έχει συγκλίνουσα (στο $M$) υπακολουθία, άρα το $M$ είναι συμπαγές. □

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, τα συμπαγή είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα σύνολα. Στους απειροδιάστατους χώρους αυτό παύει να ισχύει. Και μάλιστα, η μοναδιαία μπάλα $B_X$ ενός απειροδιάστατου χώρου $X$ δεν είναι *ποτέ* συμπαγής. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος βασίζεται σε ένα γεωμετρικό λήμμα:

**Λήμμα του F. Riesz** (1918) *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $Y, Z$ υπόχωροι του $X$. Υποθέτουμε ότι ο $Y$ είναι κλειστός, γνήσιος υπόχωρος του $Z$. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο ώστε $\|z\| = 1$ και*

$$d(z, Y) = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \geq \theta.$$

**Απόδειξη:** Ο $Y$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $Z$, άρα υπάρχει $v \in Z \setminus Y$. Ο $Y$ είναι κλειστός και $v \notin Y$, επομένως υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $D(v, r) \cap Y = \emptyset$. Δηλαδή, $\|v - y\| \geq r$ για κάθε $y \in Y$. Έπεται ότι

$$d(v, Y) = \inf\{\|v - y\| : y \in Y\} = a > 0.$$

Αφού $\theta \in (0,1)$, έχουμε $a/\theta > a$. Άρα, υπάρχει $y_0 \in Y$ τέτοιο ώστε

$$\|v - y_0\| < \frac{a}{\theta}.$$

Ορίζουμε $z = \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|}$ (προφανώς $y_0 \neq v$, άρα $\|v - y_0\| \neq 0$.) Τότε, $\|z\| = 1$, και $z \in Z$ γιατί $v, y_0 \in Z$ και ο $Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$.

Θα δείξουμε ότι $\|z - y\| \geq \theta$ για κάθε $y \in Y$. Πράγματι, αν $y \in Y$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|z - y\| &= \left\| \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} - y \right\| = \left\| \frac{v - (y_0 + \|v - y_0\| y)}{\|v - y_0\|} \right\| \\
&= \frac{\|v - (y_0 + \|v - y_0\| y)\|}{\|v - y_0\|} \geq \frac{\|v - (y_0 + \|v - y_0\| y)\|}{a/\theta} \\
&\geq \frac{a}{a/\theta} = \theta,
\end{aligned}$$

γιατί $y_0 + \|v - y_0\| y \in Y$ (ο $Y$ είναι υπόχωρος). $\square$

**Θεώρημα 4.2.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Ο $X$ έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η $B_X$ είναι συμπαγής.*

**Απόδειξη:** Αν ο $X$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε η $B_X$ είναι συμπαγής: έχουμε δεί ότι η $B_X$ είναι πάντα κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 4.2.1.

Μένει να δείξουμε ότι αν ο $X$ είναι απειροδιάστατος, τότε η $B_X$ δεν είναι συμπαγής. Θα το δείξουμε κατασκευάζοντας μιά ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ με $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, που ικανοποιεί την

$$n \neq m \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

(τότε, η $(x_n)$ περιέχεται στην $B_X$ και είναι φανερό ότι δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.)

1. Σαν $x_1$ επιλέγουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $X$ με $\|x_1\| = 1$.

2. *Επιλογή του $x_2$:* Ο $Y_1 = \langle x_1 \rangle$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι κλειστός υπόχωρος του $X$. Αφού ο $X$ είναι απειροδιάστατος, ο $Y_1$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $X$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Riesz με $Y = Y_1$, $Z = X$ και $\theta = \frac{1}{2}$: υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$ και $d(x_2, Y_1) \geq 1/2$. Ειδικότερα, αφού $x_1 \in Y_1$, βλέπουμε ότι $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

3. *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $x_1, \ldots, x_k$ έτσι ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ αν $n \neq m$, $n, m \in \{1, \ldots k\}$. Ορίζουμε $Y_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Όπως πριν, ο $Y_k$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι κλειστός και γνήσιος υπόχωρος του $X$. Από το Λήμμα του Riesz με $Y = Y_k$, $Z = X$ και $\theta = \frac{1}{2}$, υπάρχει $x_{k+1} \in X$ με $\|x_{k+1}\| = 1$ και $d(x_{k+1}, Y_k) \geq 1/2$. Αφού $x_1, \ldots, x_k \in Y_k$, έπεται ότι

$$\|x_{k+1} - x_j\| \geq \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Μαζί με την επαγωγική υπόθεση, αυτό σημαίνει ότι

$$\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = \|x_{k+1}\| = 1,$$

και, αν $n \neq m$ στο $\{1, \ldots, k+1\}$, τότε

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία $(x_n)$ με τις ιδιότητες που θέλουμε. □

Ας θυμηθούμε τώρα μερικές εφαρμογές της συμπάγειας στις συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων:

(α) *Αν $T : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής συνάρτηση, και $M \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(M)$ είναι συμπαγές.*

**Απόδειξη:** Έστω $(y_k)$ ακολουθία στο $T(M)$. Για κάθε $k$ υπάρχει $x_k \in M$ τέτοιο ώστε $T(x_k) = y_k$. Το $M$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $(x_{k_n})$ και $x \in M$ με $x_{k_n} \to x$. Η $T$ είναι συνεχής, άρα $T(x_{k_n}) \to T(x)$. Όμως, $T(x_{k_n}) = y_{k_n}$. Άρα,

$$y_{k_n} \to T(x) \in T(M). \quad \Box$$

(β) *Αν $T : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχής και $M \subseteq X$ συμπαγές, τότε η $T$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $M$.*

**Απόδειξη:** Το $T(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο. Αφού είναι φραγμένο έχει sup και inf, και αφού είναι κλειστό, το sup είναι max και το inf είναι min. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $a \leq T(x) \leq b$ για κάθε $x \in M$, και τα $a, b$ είναι τιμές της $T$ στο $M$: Υπάρχουν $x_1, x_2 \in M$ τέτοια ώστε

$$T(x_1) = a \leq T(x) \leq b = T(x_2)$$

για κάθε $x \in M$. □

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.2, πρέπει κανείς να είναι πολύ προσεκτικός με αντίστοιχες προτάσεις για κλειστά και φραγμένα υποσύνολα απειροδιάστατων χώρων: τα κλειστά και φραγμένα δεν είναι πάντα συμπαγή, και η συμπάγεια ήταν πολύ ουσιαστική για την απόδειξη των (α) και (β).

## 4.3 Ασκήσεις

**1.** Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στο γραμμικό χώρο $X$. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$. Δηλαδή, η $f$ είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και η $f^{-1}$ είναι συνεχής.

**2.** (α) Δείξτε ότι για κάθε $1 \leq p < q < +\infty$, ο $\ell_p$ περιέχεται γνήσια στον $\ell_q$, και ο $\ell_q$ περιέχεται γνήσια στον $c_0$.

(β) Εξετάστε αν οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον $\ell_p$ $(p < q)$.

(γ) Εξετάστε αν ισχύει $c_0 = \bigcup_{1\leq p<+\infty} \ell_p$.

**3.** Δείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο $Y$ είναι υπόχωρος του $X$ που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $d(x, Y) = 1$.

*Υπόδειξη:* Πάρτε $v \in X\setminus Y$. Ο $Y$ είναι κλειστός, άρα $d(v, Y) = a > 0$. Βρείτε $y_n \in Y$ τέτοια ώστε $a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$. Η $(y_n)$ περιέχεται σε κατάλληλη κλειστή μπάλα του $Y$, η οποία είναι *συμπαγής*.

**4.** Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος $(X, d)$ που έχει άπειρα σημεία και μετρική την διακριτή μετρική, δεν είναι συμπαγής.

**5.** Αν ο $X$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το $M$ κλειστό υποσύνολο του $X$, τότε το $M$ είναι συμπαγές.

**6.** Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.
*Υπόδειξη:* Θυμηθείτε τον ισοδύναμο ορισμό της συμπάγειας από την «Ανάλυση ΙΙ».

**7.** Έστω $X, Y$ μετρικοί χώροι, ο $X$ συμπαγής, και $T : X \to Y$ συνεχής, ένα προς ένα και επί. Δείξτε ότι η $T^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής.

**8.** Στον χώρο $C[0, 1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f - g\| = d(f, K)\}.$$

(α) $K$ είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων, $f$ τυχούσα στον $C[0, 1]$.
(β) $K = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$, $f$ σταθερή.
(γ) $K = \{g \in C[0, 1] : g \geq 0, \int_0^1 g(t)dt \geq g(0) + 1\}$, $f \equiv 0$.

## Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** Οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$ με $f(\vec{0}) = \vec{0}$ και

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x, \quad x \neq \vec{0}.$$

(α) Η $f$ είναι καλά ορισμένη: αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$, $x \neq \vec{0}$, τότε $\|x\| \leq 1$ άρα

$$\|f(x)\|' = \frac{\|x\|}{\|x\|'}\|x\|' = \|x\| \leq 1,$$

δηλαδή $f(x) \in B_{(X,\|\cdot\|')}$. Αν $x = \vec{0}$, τότε $f(x) = \vec{0} \in B_{(X,\|\cdot\|')}$.

(β) Δείχνουμε πρώτα τη συνέχεια της $f$: αν $x_n \to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|$ και $x_0 \neq \vec{0}$, τότε από την ισοδυναμία των νορμών παίρνουμε $\|x_n\| \to \|x_0\|$, $x_n \to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;) και $\|x_n\|' \to \|x_0\|' > 0$, οπότε από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού ως προς την $\|\cdot\|'$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(x_n) = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'}x_n \to \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|'}x_0 = f(x_0)$$

ως προς την $\|\cdot\|'$.

Αν $\|x_n\| \to 0$ τότε $\|x_n\|' \to 0$ από την ισοδυναμία των νορμών, και $\|x_n\|/\|x_n\|' \leq 1/a$ αν $x_n \neq \vec{0}$ ή $f(x_n) = \vec{0}$ αν $x_n = \vec{0}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\|f(x_n)\|' \leq \frac{1}{a}\|x_n\|' \leq \frac{b}{a}\|x_n\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to \vec{0} = f(\vec{0})$. Έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής.

(γ) Η $f$ είναι επί: αν $y \neq \vec{0}$ και $\|y\|' \leq 1$, τότε το $x = (\|y\|'/\|y\|)y$ έχει νόρμα $\|x\| = \|y\|' \leq 1$ και (ελέγξτε το)

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = y.$$

(δ) Η $f$ είναι ένα προς ένα: αν $f(x) = f(x_1)$ και $x \neq \vec{0}$, τότε $x_1 \neq \vec{0}$ (γιατί;) και

$$(*) \qquad \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|'}x_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα $x, x_1$ είναι συγγραμμικά και μάλιστα $x = tx_1$, $t > 0$. Άρα, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{t\|x\|}{t\|x\|'}tx \Longrightarrow x = tx \Longrightarrow t = 1,$$

οπότε $x_1 = x$. Αν πάλι $x = \vec{0}$ και $f(x_1) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, είναι φανερό ότι $x_1 = \vec{0} = x$.

(ε) Η $f^{-1} : B_{(X,\|\cdot\|')} \to B_{(X,\|\cdot\|)}$ ορίζεται από την

$$f^{-1}(y) = \frac{\|y\|'}{\|y\|}y.$$

Όπως στο (β) δείχνουμε ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής. Άρα, η $f$ είναι ομοιομορφισμός.

**2.** (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, άρα $|\xi_k| \to 0$. Για μεγάλα $k$ έχουμε $0 \leq |\xi_k| < 1$ και αφού $p < q$ βλέπουμε ότι $0 \leq |\xi_k|^q \leq |\xi_k|^p$. Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^q < +\infty$, δηλαδή $x \in \ell_q$. Άρα, $\ell_p \subseteq \ell_q$.

Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Το $x = (1/k^{1/p}) \in \ell_q \backslash \ell_p$ (γιατί;).

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ ($n$ μονάδες και μετά μηδενικά). Τότε,

$$\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_q} = \frac{n^{1/p}}{n^{1/q}} = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$. Δηλαδή, δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_p \leq b\|x\|_q$ για κάθε $x \in \ell_p$. Άρα, οι δύο νόρμες δεν είναι ισοδύναμες.

(γ) Παίρνουμε $\xi_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, όμως το κριτήριο συμπύκνωσης δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$$

για κάθε $p \geq 1$. Άρα $x = (\frac{1}{\ln(k+1)})_{k \in \mathbb{N}} \in c_0 \setminus \cup_{p \geq 1} \ell_p$.

**3.** Έστω $v \in X \backslash Y$. Αφού ο $Y$ έχει πεπερασμένη διάσταση, είναι κλειστός υπόχωρος του $X$, και αφού $v \notin Y$ έχουμε $d(v, Y) = a > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_n \in Y$ με την ιδιότητα

$$a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$$

(θυμηθείτε τον ορισμό της $d(v, Y)$). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|y_n - y_1\| \leq \|y_n - v\| + \|v - y\| < 2a + 1 + \frac{1}{n} \leq 2a + 2.$$

Δηλαδή, η ακολουθία $(y_n)$ περιέχεται στην $B(y_1, 2a+2)$ που είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο $Y$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(y_{k_n})$ της $(y_n)$ με $y_{k_n} \to y \in Y$.

Τότε, $\|v - y\| = \lim \|v - y_n\| = a$. Δηλαδή, υπάρχει πλησιέστερο προς το $v$ σημείο του $Y$. Συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Riesz. Ορίζουμε $x = \frac{1}{a}(v - y)$. Τότε $\|x\| = 1$ και για κάθε $z \in Y$

$$\|x - z\| = \|\frac{v - y}{a} - z\| = \|\frac{v - (y + az)}{a}\| = \frac{\|v - (y + az)\|}{a} \geq \frac{d(v, Y)}{a} = 1,$$

γιατί $y + az \in Y$ (ο $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$). Δείξαμε ότι $d(x, Y) \geq 1$ και αφού $d(x, Y) \leq \|x - \vec{0}\| = \|x\| = 1$, έχουμε $d(x, Y) = 1$.

**4.** Υπάρχει ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ με $x_i \neq x_j$ αν $i \neq j$ (ο μετρικός μας χώρος έχει άπειρα σημεία). Η $(x_n)$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: αν $(x_{k_n})$ είναι οποιαδήποτε υπακολουθία της $(x_n)$, τότε για κάθε $n \neq m$ έχουμε $d(x_{k_n}, x_{k_m}) = 1$ (γιατί;), οπότε η $(x_{k_n})$ δεν είναι Cauchy (άρα, δεν συγκλίνει). Βρήκαμε ακολουθία στον $X$ που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα, ο $X$ δεν είναι συμπαγής.

**5.** Έστω $(x_n)$ ακολουθία στο $M$. Αφού $x_n \in X$ και ο $X$ είναι συμπαγής, υπάρχουν υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ και $x \in X$ τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Όμως $x_{k_n} \in M$ και το $M$ είναι κλειστό, άρα $x \in M$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $M$ είναι συμπαγές (γιατί;).

**6.** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε

$$X = \bigcup_{x \in X} D(x, 1/n).$$

Αφού ο $X$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_{n1}, \ldots, x_{nk(n)} \in X$ τέτοια ώστε

$$X = D(x_{n1}, 1/n) \cup \ldots \cup D(x_{nk(n)}, 1/n).$$

Ορίζουμε $M = \{x_{nj} : n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, k(n)\}$. Το $M$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον $X$.

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n < \varepsilon$ και υπάρχει $j \leq k(n)$ τέτοιο ώστε $x \in D(x_{nj}, 1/n)$. Τότε, $x_{nj} \in M$ και $d(x, x_{nj}) < 1/n < \varepsilon$, δηλαδή $D(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. Άρα το $M$ είναι πυκνό και, αφού το $M$ είναι αριθμήσιμο, ο $X$ είναι διαχωρίσιμος.

**7.** Έστω ότι η $T^{-1} : Y \to X$ δεν είναι συνεχής σε κάποιο $y_0$. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $y_n \to y_0$ τέτοια ώστε $d(T^{-1}y_n, T^{-1}y_0) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τα $x_n = T^{-1}y_n$ και $x_0 = T^{-1}y_0 \in X$.

Ο $X$ είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ με $x_{k_n} \to w \in X$. Από τη συνέχεια της $T$ παίρνουμε $y_{k_n} = Tx_{k_n} \to Tw$. Αφού $y_n \to y_0$, έχουμε $y_{k_n} \to y_0$, άρα $y_0 = Tw$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} = T^{-1}y_{k_n} \to w = T^{-1}y_0.$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί $d(T^{-1}y_{k_n}, T^{-1}y_0) \geq \varepsilon$ για κάθε $n$. Το άτοπο δείχνει ότι η $T^{-1}$ είναι συνεχής.

**8.** (α) Έστω $f \in C[0,1]$ και $M = \max\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, $m = \min\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Αν $g \in K$, τότε $g(x) = c \in \mathbb{R}$ στο $[0,1]$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

1. $c \leq m \Longrightarrow \|f - g\| = M - c \geq M - m$.

2. $c \geq M \Longrightarrow \|f - g\| = c - m \geq M - m$.

3. $m \leq c \leq M \Longrightarrow \|f - g\| = \max\{M - c, c - m\} \geq \frac{M-m}{2}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $d(f, K) = \frac{M+m}{2} = d(f, g_0)$ όπου $g_0(x) = \frac{M+m}{2}$ στο $[0,1]$.

(β) Έστω $f(x) = c$, $x \in [0,1]$. Τότε, για κάθε $g(x) = ax$ στο $K$ έχουμε $\|f - g\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |c - ax|$.

1. Αν $c \geq 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $0 \leq a \leq 2c$ ικανοποιούν την $\|f - g\| = c = d(f, K)$.

2. Αν $c < 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $2c \leq a \leq 0$ ικανοποιούν την $\|f - g\| = |c| = d(f, K)$.

(γ) Αν $g \in K$, τότε $\|g - f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} g(x)$. Όμως,

$$(*) \qquad 1 \leq g(0) + 1 \leq \int_0^1 g(t)dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} g(x).$$

Άρα $\|g - f\| \geq 1$, και αφού η $g \in K$ ήταν τυχούσα, $d(f, K) \geq 1$. Έστω ότι υπάρχει $g \in K$ για την οποία $\|g - f\| = 1$. Τότε έχουμε ισότητα στην $(*)$, άρα $0 \leq g \leq 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = g(0) + 1 = 1$, οπότε η $g$ είναι συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$, $0 \leq g \leq 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = 1$, το οποίο είναι άτοπο (γιατί;).

Από την άλλη πλευρά, $d(f,K) = 1$. Πράγματι, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon$ με $g_\varepsilon(0) = 0$, $g \equiv 1+\delta$ στο $[\varepsilon, 1]$ και $g_\varepsilon$ γραμμική στο $[0,\varepsilon]$. Αν $\delta = \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}$, τότε $\int_0^1 g_\varepsilon(t)dt = 1$. Άρα, $g_\varepsilon \in K$ και

$$\|g - f\| = 1 + \delta = 1 + \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}.$$

Έπεται ότι

$$d(f,K) \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(1 + \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}\right) = 1.$$

Άρα $d(f,K) = 1$, αλλά δεν υπάρχει $g \in K$ με την ιδιότητα $\|f-g\| = d(f,K)$.

# Κεφάλαιο 5

# Τελεστές και συναρτησοειδή

## 5.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Έστω $X$ και $Y$ δύο χώροι με νόρμα. *Γραμμικός τελεστής* από τον $X$ στον $Y$ είναι μια απεικόνιση $T : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για συντομία θα γράφουμε $Tx_1, Tx_2$ κλπ, αντί για $T(x_1), T(x_2)$.

Ο *πυρήνας* του $T$ είναι το σύνολο $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, και η *εικόνα* του $T$ είναι το σύνολο $\mathcal{R}(T) = \{y \in Y | \exists x \in X : Tx = y\} = \{Tx : x \in X\}$. Ο πυρήνας και η εικόνα ενός γραμμικού τελεστή $T : X \to Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι των $X$ και $Y$ αντίστοιχα.

Οι $X$ και $Y$ έχουν τοπολογία που επάγεται από τις νόρμες τους, μας ενδιαφέρει λοιπόν να δούμε πότε ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι *συνεχής*. Ξεκινάμε με τον ορισμό του *φραγμένου* τελεστή:

**Ορισμοί** (α) Έστω $X$ και $Y$ χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$ (χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, στο εξής θα γράφουμε απλώς $\|\cdot\|$ και για τις δύο νόρμες.)

(β) Αν ο $T$ είναι φραγμένος, ορίζουμε τη *νόρμα* $\|T\|$ του $T$ σαν τη μικρότερη σταθερά $c$ για την οποία η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in X$.

• Αυτό το min υπάρχει: θεωρούμε το σύνολο

$$C_T = \{c \geq 0 : \forall x \in X,\ \|Tx\| \leq c\|x\|\}.$$

Αν ο $T$ είναι φραγμένος, αυτό το σύνολο είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0. Άρα, ορίζεται το $\inf C_T$ και ισχύει $\inf C_T \in C_T$ γιατί το $C_T$ είναι κλειστό (άσκηση). Άρα, η

$$\|T\| = \min\{c \geq 0 : \forall x \in X, \quad \|Tx\| \leq c\|x\|\}$$

ορίζεται καλά, και ικανοποιεί την

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|, \quad x \in X.$$

Ένας άλλος, εξίσου χρήσιμος, τρόπος ορισμού της νόρμας του $T$ δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 5.1.1** *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

**Απόδειξη:** Αν $x \neq 0$, τότε το $y = x/\|x\|$ έχει νόρμα $\|y\| = 1$. Άρα,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|Ty\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, και αφού $\{x : \|x\| = 1\} \subseteq B_X$,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{x \in B_X} \|Tx\|. \tag{1}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x \in B_X \setminus \{0\}$, τότε

$$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

άρα

$$\sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι τα τρία sup της Πρότασης είναι ίσα.

Από τον ορισμό της νόρμας έχουμε $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \leq \|T\|$ για κάθε $x \in B_X$, επομένως

$$\sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leq \|T\|. \tag{3}$$

Τέλος, αφού η $\|T\|$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία $\|Tx\| \leq c\|x\|$ για κάθε $x \in X$, και αφού

$$\|Tw\| \leq \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right) \|w\|$$

για κάθε $w \in X$, έχουμε

$$\|T\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4}$$

Η πρώτη ισότητα της Πρότασης έπεται τώρα από τις (3) και (4). □

Η επόμενη Πρόταση δικαιολογεί τον όρο «νόρμα τελεστή»:

**Πρόταση 5.1.2** *Έστω $B(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Το $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \to \|T\|$ είναι νόρμα.*

**Απόδειξη:** Αν $T, S : X \to Y$ φραγμένοι τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε
(α) $\|(\lambda T)x\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda|\,\|Tx\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$, δηλαδή ο $\lambda T$ είναι φραγμένος και $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$. Επιπλέον,

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\,\|Tx\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\,\|T\|.$$

Άρα, ικανοποιείται το (N3).
(β) $\|(T+S)x\| = \|Tx+Sx\| \leq \|Tx\|+\|Sx\| \leq \|T\|\,\|x\|+\|S\|\,\|x\|= (\|T\|+\|S\|)\,\|x\|$, δηλαδή ο $T+S$ είναι φραγμένος, και

$$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Έπεται το (N4), και το ότι ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος (σε συνδυασμό με το προηγούμενο).
Τέλος $\|T\| \geq 0$ (προφανές), και αν $\|T\| = 0$, τότε $0 \leq \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $\|Tx\| = 0 \Longrightarrow Tx = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα, $\|T\| = 0 \Longrightarrow T \equiv 0$. □

**Παραδείγματα** (α) Η *ταυτοτική απεικόνιση* $I : X \to X$ είναι φραγμένος τελεστής, και

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

(β) Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $P[0,1]$ των πολυωνύμων $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, και ορίζουμε $T : P[0,1] \to P[0,1]$ με $Tp = p'$ (η παράγωγος πολυωνύμου είναι πολυώνυμο, άρα ο $T$ ορίζεται καλά.)

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $T$ είναι γραμμικός τελεστής:

$$T(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda Tp + \mu Tq.$$

Όμως ο $T$ δεν είναι φραγμένος: έστω $p_n(t) = t^n$. Στον $P[0,1]$ θεωρούμε ως συνήθως την $\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$, άρα $\|p_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αλλά $p_n'(t) = nt^{n-1}$, άρα $\|p_n'\| = n$. Έπεται ότι

$$\sup_{\|p\|=1} \|Tp\| \geq \|Tp_n\| = \|p_n'\| = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα ο $T$ δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

(γ) *Ολοκληρωτικοί τελεστές.* Θεωρούμε τον $C[0,1]$ με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

και μια συνεχή συνάρτηση

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε $T : C[0,1] \to C[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds.$$

Η $K$ λέγεται *πυρήνας* του $T$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο $T$ είναι καλά ορισμένος, δηλαδή ότι η $Tf$ είναι συνεχής: έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Tf)(t')| &= \left|\int_0^1 \{K(t,s) - K(t',s)\}f(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(t,s) - K(t',s)|\,|f(s)|ds \\ &\leq \|f\| \int_0^1 |K(t,s) - K(t',s)|ds. \end{aligned}$$

Όμως, η $K$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1] \times [0,1]$, άρα αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow \forall s,\ |K(t,s) - K(t',s)| < \varepsilon.$$

Άρα,

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow |(Tf)(t) - (Tf)(t')| \leq \|f\|\varepsilon,$$

κι αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της $Tf$. Η γραμμικότητα του $T$ ελέγχεται εύκολα. Για να δείξουμε ότι ο $T$ είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι λόγω συνέχειας του πυρήνα $K$ υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $|K(t,s)| \leq M$ για κάθε $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$, οπότε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)ds\right| \leq \int_0^1 |K(t,s)||f(s)|ds \\ &\leq M\|f\| \int_0^1 ds = M\|f\| \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leq M\|f\|$.

Η Πρόταση που ακολουθεί περιγράφει τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές που ορίζονται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης:

**Θεώρημα 5.1.1** *Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, $\dim X = n < \infty$, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T$ είναι φραγμένος.*

**Απόδειξη:** Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση του $X$. Από το βασικό Λήμμα του Κεφαλαίου 4, αν $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in X$, τότε

$$c\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\| = \|x\|,$$

όπου $c > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη νόρμα και τη βάση του $X$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \Big\|T(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_iTe_i\Big\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\; \|Te_i\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|Te_i\|\right) \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\ &\leq \frac{\max \|Te_i\|}{c} \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα ο $T$ είναι φραγμένος, με $\|T\| \leq (\max_i \|Te_i\|)/c$. □

Φυσιολογικά, ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ θα λέγεται *συνεχής* αν για κάθε $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, αν: $x_n \to x$ στον $X \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ στον $Y$. Θα δείξουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

**Θεώρημα 5.1.2** *Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.*
(α) *Ο $T$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.*
(β) *Αν ο $T$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$, τότε είναι παντού συνεχής.*

**Απόδειξη:** (α) Έστω ότι ο $T$ είναι συνεχής. Τότε, είναι συνεχής στο $0$. Παίρνοντας $\varepsilon = 1 > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1.$$

Όμως τότε, για κάθε $y \neq 0$ θεωρούμε το $\delta y/2\|y\|$ (που έχει νόρμα μικρότερη από $\delta$), και γράφουμε

$$\left\|T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| < 1 \Longrightarrow \|Ty\| < \frac{2}{\delta}\|y\|.$$

Έπεται ότι ο $T$ είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \frac{2}{\delta}$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι ο $T$ είναι φραγμένος, και θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$. Αν $x_n \to x_0$, τότε

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\; \|x_n - x_0\| \to 0,$$

άρα $Tx_n \to Tx_0$. Δηλαδή, ο $T$ είναι συνεχής.

(β) Υποθέτουμε ότι ο $T$ είναι συνεχής στο $x_0$. Έστω $y_0 \in X$ και $y_n \to y_0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $Ty_n \to Ty_0$. Όμως, $y_n - y_0 + x_0 \to x_0$ (γιατί;), άρα

$$T(y_n - y_0 + x_0) = Ty_n - Ty_0 + Tx_0 \to Tx_0,$$

απ' όπου έπεται η $Ty_n \to Ty_0$. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικές απλές παρατηρήσεις πάνω στους φραγμένους τελεστές:

1. Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, τότε ο $\mathrm{Ker}T$ είναι *κλειστός* υπόχωρος του $X$.
2. Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, και $X'$ είναι ένας υπόχωρος του $X$, τότε ο περιορισμός του $T$ στον $X'$ είναι φραγμένος τελεστής.
3. Έστω $Y$ χώρος Banach, και $T_0 : X_0 \to Y$ φραγμένος τελεστής που ορίζεται σ' έναν πυκνό υπόχωρο $X_0$ του $X$. Τότε, ο $T_0$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε φραγμένο τελεστή $T : X \to Y$ με $\|T\| = \|T_0\|$.

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

## 5.2 Γραμμικά συναρτησοειδή

Έστω $X$ γραμμικός χώρος. *Συναρτησοειδές* είναι ένας γραμμικός τελεστής $F : X \to \mathbb{R}$. Αν ο $X$ είναι χώρος με νόρμα, τότε το συναρτησοειδές $F$ λέγεται *φραγμένο* αν είναι φραγμένος τελεστής από τον $(X, \|\cdot\|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Επομένως, ό,τι αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο μεταφέρεται αυτούσιο εδώ:

**Θεώρημα 5.2.1** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $F : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Το $F$ είναι φραγμένο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$,*

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

*Η νόρμα του $F$ είναι η μικρότερη τέτοια σταθερά, και ισούται με*

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|. \quad \square$$

**Παραδείγματα** (α) Η νόρμα του χώρου $X \neq \{0\}$, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *δεν* είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Αν ήταν, θα είχαμε $\|x\| + \|-x\| = \|x + (-x)\|$, δηλαδή $2\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) Θεωρούμε τον $X = \mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X \setminus \{0\}$. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$, με

$$F(x) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n.$$

Η $F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές (το «εσωτερικό γινόμενο» με το $a$). Αν στον $\mathbb{R}^n$ θεωρήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{1/2} \\ &= \|a\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το $F$ είναι φραγμένο συναρτησοειδές, και $\|F\| \leq \|a\|$. Επιπλέον,

$$|F(a)| = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \|a\|^2,$$

άρα

$$\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|F(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Δηλαδή, $\|F\| = \|a\|$.

(γ) Ορίζουμε $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = \int_a^b g(t)dt$. Το $F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $C[a,b]$, και

$$|F(g)| \leq \int_a^b |g(t)|dt \leq \left(\max_{t\in[a,b]} |g(t)|\right)(b-a) = (b-a)\|g\|.$$

Άρα, το $F$ είναι φραγμένο και $\|F\| \leq b-a$. Αν πάρουμε σαν $g_0$ τη σταθερή συνάρτηση $g_0(t) = 1$, τότε $\|g_0\| = 1$ και

$$\|F\| = \sup_{\|g\|=1} |F(g)| \geq |F(g_0)| = b-a.$$

Άρα, $\|F\| = b-a$.

(δ) Θεωρούμε πάλι τον $X = C[a,b]$ με νόρμα την $\|g\| = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$, σταθεροποιούμε κάποιο $t_0 \in [a,b]$, και ορίζουμε $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = g(t_0)$.

Η $F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και $|F(g)| = |g(t_0)| \leq \|g\|$. Άρα, $\|F\| \leq 1$. Παίρνοντας $g_0 \equiv 1$, ελέγχουμε ότι $\|F\| = 1$.

**Ορισμός** Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Ο *δυϊκός χώρος* του $X$ είναι ο γραμμικός χώρος $X^*$ των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$X^* = B(X, \mathbb{R}).$$

Ο $X^*$ είναι μη κενός: η $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τα παραδείγματα που προηγήθηκαν δείχνουν ότι αν π.χ. $X = \mathbb{R}^n$ ή $C[a,b]$, τότε ο $X^*$ είναι πολύ «πλουσιότερος» από το $\{0\}$. Στην πραγματικότητα, για κάθε χώρο $X$ με νόρμα, ο $X^*$ περιέχει πολλά μη τετριμμένα φραγμένα συναρτησοειδή. Αυτό όμως απαιτεί αρκετή δουλειά (Θεώρημα Hahn-Banach).

**Ορισμός** Έστω $X$ γραμμικός χώρος, και $W$ γραμμικός υπόχωρος του $X$. Ορίζουμε το *χώρο πηλίκο* $X/W$ σα γραμμικό χώρο ως εξής: ορίζουμε πρώτα μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $X$, θέτοντας

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in W.$$

Τότε, ο $X/W$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $[x] = x + W$ με πράξεις τις $\lambda[x] = [\lambda x]$ και $[x] + [y] = [x + y]$. Παρατηρήστε ότι $[x] = 0$ αν και μόνο αν $x \in W$.

Λέμε ότι ο $W$ έχει *συνδιάσταση* 1 στον $X$ αν για το χώρο πηλίκο $X/W$ έχουμε $\dim(X/W) = 1$. Αν ο $W$ έχει συνδιάσταση 1 και $x_0 \in X$, τότε το $x_0 + W$ λέγεται *υπερεπίπεδο.*

Η Πρόταση που ακολουθεί, δίνει τη σχέση ανάμεσα σε υποχώρους συνδιάστασης 1 και γραμμικά συναρτησοειδή:

**Πρόταση 5.2.1** *Έστω $X$ γραμμικός χώρος, και $W$ γραμμικός υπόχωρος του $X$. Ο $W$ έχει συνδιάσταση 1 αν και μόνο αν υπάρχει μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{Ker}f = W$. Δύο γραμμικά συναρτησοειδή $f, g$ έχουν τον ίδιο πυρήνα αν και μόνο αν υπάρχει $\beta \neq 0$ τέτοιο ώστε $g = \beta f$.*

**Απόδειξη:** Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας $W = \mathrm{Ker}f$ του $f$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$, και η $\tilde{f} : X/W \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x + W) = f(x)$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (γιατί;). Άρα, $\dim(X/W) = 1$.

Αντίστροφα, αν ο $W$ έχει συνδιάσταση 1 στον $X$, τότε υπάρχει ισομορφισμός $T : X/W \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = T(x + W)$. Το $f$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, $f \neq 0$, και $\mathrm{Ker}f = W$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, αν $g = \beta f$, $\beta \neq 0$, τότε προφανώς $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αντίστροφα, έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή με $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αν $f \equiv 0$, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω λοιπόν $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$ (υπάρχει, γιατί;). Έπεται ότι $g(x_0) \neq 0$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x - f(x)x_0 \in \mathrm{Ker}f \Longrightarrow g(x - f(x)x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = g(x_0)f(x).$$

Δηλαδή, $g = \beta f$, με $\beta = g(x_0)$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $X$.

**Πρόταση 5.2.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και έστω $W$ υπόχωρος του $X$ συνδιάστασης 1. Τότε, ένα από τα δύο συμβαίνει: Είτε ο $W$ είναι κλειστός στον $X$ ή ο $W$ είναι πυκνός στον $X$.*

**Απόδειξη:** Ο $\overline{W}$ είναι κι αυτός γραμμικός υπόχωρος του $X$. Αν ο $W$ δεν είναι κλειστός, τότε υπάρχει $x \in \overline{W} \setminus W$, και αφού ο $W$ έχει συνδιάσταση 1 έχουμε $[z] \in \mathrm{span}([x])$ (δηλαδή $z = \lambda x + w$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w \in W$) για κάθε $z \in X$ (γιατί;), άρα $\overline{W} = X$. □

*Παρατήρηση:* Οι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών: αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε από τη συνέχεια του $f$ είναι φανερό ότι ο

$W = \text{Ker} f = f^{-1}\{0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X$, και από την Πρόταση 5.2.1 ο $W$ έχει συνδιάσταση 1. Θα αποδείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό σαν συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach.

## 5.3 Χώροι τελεστών - δυϊκοί χώροι

Έστω $X, Y$ δύο χώροι με νόρμα. Στην Παράγραφο 5.1 είδαμε ότι ο χώρος $B(X, Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα, όπου

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \quad T \in B(X, Y).$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί απαντά στο ερώτημα: πότε ο $B(X, Y)$ είναι πλήρης;

**Θεώρημα 5.3.1** *Έστω $X$ και $Y$ χώροι με νόρμα. Αν ο $Y$ είναι χώρος Banach, τότε ο $B(X, Y)$ είναι χώρος Banach.*

**Απόδειξη:** Έστω $(T_n)$ ακολουθία Cauchy στον $B(X, Y)$, και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $x \in X$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $Y$ (γιατί;), και αφού ο $Y$ είναι πλήρης, υπάρχει $y_x \in Y$ τέτοιο ώστε $T_m x \to y_x$ καθώς $m \to \infty$.
Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx = y_x = \lim_{m\to\infty} T_m x.$$

Ο $T$ είναι γραμμικός τελεστής: αν $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \lim_{m\to\infty} T_m(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lim_{m\to\infty} (\lambda T_m x_1 + \mu T_m x_2) \\ &= \lambda \lim_{m\to\infty} T_m x_1 + \mu \lim_{m\to\infty} T_m x_2 \\ &= \lambda T x_1 + \mu T x_2. \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην $(*)$. Έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| = \varepsilon,$$

και αφήνοντας το $m$ να πάει στο άπειρο, παίρνουμε

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon, \quad \|x\| = 1,$$

δηλαδή,

$$(**) \qquad \|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει δύο πράγματα: (α) για κάθε $n \geq n_0$, $T_n - T \in B(X,Y)$, και αφού ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος και $T_n \in B(X,Y)$,

$$T = T_n - (T_n - T) \in B(X,Y).$$

(β) Από την $(**)$, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. Άρα, $T_n \to T$ στον $B(X,Y)$. □

**Πόρισμα 5.3.1** *Αν ο $X$ είναι χώρος με νόρμα, τότε ο $X^*$ με νόρμα την $\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|$ είναι χώρος Banach.*

**Απόδειξη:** Ο $X^*$ είναι ο $B(X,\mathbb{R})$. Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης ως προς την $|\cdot|$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα 5.3.1. □

**Ορισμός** (α) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές.

(β) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$.

*Παρατηρήσεις* (i) Ο $T$ είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}T = \{0\}$.

(ii) Αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in X$, τότε ο $T$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Δύο χώροι $X$ και $Y$ με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισομορφικοί* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο τέτοιοι χώροι *ταυτίζονται*: έχουν την ίδια γραμμική και τοπολογική δομή, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία που διατηρεί τις αποστάσεις και τη γραμμική δομή του χώρου.

Με τη βοήθεια της έννοιας του ισομετρικού ισομορφισμού μπορούμε να δώσουμε πολύ συγκεκριμμένη περιγραφή του δυϊκού χώρου για αρκετά κλασικά παραδείγματα χώρων Banach:

**Θεώρημα 5.3.2** *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια νόρμα. Ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$.*

**Απόδειξη:** Ορίζουμε $T : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ ως εξής: απεικονίζουμε το $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στην $n$-άδα $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathbb{R}^n$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι το $f$ προσδιορίζεται πλήρως από το διάνυσμα $Tf = (f(e_i))_{i \leq n}$: αν $x = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$, τότε $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i)$, δηλαδή ξέρουμε το $f(x)$ αν μάς δώσουν τις συντεταγμένες του $x$.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο $T$ είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί:

(α) Για τη γραμμικότητα,

$$\begin{aligned} T(\lambda f+\mu g) &= ((\lambda f+\mu g)(e_1),\dots,(\lambda f+\mu g)(e_n)) \\ &= (\lambda f(e_1)+\mu g(e_1),\dots,\lambda f(e_n)+\mu g(e_n)) \\ &= \lambda(f(e_1),\dots,f(e_n))+\mu(g(e_1),\dots,g(e_n)) \\ &= \lambda Tf+\mu Tg. \end{aligned}$$

(β) Για το ένα προς ένα,

$$\begin{aligned} Tf=\vec{0} &\implies \forall i=1,\dots,n,\quad f(e_i)=0 \\ &\implies \forall x\in\mathbb{R}^n,\quad f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=0 \\ &\implies f\equiv 0. \end{aligned}$$

(γ) Αν $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, ορίζουμε $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i$. Τότε, $f\in(\mathbb{R}^n)^*$ και $f(e_i)=a_i$, $i=1,\dots,n$. Άρα, $Tf=a$. Αυτό δείχνει ότι ο $T$ είναι επί.

Μένει να δείξουμε ότι ο $T$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Έστω $f\in(\mathbb{R}^n)^*$. Τότε, $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)$, και έχουμε δεί ότι ένα συναρτησοειδές αυτής της μορφής έχει νόρμα

$$\|f\|=\|(f(e_1),\dots,f(e_n))\|=\|Tf\|.\quad\square$$

**Θεώρημα 5.3.3** *Ο $(\ell_1)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\ell_\infty$.*

**Απόδειξη:** Ορίζουμε $T:\ell_1^*\to\ell_\infty$ ως εξής: Έστω $e_k=(\delta_{kn})$ και $f:\ell_1\to\mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ελέγξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

(i) Η $(e_k)$ είναι βάση Schauder του $\ell_1$, δηλαδή, κάθε $x=(\xi_k)\in\ell_1$ γράφεται (μονοσήμαντα) στη μορφή $x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$.

(ii) Το $f$ είναι συνεχές, άρα $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)$, $x\in X$.

Ορίζουμε $T(f)=(f(e_1),\dots,f(e_k),\dots)$. Θα δείξουμε ότι ο $T$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

(α) *Ο $T$ είναι καλά ορισμένος.* Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ έχουμε $|f(e_k)|\le\|f\|\,\|e_k\|=\|f\|$ (γιατί $\|e_k\|=1$.) Άρα,

$$(*)\qquad \|Tf\|_\infty\le\|f\|.$$

Ειδικότερα, $Tf\in\ell_\infty$.

(β) Αν $\|x\|_1=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|=1$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\,|f(e_k)| \\ &\le \left(\sup_k|f(e_k)|\right)\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|=\|Tf\|_\infty. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} |f(x)| \leq \|Tf\|_\infty.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, για κάθε $f \in \ell_1^*$ ισχύει $\|Tf\|_\infty = \|f\|$ (δηλαδή, ο $T$ είναι ισομετρία.)

(γ) Η γραμμικότητα του $T$ ελέγχεται εύκολα.

(δ) Αν $Tf = 0$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(e_k) = 0$. Άρα, για κάθε $x \in \ell_1$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Αφού $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, ο $T$ είναι ένα προς ένα.

(ε) Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \ell_\infty$ (υπάρχει λοιπόν $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k| \leq M$, $k \in \mathbb{N}$.) Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$. Τότε,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|\, |a_k| \leq (\sup_k |a_k|) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq M\|x\|_1.$$

Άρα, $f \in \ell_1^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο $T$ είναι επί. □

**Θεώρημα 5.3.4** *Αν $1 < p < +\infty$, τότε ο $\ell_p^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\ell_q$, όπου $q$ ο συζυγής εκθέτης του $p$.*

**Απόδειξη:** Η $(e_k)$ είναι βάση Schauder του $\ell_p$ (ελέγξτε το). Κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_p$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_k \xi_k e_k$, και αν $f : \ell_p \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε $f(x) = \sum_k \xi_k f(e_k)$.

Ορίζουμε $T : \ell_p^* \to \ell_q$ με $Tf = (f(e_1), \ldots, f(e_k), \ldots)$.

(α) *Ο $T$ είναι καλά ορισμένος:* Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ ισχύει $\sum_k |f(e_k)|^q < +\infty$. Έστω $N \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\gamma_k = |f(e_k)|^q / f(e_k)$ αν $f(e_k) \neq 0$, και $\gamma_k = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q &= \sum_{k=1}^{N} \gamma_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k e_k\right) \\
&\leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |\gamma_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^{(q-1)p}\right)^{1/p} \\
&= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|f(e_k)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\| \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{N}|f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$, παίρνουμε

$$(*) \qquad \|Tf\|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

το οποίο βέβαια δείχνει και ότι $Tf \in \ell_q$.

(β) Αν $f \in \ell_p^*$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\,|f(e_k)| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^q\right)^{1/q} \\ &= \|x\|_p\,\|Tf\|_q. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_p=1}|f(x)| \leq \|Tf\|_q.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε ότι ο $T$ είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \ell_p^*$, $\|Tf\| = \|f\|$.

(γ) Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $T$ είναι γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(δ) Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \ell_q$. Δηλαδή, $\sum_k |a_k|^q < +\infty$. Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k a_k$. Τότε,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\,|a_k| \\ &\leq \left(\sum_k |a_k|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p} \\ &= \|a\|_q\,\|x\|_p. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in \ell_p^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο $T$ είναι επί. □

## 5.4 Ασκήσεις

**1.** Έστω $T : C[0,1] \to C[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $R(T)$ του $T$.

(γ) Είναι ο $T^{-1} : R(T) \to C[0,1]$ φραγμένος;

(δ) Βρείτε την $\|T\|$.

**2.** Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ ως εξής: αν $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(α) Δείξτε ότι ο $T$ ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ ($n$ φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

**3.** Στον $C[0,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : C[-1,1] \to \mathbb{R}$:

(α) $F(g) = \int_{-1}^1 g(s)ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2)+g(-1/2)-2g(0)}{2}$.

**4.** Ορίζουμε $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k$. Δείξτε ότι το $F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

**5.** Ορίζουμε $T, S : C[0,1] \to C[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = t\int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) Δείξτε ότι οι $T, S$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(β) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;

(γ) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

**6.** Θεωρούμε το τρίγωνο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, και μια συνεχή συνάρτηση $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T : C[a,b] \to C[a,b]$ με

$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x,y)f(y)dy.$$

Δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και

$$\|T\| \leq (b-a)\max\{|\phi(x,y)| : (x,y) \in \Delta\}.$$

**7.** Θεωρούμε το χώρο $C^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $C^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Δείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος.
[*Υπόδειξη:* Περιοριστείτε πρώτα στον χώρο $\{f \in C^1 : f(0) = 0\}$, και εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.]

**8.** Έστω $X$ ο χώρος όλων των φραγμένων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Ορίζουμε $T : X \to X$, με $(Tf)(t) = f(t-a)$, όπου $a > 0$ δοσμένη σταθερά. Είναι ο $T$ γραμμικός; Φραγμένος;

**9.** Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, $T_n, T \in B(X,Y)$ και $x_n, x \in X$. Δείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.

**10.** Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι το $F$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

**11.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

**12.** Έστω $X$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.

**13.** Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον $X$, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος.

**14.** Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο $T$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.

**15.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $M^* \subseteq X^*$. Ορίζουμε

$$N(M^*) = \{x \in X : \forall F \in M^*,\ \ F(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι το $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X$.

**Υποδείξεις - απαντήσεις**

**1.** (α) Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|(Tf)(t)| = |\int_0^t f(s)ds| \leq \int_0^t |f(s)|ds \leq \|f\| \int_0^t ds = \|f\| \cdot t \leq \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \max_{0\leq t\leq 1} |(Tf)(t)| \leq \|f\|.$$

Έπεται ότι ο $T$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Για την γραμμικότητα του $T$ παρατηρούμε ότι αν $f, g \in C[0,1]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [T(af+bg)](t) &= \int_0^t (af(s)+bg(s))ds = a\int_0^t f(s)ds + b\int_0^t g(s)ds \\ &= a(Tf)(t) + b(Tg)(t) = [a(Tf)+b(Tg)](t), \end{aligned}$$

άρα $T(af+bg) = a(Tf)+b(Tg)$. Η $Tf$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού $(Tf)' = f$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $T$ είναι καλά ορισμένος, αλλά και ότι είναι ένα προς ένα:

$$Tf = Tg \Longrightarrow (Tf)' = (Tg)' \Longrightarrow f = g.$$

(β) Όπως παρατηρήσαμε στο (α) η $Tf$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(Tf)(0) = 0$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που ανήκουν στην εικόνα $R(T)$ του $T$. Πράγματι, αν $g \in C^1[0,1]$ και $g(0) = 0$, θεωρούμε την $f = g' \in C[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t g'(s)ds = g(t) - g(0) = g(t),$$

δηλαδή, $Tf = g$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $f_n(0) = 0$. Από το (β), $f_n \in R(T)$ και $[T^{-1}(f_n)](t) = f_n'(t) = nt^{n-1}$. Άρα,

$$\frac{\|T^{-1}(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1} = n$$

(γιατί;). Έπεται ότι ο $T^{-1}$ δεν είναι φραγμένος: αν ήταν, θα είχαμε $\|T^{-1}\| \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί;).

(δ) Αν πάρουμε $f \equiv 1$ στο $[0,1]$, τότε $\|f\| = 1$ και $(Tf)(t) = \int_0^t ds = t$. Άρα,

$$\|T\| \geq \|Tf\| = \max_{0\leq t\leq 1} |t| = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\|T\| = 1$.

**2.** (α) Ο $T$ ορίζεται καλά, γιατί

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty,$$

δηλαδή $Tx \in \ell_2$. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι ο $T$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Η γραμμικότητα του $T$ ελέγχεται εύκολα.

(β) Επαγωγικά δείχνουμε ότι $T_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$. Για τη νόρμα του $T_n$ έχουμε $\|T_n\| \leq \|T\| \ldots \|T\| = \|T\|^n \leq 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί

$$\|T_n\| \geq \frac{\|T_n e_{n+1}\|_2}{\|e_{n+1}\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ειδικότερα, $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, τότε $\|T_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2} \to 0$ όταν $n \to \infty$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς). Δηλαδή, $T_n x \to \vec{0}$ για κάθε $x \in \ell_2$. $\square$

**3.** (α) Για κάθε $g \in C[0,1]$ έχουμε

$$|F(g)| = |\int_{-1}^{1} g(s)ds - g(0)| \leq \int_{-1}^{1} |g(s)|ds + |g(0)| \leq 2\|g\| + \|g\| = 3\|g\|.$$

Άρα, το $F$ είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 3$. Για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon \in C[-1,1]$ θέτοντας $g_\varepsilon \equiv 1$ στα $[-1, -\varepsilon]$ και $[\varepsilon, 1]$, $g_\varepsilon(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-\varepsilon, 0]$ και $[0, \varepsilon]$. Τότε $\|g_\varepsilon\| = 1$ και

$$\begin{aligned}
\|F\| &\geq |F(g_\varepsilon)| = |\int_{-1}^{1} g_\varepsilon(s)ds + 1| \\
&= \left|\int_{-1}^{-\varepsilon} ds + \int_{-\varepsilon}^{0} g_\varepsilon(s)ds + \int_{0}^{\varepsilon} g_\varepsilon(s)ds + \int_{\varepsilon}^{1} ds + 1\right| \\
&= |(1-\varepsilon) + 0 + 0 + (1-\varepsilon) + 1| = 3 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι

$$\|F\| \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+} (3 - 2\varepsilon) = 3.$$

Άρα, $\|F\| = 3$.

(β) Για κάθε $g \in C[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|F(g)| &= \left|\frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0)\right| \leq \frac{|g(1/2)|}{2} + \frac{|g(-1/2)|}{2} + |g(0)| \\
&\leq \frac{\|g\|}{2} + \frac{\|g\|}{2} + \|g\| = 2\|g\|.
\end{aligned}$$

Άρα, το $F$ είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 2$. Ορίζουμε $g \in C[-1,1]$ θέτοντας $g \equiv 1$ στα $[-1, -1/2]$ και $[1/2, 1]$, $g(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-1/2, 0]$ και $[0, 1/2]$. Τότε $\|g\| = 1$ και

$$\|F\| \geq |F(g)| = \left|\frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0)\right| = |\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1)| = 2.$$

Άρα, $\|F\| = 2$.

**4.** Αν $x \in \ell_1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το $F$ είναι καλά ορισμένο. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα:

$$F(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} (a\xi_k + b\eta_k) = a\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k + b\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = aF(x) + bF(y).$$

Έχουμε

$$|F(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1,$$

άρα το $F$ είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί αν $\xi_k \geq 0$ τότε

$$|F(x)| = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1.$$

**5.** (α) Η γραμμικότητα των $T$ και $S$ ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = |t\int_0^1 f(s)ds| \leq t\int_0^1 |f(s)|ds \leq t\|f\|\int_0^1 ds = t\|f\| \leq \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leq \|f\|$. Δηλαδή, ο $T$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Όμοια,

$$|(Sf)(t)| = |tf(t)| = t|f(t)| \leq 1 \cdot \|f\| = \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Sf\| \leq \|f\|$. Δηλαδή, ο $S$ είναι φραγμένος και $\|S\| \leq 1$.

(β) Έχουμε

$$[(T\circ S)(f)](t) = t\int_0^1 (Sf)(s)ds = t\int_0^1 sf(s)ds,$$

και

$$[(S\circ T)(f)](t) = t(Tf)(t) = t^2\int_0^1 f(s)ds.$$

Δεν ισχύει ότι $T\circ S = S\circ T$. Αν ίσχυε, για την $f \equiv 1$ θα παίρναμε

$$[(T\circ S)(f)](t) = [(S\circ T)(f)](t) \Longrightarrow t\int_0^1 sds = t^2\int_0^1 ds \Longrightarrow \frac{t}{2} = t^2$$

για κάθε $t \in [0,1]$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

(γ) Όπως στο (α), ελέγχουμε ότι $\|T\circ S\| \leq 1/2$ και $\|S\circ T\| \leq 1$. Παίρνοντας $f \equiv 1$, βλέπουμε ότι ισχύουν ισότητες:

$$\|T\| = \|S\| = \|S\circ T\| = 1, \quad \|T\circ S\| = \frac{1}{2}.$$

Επαληθεύστε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς.

**6.** Η $Tf$ είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ο $T$ ορίζεται καλά: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta < \varepsilon$) τέτοιος ώστε αν $(x,y),(x_1,y_1) \in \Delta$ και $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} < \delta$ να έχουμε $|\phi(x,y)-\phi(x_1,y_1)| < \varepsilon$.

Ειδικότερα, αν $x < x_1$ και $x_1 - x < \delta$ και $(x,y),(x_1,y) \in \Delta$, τότε $|\phi(x,y)-\phi(x_1,y)| < \varepsilon$. Έστω $x < x_1$ στο $[a,b]$ με $x_1 - x < \delta$. Τότε,

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x_1)-(Tf)(x)| &= \Big|\int_a^{x_1}\phi(x_1,y)f(y)dy - \int_a^{x}\phi(x,y)f(y)dy\Big| \\
&\leq \Big|\int_x^{x_1}\phi(x_1,y)f(y)dy\Big| + \Big|\int_a^{x}[\phi(x_1,y)-\phi(x,y)]f(y)dy\Big| \\
&\leq \int_x^{x_1}|\phi(x_1,y)|\cdot|f(y)|dy + \int_a^{x}|\phi(x_1,y)-\phi(x,y)|\cdot|f(y)|dy \\
&\leq \Big(\max_{\Delta}|\phi|\Big)\|f\|(x_1-x) + \|f\|\varepsilon(x-a) \\
&< \Big[\Big(\max_{\Delta}|\phi|\Big) + b - a\Big]\varepsilon\|f\|.
\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η $Tf$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Η γραμμικότητα του $T$ ελέγχεται εύκολα. Τέλος, για κάθε $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &= \Big|\int_a^x \phi(x,y)f(y)dy\Big| \leq \int_a^x |\phi(x,y)|\cdot|f(y)|dy \\ &\leq \Big(\max_{\Delta}|\phi|\Big)\,\|f\|(x-a) \\ &\leq \Big[(b-a)\max_{\Delta}|\phi|\Big]\,\|f\|. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\| \leq \Big[(b-a)\max_{\Delta}|\phi|\Big]\,\|f\|.$$

Άρα, ο $T$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leq (b-a)\max_{\Delta}|\phi|$.

**7.** Έστω $f \in C^1[0,1]$ με $f(0)=0$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 \Big|\int_0^t f'(s)ds\Big|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds\right)\left(\int_0^t 1^2 ds\right) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s)|^2 ds\right) t dt \\ &\leq \int_0^1 |f'(s)|^2 ds \\ &\leq \|f\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|f\|_2 \leq \|f\|_{1,2}$ σε αυτήν την περίπτωση. Έστω τώρα τυχούσα $f \in C^1[0,1]$. Τότε, η $g(t) = f(t) - f(0)$ ικανοποιεί την $g(0)=0$, άρα $\|g\|_2 \leq \|g\|_{1,2}$. Όμως, $g' = f'$ άρα

$$\|g\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |g'|^2\right)^{1/2} + |g(0)| = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)| - |f(0)| = \|f\|_{1,2} - |f(0)|,$$

επομένως

$$\|f\|_2 = \|g + f(0)\|_2 \leq \|g\|_2 + |f(0)| \leq \|g\|_{1,2} + |f(0)| = \|f\|_{1,2}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος και $\|I\| \leq 1$.

**8.** Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} [T(\lambda f + \mu g)](t) &= (\lambda f + \mu g)(t-a) \\ &= \lambda f(t-a) + \mu g(t-a) \\ &= \lambda (Tf)(t) + \mu (Tg)(t) \\ &= [\lambda Tf + \mu Tg](t), \end{aligned}$$

άρα $T(\lambda f+\mu g)=\lambda Tf+\mu Tg$, δηλαδή ο $T$ είναι γραμμικός. Επίσης,

$$|(Tf)(t)|=|f(t-a)|\le\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s)|=\|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|(Tf)(t)|\le\|f\|.$$

Άρα, ο $T$ είναι φραγμένος.

**9.** Οι $(T_n)$ και $(x_n)$ είναι φραγμένες ακολουθίες στους $B(X,Y)$ και $X$ αντίστοιχα, ως συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\|\le M,\quad \|x_n\|\le M,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|T_nx_n-Tx\| &= \|T_nx_n-Tx_n+Tx_n-Tx\|\\ &\le \|(T_n-T)(x_n)\|+\|T(x_n-x)\|\\ &\le \|T_n-T\|\cdot\|x_n\|+\|T\|\cdot\|x_n-x\|\\ &\le M\|T_n-T\|+\|T\|\cdot\|x_n-x\|\to 0,\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $T_nx_n\to Tx$.

**10.** Έστω ότι το $F$ είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $x\in B(0,1)$ έχουμε

$$|F(x)|\le\|F\|\cdot\|x\|\le\|F\|,$$

δηλαδή, $F(B(0,1))\subseteq[-\|F\|,\|F\|]$. Άρα, για $\delta=1$ έχουμε $F(B(0,\delta))\neq\mathbb{R}$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $F(B(0,\delta))\neq\mathbb{R}$ για κάποιο $\delta>0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F(B(0,\delta))$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (από τη γραμμικότητα του $F$ - εξηγήστε). Αφού είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα με κέντρο το 0. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\|\le\delta\Longrightarrow|F(x)|\le M.$$

Έπεται ότι το $F$ είναι φραγμένο: αν $x\neq 0$, τότε

$$\left|F\Big(\frac{\delta x}{2\|x\|}\Big)\right|\le M\Longrightarrow|F(x)|\le\frac{2M}{\delta}\|x\|.$$

**11.** Αν $F(x)=1$, τότε $1=F(x)\le\|F\|\cdot\|x\|$, άρα $\|x\|\ge\frac{1}{\|F\|}$. Δηλαδή,

$$\inf\{\|x\|:F(x)=1\}\ge\frac{1}{\|F\|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $0<\varepsilon<\|F\|$ υπάρχει $x_\varepsilon\in X$ με $\|x_\varepsilon\|=1$ τέτοιο ώστε $F(x_\varepsilon)=a_\varepsilon>\|F\|-\varepsilon$ (γιατί;). Τότε, $F(x_\varepsilon/a_\varepsilon)=1$ και

$$\Big\|\frac{x_\varepsilon}{a_\varepsilon}\Big\|=\frac{1}{a_\varepsilon}<\frac{1}{\|F\|-\varepsilon}.$$

Άρα,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leq \frac{1}{\|F\| - \varepsilon},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leq \frac{1}{\|F\|}.$$

**12.** Θεωρούμε μια βάση Hamel του $X$. Ο $X$ είναι απειροδιάστατος, επομένως μπορούμε να γράψουμε αυτή τη βάση στη μορφή

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in I\}.$$

[Ξεχωρίζουμε δηλαδή ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο μιάς βάσης του $X$ και το αριθμούμε.] Αφού τα $x_n, y_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κάθε $x_n$ είναι μη μηδενικό. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$ πρώτα στα στοιχεία της βάσης του $X$, θέτοντας

$$F(x_n) = n\|x_n\|, \quad F(y_i) = 0.$$

Κατόπιν επεκτείνουμε γραμμικά σε ολόκληρο το χώρο $X$ (κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός κάποιων $x_n$ και κάποιων $y_i$ - εξηγήστε). Το $F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, όμως δεν είναι φραγμένο γιατί τότε θα είχαμε

$$\|F\| \geq \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|} = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο.

**13.** Έστω ότι ο $T$ δεν είναι φραγμένος. Τότε, ο $T$ δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in X$ με $\|z_n\| < 1/n$ και $\|Tz_n\| \geq \varepsilon$.

Ορίζουμε $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{\|z_n\|}}$ (αφού $\|Tz_n\| \geq \varepsilon$ έχουμε $Tz_n \neq 0$ άρα $z_n \neq 0$). Τότε,

$$\|x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} = \sqrt{\|z_n\|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

άρα $x_n \to 0$. Όμως,

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Tz_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} \geq \varepsilon\sqrt{n} \to +\infty,$$

δηλαδή η $(\|Tx_n\|)$ δεν είναι φραγμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο $T$ είναι φραγμένος.

**14.** ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή γραμμικός, ένα προς ένα και επί, με την ιδιότητα $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Αν $x \in B_X$, τότε $\|Tx\| = \|x\| \leq 1$ άρα $Tx \in B_Y$. Άρα, $T(B_X) \subseteq B_Y$.

Αν $y \in B_Y$, αφού ο $T$ είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $Tx = y$, και $\|x\| = \|Tx\| = \|y\| \leq 1$, δηλαδή $x \in B_X$. Άρα, $B_Y \subseteq T(B_X)$.

Επομένως, $T(B_X) = B_Y$.

($\Longleftarrow$) Δείχνουμε πρώτα ότι ο $T$ είναι επί: αν $y \in Y$, $y \neq 0$, τότε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y = T(B_X)$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $Tx = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε,

$$y = T(\|y\|x) \in T(X).$$

Προφανώς, $0 = T(0) \in T(X)$. Άρα, $T(X) = Y$.

Ο $T$ είναι ισομετρία: αν είχαμε $\|Tx\| > \|x\|$ για κάποιο $x \in X$, τότε θα είχαμε

$$\|T(x/\|x\|)\| > 1 \Longrightarrow T(x/\|x\|) \notin B_Y,$$

ενώ $x/\|x\| \in B_X$. Αυτό είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $T(B_X) = B_Y$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $\|Tx\| < \|x\|$.

Αφού ο $T$ είναι ισομετρία, πρέπει να είναι και ένα προς ένα. Άρα, είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

**15.** Έστω $x, y \in N(M^*)$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Για κάθε $F \in M^*$ έχουμε

$$F(ax + by) = aF(x) + bF(y) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

άρα $ax + by \in N(M^*)$. Δηλαδή, ο $N(M^*)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$.

Έστω τώρα ότι $x_n \in N(M^*)$ και $x_n \to x \in X$. Για κάθε $F \in M^*$ έχουμε

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

άρα $x \in N(M^*)$. Επομένως, ο $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X$.

# Κεφάλαιο 6

# Χώροι Hilbert

## 6.1 Χώροι Hilbert

**Ορισμός** Έστω $X$ γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:
(α) $\langle x, x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in X$.
(β) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
(γ) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, για κάθε $x, y \in X$.
(δ) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$, για κάθε $x_1, x_2, y \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Από τις (α)-(δ) έπεται ότι $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle$ για κάθε $y_1, y_2, x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Επίσης, $x = \vec{0} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ για κάθε $y \in X$.

**Παραδείγματα** (α) Στον $\mathbb{R}^N$, αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \eta_k.$$

(β) Στον $\ell_2$, αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k.$$

(Η σειρά $\sum_k \xi_k \eta_k$ συγκλίνει απολύτως, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και από το γεγονός ότι $\sum_k \xi_k^2 < +\infty$, $\sum_k \eta_k^2 < +\infty$.)
(γ) Στον $C[a, b]$, αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Οι ιδιότητες (α)-(δ) του εσωτερικού γινομένου επαληθεύονται εύκολα και στα τρία παραδείγματα.

**Πρόταση 6.1.1** *(ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

*Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $x$ και $y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

**Απόδειξη:** Αν $y = \vec{0}$, τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα, και τα $\vec{0}, x$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έστω $y \neq \vec{0}$. Ορίζουμε $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $P(\lambda) = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle$. Τότε, $P(\lambda) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $P(\lambda)$ είναι μικρότερη ή ίση του 0. Δηλαδή, $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$, απ' όπου παίρνουμε την

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Ισότητα έχουμε αν και μόνο αν η διακρίνουσα του $P$ είναι 0, δηλαδή, αν και μόνο αν το $P$ έχει διπλή ρίζα $\lambda_0$. Όμως,

$$P(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow x = \lambda_0 y,$$

δηλαδή, αν τα $x, y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μάς επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

**Πρόταση 6.1.2** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ είναι νόρμα.*

**Απόδειξη:** (α) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$, και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
(β) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$.
(γ) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. $\square$

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έχουμε δεί ότι οι $(x, y) \to x+y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι κι αυτό συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$:

**Πρόταση 6.1.3** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

**Απόδειξη:** Γράφουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n-y\rangle+\langle x_n-x,y\rangle|\\ &\le |\langle x_n,y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x,y\rangle|\\ &\le \|x_n\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

Η $(x_n)$ συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n-y\|\to 0$, $\|x_n-x\|\to 0$. Άρα,

$$\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle. \quad \square$$

Οι παρακάτω ταυτότητες είναι απλές συνέπειες του ορισμού της $\|\cdot\|$:

(i) **Κανόνας του παραλληλογράμμου**. Για κάθε $x,y\in X$,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

(ii) **Πυθαγόρειο θεώρημα**. Αν $x,y\in X$ και $\langle x,y\rangle=0$, τότε

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

*Παρατήρηση:* Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον γραμμικό χώρο $X$, προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. (*Υπόδειξη:* υποθέστε ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και ορίστε $\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\}$. Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο, και επαληθεύστε ότι η $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα.)

**Ορισμός** Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται *χώρος Hilbert* αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

*Παραδείγματα:* (α) Έχουμε δεί ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ και ο $\ell_2$ είναι πλήρεις ως προς την $\|x\|=\sqrt{\sum_k \xi_k^2}$. Άρα, είναι χώροι Hilbert.

(β) Στον $C[a,b]$, η $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b[f(t)]^2dt}$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, αλλά δεν είναι πλήρης (θυμηθείτε ανάλογο επιχείρημα για την $\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$.)

(γ) Ο $C[a,b]$ με την $\|f\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|$ είναι πλήρης, αλλά η $\|\cdot\|_\infty$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, γιατί δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου (πάρτε π.χ. $f(t)=1-t$, $g(t)=t$ στον $C[0,1]$.)

## 6.2 Καθετότητα

**Ορισμός** (α) Λέμε ότι δύο διανύσματα $x,y$ του χώρου με εσωτερικό γινόμενο $X$ είναι *ορθογώνια* (*ή κάθετα*), και γράφουμε $x\perp y$, αν $\langle x,y\rangle=0$.

(β) Μιά οικογένεια $\{e_i : i\in I\}\subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν

$$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & ,\ i=j,\\ 0 & ,\ i\neq j.\end{cases}$$

*Παρατηρήσεις:* (α) Το $\vec{0}$ είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του $X$ που έχει αυτήν την ιδιότητα.

(β) Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια στον $X$, τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = \vec{0}$, τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$ έχουμε

$$0 = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j.$$

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον $X$, τότε με τη *διαδικασία Gram-Schmidt* που περιγράφεται στην επόμενη Πρόταση, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον $X$ που είναι «ισοδύναμη» με την $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την εξής έννοια:

**Πρόταση 6.2.1** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον $X$. Υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_k\}.$$

**Απόδειξη:** Ορίζουμε τα $e_k$ επαγωγικά: παρατηρήστε ότι $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$, θέτουμε $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Προφανώς, $\|e_1\| = 1$ και $\mathrm{span}\{x_1\} = \mathrm{span}\{e_1\}$.

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $e_1, \dots, e_k$ έτσι ώστε: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq k$, και $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$.

Θέτουμε $y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$. Παρατηρούμε ότι $y_{k+1} \neq 0$, αλλιώς θα είχαμε $x_{k+1} \in \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_k\}$, άτοπο αφού τα $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, για $j = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \langle y_{k+1}, e_j \rangle &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \langle x_{k+1}, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Άρα, το $e_{k+1} = y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$ ορίζεται καλά, και τα $e_1, \dots, e_{k+1}$ είναι ορθοκανονικά. Τέλος,

$$e_{k+1} \in \mathrm{span}\{x_{k+1}, e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{k+1}\},$$

και

$$x_{k+1} \in \mathrm{span}\{y_{k+1}, e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}.$$

Άρα, $\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}\} = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$. □

*Ειδική περίπτωση:* Αν $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $F$ υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ($\dim F = n < \infty$), τότε ο $F$ έχει βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$, και η ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μάς δίνει μιά ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $F$. Κάθε $x \in F$ γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, και

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Δηλαδή,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in F.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2, \quad x \in F.$$

Στη συνέχεια, μελετάμε το εξής πρόβλημα: δίνονται ένας χώρος $X$ με νόρμα, ένας υπόχωρος $F$ του $X$ πεπερασμένης διάστασης, και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\},$$

την *απόσταση του* $x$ *από τον* $F$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y_0 \in F$ στο οποίο «πιάνεται» η απόσταση: $\|x - y_0\| = d(x, F)$.

Πράγματι, από τον ορισμό της $d(x, F)$, μπορούμε να βρούμε $y_n \in F$ τέτοια ώστε

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n}.$$

Ειδικότερα, $y_n \in B(y_1, 2(d+1)) \cap F$, το οποίο είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο $F$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα υπάρχει υπακολουθία $y_{k_n} \to y_0 \in F$. Έπεται ότι

$$\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_{k_n}\| = d(x, F).$$

Το $y_0$ μπορεί να μην είναι μοναδικό: στον $\mathbb{R}^2$ με νόρμα την

$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\},$$

αν πάρουμε $x = (1, 1)$ και $F = \{(\xi_1, 0), \xi_1 \in \mathbb{R}\}$, τότε $d(x, F) = 1$, και $\|x - y\| = 1$ αν $y = (\xi_1, 0)$ με $0 \leq \xi_1 \leq 2$.

Θα δούμε ότι αν η $\|\cdot\|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, τότε το πλησιέστερο προς το $x$ σημείο του $F$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο:

**Πρόταση 6.2.2** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $F$ υπόχωρος του $X$ διάστασης $n$, με ορθοκανονική βάση την $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Αν $x \in X$, τότε το πλησιέστερο προς το $x$ σημείο του $F$ είναι το $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Επιπλέον, το $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ είναι κάθετο στον $F$.*

**Απόδειξη:** Παρατηρούμε πρώτα ότι το $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ είναι κάθετο στον $F$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κάθετο σε κάθε $e_j$, $j = 1, \ldots, n$. Όμως,

$$\begin{aligned} \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Έστω $y \in F$. Υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Τότε,

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big\|^2 = \Big\|(x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i) + \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\Big\|^2,$$

και τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια, οπότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα μάς δίνει

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 &= \Big\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\Big\|^2 + \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)^2 \\ &\geq \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$. □

Σημαντική συνέπεια της Πρότασης 6.2.2 είναι η *ανισότητα του Bessel*:

**Πρόταση 6.2.3** *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο $X$ με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2$ συγκλίνει, και*

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Απόδειξη:** Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $F_N = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$, και εφαρμόζουμε την Πρόταση 6.2.3. Το πλησιέστερο προς το $x$ σημείο του $F_N$ είναι το $\sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$, και το $x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$ είναι κάθετο στον $F_N$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 + \|\sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 \\ &\geq \|\sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n\rangle|^2. \end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $N$, παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad \square$$

## 6.3 Ορθογώνιο συμπλήρωμα - προβολές

Έστω $H$ χώρος Hilbert, και έστω $M$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$ (ενδεχομένως απειροδιάστατος). Θα δείξουμε ότι, και σ' αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έχει μοναδική λύση:

**Πρόταση 6.3.1** *Έστω $H$ χώρος Hilbert, $M$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - y_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

*Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, και ονομάζεται προβολή του $x$ στον $M$.*

**Απόδειξη:** Θέτουμε $\delta = d(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία $(y_n)$ στον $M$ τέτοια ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\Big\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\Big\|^2.
\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Άρα, η $(y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $H$. Ο $H$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο $M$ είναι κλειστός), και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}
0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\Big\|\frac{y + y'}{2} - x\Big\|^2 \\
&\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$. □

Το $x - P_M(x)$ είναι και στην «απειροδιάστατη περίπτωση» κάθετο στον $M$:

**Πρόταση 6.3.2** *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 6.3.1, $x - P_M(x) \perp M$.*

**Απόδειξη:** Θέτουμε $z = x - P_M(x)$, και δείχνουμε ότι $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in M$. Έστω $y \in M$. Θεωρούμε τον $F = \{y, P_M(x)\} \subseteq M$. Τότε,

$$d(x, F) \leq \|z\| = d(x, M) \leq d(x, F),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $F \subseteq M$, και η πρώτη γιατί $P_M(x) \in F$. Αφού $\|x - P_M(x)\| = d(x, F)$, και ο $F$ έχει πεπερασμένη διάσταση, έχουμε

$$x - P_M(x) \perp F.$$

Ειδικότερα, $x - P_M(x) \perp y$, δηλαδή $\langle z, y\rangle = 0$. □

**Πόρισμα 6.3.1** *Αν $H$ χώρος Hilbert και $M$ κλειστός γνήσιος υπόχωρος του $H$, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, τέτοιο ώστε $z \perp M$.*

**Απόδειξη:** Έστω $x \in H \backslash M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. $\square$

**Πόρισμα 6.3.2** *Ένας γραμμικός υπόχωρος $F$ του $H$ είναι πυκνός αν και μόνο αν το μοναδικό διάνυσμα του $H$ που είναι κάθετο στον $F$ είναι το $0$.*

**Απόδειξη:** $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι ο $F$ είναι πυκνός στον $H$, και ότι $\langle z, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in F$.

Έστω $y \in H$. Αφού ο $F$ είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to y$. Τότε, $0 = \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$. Άρα, $\langle z, y\rangle = 0$. Αφού $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$, έχουμε $z = 0$.

$(\Leftarrow)$ Ας υποθέσουμε ότι ο $F$ δεν είναι πυκνός στον $H$. Τότε, ο $\overline{F}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του $H$. Άρα, υπάρχει $z \neq 0$, $z \perp \overline{F}$.

Ειδικότερα, $z \perp F$, άτοπο. $\square$

**Παρατήρηση** Αν ο $X$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, αλλά όχι πλήρης, τότε το Πόρισμα 6.3.1 μπορεί να μην ισχύει.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον χώρο $c_{00}$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών, με εσωτερικό γινόμενο το $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$. Ορίζουμε $f : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_k \frac{\xi_k}{k}$. Το $f$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και είναι φραγμένο γιατί

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_k \frac{\xi_k}{k}| \leq \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_k \xi_k^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα, ο πυρήνας του $f$, $M = \{x \in c_{00} : \sum_k \frac{\xi_k}{k} = 0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $c_{00}$. Επίσης, ο $M$ είναι προφανώς γνήσιο υποσύνολο του $c_{00}$.

Ας υποθέσουμε ότι $z \perp M$, $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$. Αφού $y_n = e_1 - ne_n \in M$, έχουμε

$$\langle z, y_n\rangle = \zeta_1 - n\zeta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν $\zeta_1 \neq 0$, τότε $\zeta_n = \zeta_1/n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, άτοπο, γιατί το $z$ θα είχε όλες του τις συντεταγμένες μη μηδενικές. Άρα, $\zeta_1 = 0$, κι αυτό μάς δίνει $\zeta_n = \zeta_1/n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $z = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν και ο $M$ είναι κλειστός, το μόνο διάνυσμα του $c_{00}$ που είναι κάθετο στον $M$ είναι το $0$.

**Ορισμός** Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $A \subseteq H$, $A \neq \emptyset$. Ορίζουμε

$$A^{\perp} = \{x \in H : \forall a \in A, \;\; \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$ (άσκηση).

**Θεώρημα 6.3.1** *Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $M$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$. Τότε, $H = M \oplus M^{\perp}$. Δηλαδή, κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M,\ x_2 \in M^{\perp}.$$

**Απόδειξη:** Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Από τη συζήτηση που έχει προηγηθεί, $P_M(x) \in M$ και $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

Αν $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ και $x_1, x_1' \in M$, $x_2, x_2' \in M^{\perp}$, τότε το

$$y = x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in M \cap M^{\perp}$$

γιατί οι $M, M^{\perp}$ είναι υπόχωροι, άρα $y \perp y$, το οποίο σημαίνει ότι $y = 0$. Άρα, $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$, απ' όπου έπεται η μοναδικότητα του τρόπου γραφής. □

**Πόρισμα 6.3.3** *Έστω $M \neq \{0\}$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert $H$. Ορίζουμε $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = P_M(x_1 + x_2) = x_1$, όπου $x = x_1 + x_2$ όπως στο Θεώρημα. Ο $P_M$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|P_M\| = 1$.*

**Απόδειξη:** Αν $x = x_1 + x_2$, $x' = x_1' + x_2'$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda x + \mu x' = (\lambda x_1 + \mu x_1') + (\lambda x_2 + \mu x_2') \in M + M^{\perp},$$

οπότε

$$P_M(\lambda x + \mu x') = \lambda x_1 + \mu x_1' = \lambda P_M(x) + \mu P_M(x'),$$

άρα ο $P_M$ είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

δηλαδή ο $P_M$ είναι φραγμένος, και $\|P_M\| \leq 1$. Αν $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, τότε $P_M(x_0) = x_0$. Άρα,

$$\|P_M\| \geq \frac{\|P_M(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1. \quad \square$$

## 6.4 Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι ο $H^*$ περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο από τα στοιχεία του $H$.

**Λήμμα 6.4.1** *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a \rangle$ ανήκει στον $H^*$, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

**Απόδειξη:** Έχουμε

$$f_a(\lambda x+\mu y)=\langle \lambda x+\mu y, a\rangle=\lambda\langle x,a\rangle+\mu\langle y,a\rangle=\lambda f_a(x)+\mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)|=|\langle x,a\rangle|\leq \|a\|\,\|x\|.$$

Άρα, $f_a\in H^*$ και $\|f_a\|\leq\|a\|$. Τέλος, αν $a\neq 0$,

$$\|f_a\|\geq\frac{|f_a(a)|}{\|a\|}=\frac{|\langle a,a\rangle|}{\|a\|}=\|a\|.$$

Αν $a=0$, προφανώς $\|f_a\|=0$ ($f_a\equiv 0$). □

Το Θεώρημα του Riesz μάς λέει ότι κάθε $f\in H^*$ αναπαρίσταται σαν $f=f_a$ για κάποιο $a\in H$:

**Θεώρημα 6.4.1** *(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $f\in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a\in H$ τέτοιο ώστε $f=f_a$.*

**Απόδειξη:** Ορίζουμε $M=\mathrm{Ker}f=\{x\in H: f(x)=0\}$. Ο $M$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$.

Αν $M=H$, τότε $f\equiv 0$ και $f=f_0$.

Αν $M\neq H$, τότε υπάρχει $z\neq 0$, $z\in H$ που είναι κάθετο στον $M$ (γιατί;). Τότε, για κάθε $y\in H$ έχουμε

$$f(f(z)y-f(y)z)=f(z)f(y)-f(y)f(z)=0.$$

Άρα $f(z)y-f(y)z\in M$, και αφού $z\perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle f(z)y-f(y)z,z\rangle=0 &\implies f(z)\langle y,z\rangle=f(y)\langle z,z\rangle\\ &\implies f(y)=\Big\langle y,\frac{f(z)z}{\|z\|^2}\Big\rangle=f_a(y),\end{aligned}$$

όπου $a=f(z)z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του $a$ είναι απλή. Αν $f(y)=\langle y,a\rangle=\langle y,a'\rangle$ για κάθε $y\in H$, τότε $a-a'\perp y$ για κάθε $y\in H$. Άρα, $a=a'$. □

**Πόρισμα 6.4.1** *Έστω $H$ χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $T:H\to H^*$ με $T(a)=f_a$ είναι γραμμική ισομετρία επί (ισομετρικός ισομορφισμός).*

**Απόδειξη:** (α) Για τη γραμμικότητα της $T$, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a+\mu a'}(x)=\langle x,\lambda a+\mu a'\rangle=\lambda\langle x,a\rangle+\mu\langle x,a'\rangle=\lambda f_a(x)+\mu f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a+\mu a')=f_{\lambda a+\mu a'}=\lambda f_a+\mu f_{a'}=\lambda T(a)+\mu T(a').$$

(β) Από το Λήμμα, $\|T(a)\|=\|f_a\|=\|a\|$. Δηλαδή, η $T$ είναι ισομετρία.
(γ) Αν $f\in H^*$, υπάρχει $a\in H$ τέτοιο ώστε $T(a)=f_a=f$, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η $T$ είναι επί. □

## 6.5 Ορθοκανονικές βάσεις

**Ορισμός** Έστω $X$ διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται *ορθοκανονική βάση* του $X$, αν

$$X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

*Σημείωση:* Αυτό δεν σημαίνει ότι η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση Hamel του $X$. Για παράδειγμα, η συνήθης ορθοκανονική ακολουθία $(e_n)$ στον $\ell_2$ είναι ορθοκανονική βάση (γιατί;), όχι όμως αλγεβρική του βάση.

**Πρόταση 6.5.1** *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος $X$ με εσωτερικό γινόμενο, έχει ορθοκανονική βάση.*

**Απόδειξη:** Ο $X$ είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $X$. Ορίζουμε $Y = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $\overline{Y} = X$.

Παραλείποντας διαδοχικά εκείνα τα $x_n$ τα οποία γράφονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί των προηγουμένων τους, παίρνουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε

$$Y = \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Με τη διαδικασία Gram-Schmidt, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $Y = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Άρα,

$$X = \overline{Y} = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}. \quad \square$$

*Παρατήρηση:* Αν ο $X$ έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε είναι διαχωρίσιμος. Το $M = \{\sum_{n=1}^N a_n e_n : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $X$.

**Πρόταση 6.5.2** *Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του $X$. Τότε, αν $x \in X$ έχουμε*
(α) $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle e_n$,
(β) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2$.

**Απόδειξη:** Έστω $x \in X$, και $\varepsilon > 0$. Αφού $X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Όμως, στον $F_N = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ έχουμε

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\Big\| \le \Big\|x - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle^2 = \Big\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2 < \varepsilon^2.$$

(ελέγξτε την τελευταία ισότητα ξεκινώντας από το δεξιό μέλος.) Τότε, για κάθε $M \geq N$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Big\| x - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle^2 = \Big\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2 \\ &< \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι
(α) $\sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \to x$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

(β) $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle^2 \to 0$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2. \quad \square$$

Αν λοιπόν η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $X$, τότε κάθε $x \in X$ έχει *ανάπτυγμα* ως προς την $\{e_n\}$, με *συντελεστές Fourier* τους $\langle x, e_n \rangle$, και η νόρμα του $x$ υπολογίζεται από την $\|x\|^2 = \sum_n \langle x, e_n \rangle^2$.

**Πόρισμα 6.5.1** *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert $H$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\ell_2$.*

**Απόδειξη:** Ο $H$ έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle, \ldots).$$

(α) Ο $T$ είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_n \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.
(β) Η γραμμικότητα του $T$ ελέγχεται εύκολα.
(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_n \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$, άρα ο $T$ είναι ισομετρία (άρα και ένα προς ένα).
(δ) Έστω $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η $(x_N)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $H$. Ο $H$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m \rangle \to \langle x, e_m \rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m \rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m \rangle = a_m.$$

Άρα, $\langle x, e_m \rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m \rangle)_{m \in \mathbb{N}} = (a_m)_{m \in \mathbb{N}},$$

άρα ο $T$ είναι επί. $\square$

## 6.6 Ασκήσεις

**1.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω $x, y \in X$. Δείξτε ότι
(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

**2.** Έστω $H$ χώρος Hilbert, $x_n, y_n$ στη μοναδιαία μπάλα του $H$, και $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

**3.** Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

**4.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα $x_i$, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

**5.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \Big\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

**6.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $A, B$ μη κενά υποσύνολα του $X$, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι
(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

**7.** Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $Y$ υπόχωρος του $H$. Δείξτε ότι ο $Y$ είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

**8.** Έστω $M, N$ κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp \quad , \quad (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}.$$

**9.** Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert $H$ και γραμμικού υπόχωρου $F$ του $H$ με την ιδιότητα $H \neq F + F^\perp$.

**10.** Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $W, Z$ κλειστοί υπόχωροι του $H$ με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι $W$ και $Z$ είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του $H$.

**11.** Σε έναν χώρο Hilbert $H$, θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους $M, N$, και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές $P_M, P_N$. Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.

**12.** Θεωρούμε τον $C[-1,1]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το

$$\int_{-1}^1 (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

**13.** Έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

[*Υπόδειξη:* Υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.]

**14.** Έστω $W$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert $H$, και $f \in W^*$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$.
[*Υπόδειξη:* Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον $W$.]

**15.** Έστω $X$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον $X$. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

**16.** Έστω $Y$ κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert $H$, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του $Y$. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του $Y$ προς το $x$ είναι το $\sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle e_n$.

**17.** Δείξτε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\ell_2$ έχει την εξής ιδιότητα:

$$\forall f \in \ell_2^*, \quad f(e_n) \to 0.$$

**18.** Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $(x_n)$ ορθογώνια ακολουθία στον $H$ (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Τότε, η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

### Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x+ay\|^2 = \|x-ay\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x,y\rangle + \|ay\|^2 = \|x\|^2 - 2a\langle x,y\rangle + \|ay\|^2,$$

δηλαδή,

$$a\langle x,y\rangle = 0.$$

Παίρνοντας $a=1$, βλέπουμε ότι $x \perp y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x+ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 = \|x-ay\|^2.$$

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x+ay\|^2 \geq \|x\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x,y\rangle + a^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

δηλαδή,

$$2a\langle x,y\rangle + a^2\|x\|^2 \geq 0.$$

Διαιρώντας με $a$ και παίρνοντας $a \to 0^+$, βλέπουμε ότι $\langle x,y\rangle \geq 0$, ενώ παίρνοντας $a \to 0^-$, βλέπουμε ότι $\langle x,y\rangle \leq 0$. Άρα, $\langle x,y\rangle = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x+ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 \geq \|x\|^2.$$

**2.** Υψώνουμε την $\|x_n - y_n\|$ στο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - y_n\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \\ &\leq 2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - y_n\| \to 0$.

**3.** Υψώνουμε την $\|x_n - x\|$ στο τετράγωνο, και εφαρμόζουμε την υπόθεση για $y = x$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle \\ &\to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - x\| \to 0$.

**4.** Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i\neq j}\|x_i - x_j\|^2 &+ \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i\neq j}(\|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle + \|x_j\|^2) + \langle\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j\rangle \\ &= (n-1)\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2 - 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle + \sum_{i=1}^n\|x_i\|^2 + 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle \\ &= n\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2. \end{aligned}$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ όταν $i \neq j$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε

$$i \neq j \Longrightarrow \|(x_i - y) - (x_j - y)\| \geq 2.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\|y - x_i\| \leq r$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 &\leq \sum_{i \neq j} \|(x_i - y) - (x_j - y)\|^2 \\ &= n \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i - ny\|^2 \\ &\leq n \sum_{i=1}^{n} \|x_i - y\|^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} r^2 \\ &= n^2 r^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$r^2 \geq \frac{2(n-1)}{n} \Longrightarrow r \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

**5.** Αν $n = 1$, έχουμε $\|x\|^2 + \|-x\|^2 = 2\|x\|^2$.

Για το επαγωγικό βήμα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i x_i \right\|^2 &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left( \left\| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i + x_{k+1} \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i - x_{k+1} \right\|^2 \right) \\ &= 2 \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left( \left\| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i \right\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \right) \\ &= 2 \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i \right\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\ &= 2 \cdot 2^k \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\ &= 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά: τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i$ και $x_{k+1}$ (για κάθε επιλογή των $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$), την επαγωγική υπόθεση για τα $x_1, \ldots, x_k$, και το γεγονός ότι το $\{-1, 1\}^k$ έχει $2^k$ στοιχεία.

**6.** (α) Έστω $x \in A$. Από τον ορισμό του $A^\perp$, για κάθε $y \in A^\perp$ έχουμε $\langle x, y \rangle = 0$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$x \in (A^\perp)^\perp =: A^{\perp\perp}.$$

Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, έχουμε $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(β) Αν $x \in B^\perp$, τότε $x \perp y$ για κάθε $y \in B$. Αφού $A \subseteq B$, αυτό σημαίνει ότι $x \perp y$ για κάθε $y \in A$, άρα $x \in A^\perp$.

(γ) Εφαρμόζοντας το (α) για το $A^\perp$ στη θέση του $A$, έχουμε

$$A^\perp \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A \subseteq A^{\perp\perp}$, το (β) μάς δίνει

$$A^{\perp\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp.$$

Επομένως, $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

**7.** Ο $Y^{\perp\perp}$ είναι (πάντα) κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$, άρα, αν $Y = Y^{\perp\perp}$ τότε ο $Y$ είναι κλειστός.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: ξέρουμε ότι $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$. Έστω $x \in Y^{\perp\perp}$. Αφού ο $H$ είναι χώρος Hilbert και ο $Y$ κλειστός υπόχωρός του, το $x$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$, όπου $y \in Y$ και $z \in Y^\perp$. Όμως, $x \in Y^{\perp\perp}$ και $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, άρα

$$z = x - y \in Y^{\perp\perp}.$$

Αφού $z \in Y^{\perp\perp} \cap Y^\perp$, έχουμε $z \perp z$. Άρα, $z = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y \in Y$, και αφού το $x \in Y^{\perp\perp}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y = Y^{\perp\perp}$.

**8.** Αφού $M, N \subseteq M + N$, έχουμε $(M+N)^\perp \subseteq M^\perp, N^\perp$, άρα

$$(M+N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in M^\perp \cap N^\perp$ και $w \in M + N$. Τότε, $w = m + n$ για κάποια $m \in M$ και $n \in N$, και αφού $x \perp m, n$ παίρνουμε

$$\langle x, w\rangle = \langle x, m\rangle + \langle x, n\rangle = 0,$$

δηλαδή, $x \perp w$. Έπεται ότι $x \in (M+N)^\perp$, δηλαδή

$$M^\perp \cap N^\perp \subseteq (M+N)^\perp.$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα. Για τη δεύτερη, βάζουμε στην πρώτη τους $M^\perp, N^\perp$ στη θέση των $M, N$: έχουμε

$$M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = (M^\perp + N^\perp)^\perp,$$

και αφού οι $M, N$ είναι κλειστοί, παίρνουμε

$$M \cap N = (M^\perp + N^\perp)^\perp.$$

Παίρνοντας ορθογώνια συμπληρώματα, βλέπουμε ότι

$$(*) \qquad (M \cap N)^\perp = (M^\perp + N^\perp)^{\perp\perp}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν $F$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $H$, τότε $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ (σημειώστε ότι ο $M^\perp + N^\perp$ μπορεί να μην είναι κλειστός υπόχωρος του $H$). Στην Άσκηση 7 είδαμε ότι $F \subseteq F^{\perp\perp}$ και αφού ο $F^{\perp\perp}$ είναι κλειστός έπεται ότι $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$. Αν υπήρχε $z \in F^{\perp\perp} \setminus \overline{F}$, τότε το μη μηδενικό διάνυσμα $z - P_F(z)$ θα ανήκε στον $F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο. Άρα, έχουμε ισότητα, και θέτοντας $F = M^\perp + N^\perp$ στην $(*)$ έχουμε το ζητούμενο.

**9.** Θεωρούμε τον $H = \ell_2$, και σαν $F$ παίρνουμε τον υπόχωρο $c_{00}$ που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες. Προφανώς $F \neq H$, γιατί

$$\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \in \ell_2 \backslash c_{00}.$$

Από την άλλη πλευρά, $e_n \in c_{00}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν $y \in c_{00}^{\perp}$, το $y = (\eta_n)$ πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\eta_n = \langle y, e_n \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή $y = 0$. Άρα, $c_{00}^{\perp} = \{0\}$. Τότε,

$$c_{00} + c_{00}^{\perp} = c_{00} \neq \ell_2.$$

**10.** Έστω $x_n = w_n + z_n$ ακολουθία στον $W + Z$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = w + z$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του $H$ (γιατί;).

Η $(x_n)$ συγκλίνει, άρα είναι ακολουθία Cauchy: έχουμε $\|x_n - x_m\| \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Όμως, από την καθετότητα των $W$ και $Z$, και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε

$$\|w_n - w_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2,$$

και αυτό δείχνει ότι οι $(w_n)$, $(z_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy στους $W, Z$ αντίστοιχα. Οι $W, Z$ είναι κλειστοί υπόχωροι του $H$, άρα είναι πλήρεις σαν μετρικοί χώροι. Επομένως, υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $w_n \to w$ και $z_n \to z$. Έπεται ότι $x_n = w_n + z_n \to w + z$, και από μοναδικότητα του ορίου, $x = w + z \in W + Z$.

**11.** Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τους $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $N = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε,

$$(P_M \circ P_N)(1,1) = P_M(1,1) = (1,0),$$

ενώ

$$(P_N \circ P_M)(1,1) = P_N(1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα, $P_M \circ P_N \neq P_N \circ P_M$.

Ισχύει όμως ισότητα αν $M \perp N$: για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$(P_M \circ P_N)(x) = (P_N \circ P_M)(x) = 0,$$

δηλαδή $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M \equiv 0$.

**12.** Οι τρείς πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν από την ορθοκανονικοποίηση είναι οι εξής:

(α) $f_1(t) = \frac{1}{\|1\|} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(β) $f_2(t) = \frac{t - \langle t, f_1 \rangle f_1(t)}{\|t - \langle t, f_1 \rangle f_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} t$.

(γ) $f_3(t) = \frac{t^2 - \langle t^2, f_1 \rangle f_1(t) - \langle t^2, f_2 \rangle f_2(t)}{\|t^2 - \langle t^2, f_1 \rangle f_1 - \langle t^2, f_2 \rangle f_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})$.

Παρατηρούμε ότι

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |t^4 - a - bt - ct^2|^2 dt = d^2(t^4, \langle 1, t, t^2 \rangle),$$

επομένως μπορούμε να βρούμε τα βέλτιστα $a, b, c$ βρίσκοντας το πλησιέστερο σημείο του $\langle 1, t, t^2\rangle$ προς την $t^4$. Όμως, οι $f_1, f_2, f_3$ είναι ορθοκανονική βάση του $\langle 1, t, t^2\rangle$, άρα η λύση δίνεται από την

$$g(t) = \langle t^1, f_1\rangle f_1(t) + \langle t^4, f_2\rangle f_2(t) + \langle t^4, f_3\rangle f_3(t) = \ldots = \frac{6}{7}t^2 - \frac{3}{35},$$

το οποίο δίνει

$$a = -\frac{3}{35}, \quad b = 0, \quad c = \frac{6}{7}.$$

**13.** Υποθέτουμε ότι $R(T) = \mathrm{span}\{v\}$ για κάποιο $v \neq o$. Τότε, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$T(x) = \lambda_x v,$$

όπου ο $\lambda_x \in \mathbb{R}$ εξαρτάται από το $x$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lambda_x$ μέσω του $T$ ως εξής:

$$\langle Tx, v\rangle = \lambda_x \langle v, v\rangle \Longrightarrow \lambda_x = \Big\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι το $f : H \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x) = \Big\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle,$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$|f(x)| = |\Big\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \Big\|\frac{v}{\|v\|^2}\Big\| \leq \frac{\|T\|}{\|v\|}\|x\|.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_x = f(x) = \langle x, u\rangle, \quad x \in H.$$

Άρα, $T(x) = \lambda_x v = \langle x, u\rangle v$ για κάθε $x \in H$.

**14.** Ο $W$ είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας δίνει μοναδικό $w \in W$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle w, x\rangle, \quad x \in W.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f} : H \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = \langle w, x\rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $H$, επεκτείνει το $f$, και

$$\|f\|_{W^*} = \|w\| = \|\tilde{f}\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον $H$, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = \langle u, x\rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle w - u, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in W$, οπότε $w - u = z \in W^\perp$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα (εξηγήστε), και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|\tilde{f}\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = 0 \Longrightarrow w = u$. Έπεται ότι $g = \tilde{f}$.

**15.** Εφαρμόζουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και κατόπιν την ανισότητα του Bessel:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle y, e_k\rangle^2\right)^{1/2}\\ &\leq \|x\|\cdot\|y\|.\end{aligned}$$

**16.** Έστω $y$ το πλησιέστερο σημείο του $Y$ προς το $x$. Αφού $y \in Y$ και η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $Y$, το $y$ γράφεται στη μορφή

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle e_n.$$

Όμως ξέρουμε ότι $x - y \perp Y$ και $e_n \in Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\langle x - y, e_n\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, e_n\rangle = \langle y, e_n\rangle$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

**17.** Έστω $f \in \ell_2^*$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $y \in \ell_2$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle y, x\rangle, \quad x \in \ell_2.$$

Ειδικότερα, $f(e_n) = \langle y, e_n\rangle$. Όμως, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle^2 = \|y\|^2 < +\infty,$$

άρα, $\langle y, e_n\rangle^2 \to 0$, δηλαδή $f(e_n) \to 0$.

**18.** Ο $H$ είναι πλήρης, άρα η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ είναι Cauchy. Όμως, αν $l > m$ έχουμε

$$\|s_l - s_m\|^2 = \|x_{m+1} + \cdots + x_l\|^2 = \sum_{n=m+1}^{l}\|x_n\|^2,$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα, η $(s_m)$ είναι Cauchy αν και μόνο αν η

$$t_m = \sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^2$$

είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ συγκλίνει.

# Κεφάλαιο 7

# Το Θεώρημα Hahn - Banach

## 7.1 Το Λήμμα του Zorn

Έστω $M$ ένα μη κενό σύνολο. Μια σχέση $\leq$ στο $M$ λέγεται *μερική διάταξη* αν ικανοποιεί τα εξής:

(1) για κάθε $a \in M$, $a \leq a$ (ανακλαστική ιδιότητα).

(2) αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα).

(3) αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Το $M$ λέγεται τότε *μερικά διατεταγμένο σύνολο* (ως προς την $\leq$). Από τον ορισμό φαίνεται ότι μπορεί στο $M$ να υπάρχουν $a$ και $b$ για τα οποία να μην ισχύει καμμία από τις $a \leq b$ και $b \leq a$ (τότε, λέμε ότι τα $a$ και $b$ *δεν συγκρίνονται.*) Τα $a$ και $b$ *συγκρίνονται* αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $a \leq b$ ή $b \leq a$.

(α) Ένα μη κενό υποσύνολο $A$ του $M$ λέγεται *ολικά διατεταγμένο* (ή *αλυσίδα*) αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συγκρίνονται.

(β) Αν $W \neq \emptyset$, $W \subseteq M$ και $u \in M$, λέμε ότι το $u$ είναι *άνω φράγμα* για το $W$ αν: για κάθε $x \in W$ ισχύει $x \leq u$. Ένα υποσύνολο $W$ του $M$ μπορεί να έχει ή να μην έχει άνω φράγμα.

(γ) Το $r$ λέγεται *μέγιστο στοιχείο* του $M$ αν για κάθε $x \in M$ ισχύει $x \leq r$. Αν το $M$ έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό (άσκηση).

(δ) Το $m \in M$ λέγεται *μεγιστικό στοιχείο* του $M$ αν: για κάθε $x \in M$ με $m \leq x$ ισχύει $m = x$. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει στοιχείο του $M$ γνήσια μεγαλύτερο από το $m$. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $M$ μπορεί να έχει ή να μην έχει μεγιστικά στοιχεία. Αν το $M$ έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του $M$ (γιατί;).

**Παραδείγματα** (α) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο που δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $M = \mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $X$ (το *δυναμοσύνολο* του $X$). Ορίζουμε $\leq$ στο $M$ ως εξής:

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B.$$

Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο $M$ (και αν το $X$ έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχουν $A, B \in M$ που δεν συγκρίνονται: πάρτε π.χ. $A$ μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του $X$, και $B = X\backslash A$.) Το $M$ έχει *ένα* (ακριβώς) μεγιστικό στοιχείο, το $X$ (το οποίο είναι το μέγιστο στοιχείο του $M$).

(γ) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, των διατεταγμένων $n$-άδων πραγματικών αριθμών. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, λέμε ότι $x \leq y$ αν $\xi_i \leq \eta_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το $M$ είναι μερικά διατεταγμένο ως προς την $\leq$, και δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, και λέμε ότι $m \leq n$ αν ο $m$ διαιρεί τον $n$. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N}$ (τα στοιχεία 3 και 7 του $\mathbb{N}$ δεν συγκρίνονται.) Το $A = \{3 \cdot 2^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία ως προς την $\leq$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ των *πρώτων αριθμών* με την ίδια διάταξη $\leq$, τότε κάθε στοιχείο του $P$ είναι μεγιστικό. Πάλι με την $\leq$, το $\{2, 3, 4, 8\}$ έχει *δύο* μεγιστικά στοιχεία: το 3 και το 8 (ελέγξτε τους παραπάνω ισχυρισμούς.)

**Λήμμα του Zorn** *Έστω $M \neq \emptyset$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (ως προς την $\leq$). Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα $A \subseteq M$ έχει άνω φράγμα στο $M$. Τότε, το $M$ έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Ας δοκιμάσουμε να «αποδείξουμε» αυτήν την πρόταση: το $M$ είναι μη κενό, παίρνουμε λοιπόν κάποιο $x_1 \in M$. Αν το $x_1$ είναι μεγιστικό έχουμε το ζητούμενο, αλλιώς υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_1 < x_2$, και το $\{x_1, x_2\}$ είναι αλυσίδα. Αν το $x_2$ είναι μεγιστικό έχουμε το ζητούμενο, αλλιώς υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και το $\{x_1, x_2, x_3\}$ είναι αλυσίδα. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε μεγιστικό στοιχείο $x_n$ ή φτιάχνουμε αλυσίδα $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αυτή έχει άνω φράγμα, έστω $y_1$ από την υπόθεση. Αν το $y_1$ είναι μεγιστικό, τελειώσαμε. Αλλιώς; Συνεχίζουμε όπως και πριν. Αυτό που δεν είναι φανερό είναι αν αυτή η διαδικασία θα μας δώσει κάποια στιγμή μεγιστικό στοιχείο του $M$.

Για την ακρίβεια, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να δώσει απόδειξη: το Λήμμα του Zorn είναι *ισοδύναμο* με το αξίωμα της επιλογής, και θα το δεχτούμε σαν *αξίωμα* στη μελέτη μας.

Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται το Λήμμα του Zorn θα γίνει καθαρός με την απόδειξη του εξής θεωρήματος (την οποία είχαμε αναβάλλει):

**Θεώρημα 7.1.1** *Κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει βάση Hamel.*

**Απόδειξη:** Θεωρούμε το σύνολο $M$ όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του $X$. Το $M$ είναι μη κενό: αφού $X \neq \{0\}$, υπάρχει $x \in X$, $x \neq 0$. Το $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $\{x\} \in M$.

Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στο $M$, θέτοντας $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη (παρατηρήστε ότι σε έναν γραμμικό χώρο, μπορούμε να έχουμε δύο *ξένα*, άρα μη συγκρίσιμα, γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα.)

**Ισχυρισμός.** Το $(M, \leq)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn.

**Απόδειξη:** Έστω $\mathcal{A} \subseteq M$ ολικά διατεταγμένο. Γράφουμε $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, όπου κάθε $A_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $X$, και, αν $i, j \in I$, τότε είτε $A_i \subseteq A_j$ είτε $A_j \subseteq A_i$.

Ορίζουμε $U = \bigcup_{i \in I} A_i$. Προφανώς, $U \subseteq X$ και $A_i \subseteq U$ για κάθε $i \in I$. Δείχνουμε ότι $U \in M$, δηλαδή ότι το $U$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό θα δείξει ότι το $U$ είναι άνω φράγμα του $\mathcal{A}$ στο $M$.

Έστω $x_1, \dots, x_m \in U$. Αφού $x_k \in U$, $k = 1, \dots, m$, υπάρχουν $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ τέτοια ώστε $x_k \in A_{i_k}$. Το $\mathcal{A}$ είναι ολικά διατεταγμένο, άρα τα $A_{i_k}$ συγκρίνονται ανά δύο. Αφού είναι πεπερασμένα το πλήθος, υπάρχει $k_0$ τέτοιο ώστε $A_{i_k} \subseteq A_{i_{k_0}}$, $k = 1, \dots, m$. Δηλαδή, $x_1, \dots, x_m \in A_{i_{k_0}}$. Το $A_{i_{k_0}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα το $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq A_{i_{k_0}}$ είναι κι αυτό γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού το $\{x_1, \dots, x_m\}$ ήταν το τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $U$, το $U$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. $\square$

Τώρα, εφαρμόζεται το Λήμμα του Zorn: Το $M$ έχει μεγιστικό στοιχείο $B$. Το $B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και για να δείξουμε ότι είναι βάση αρκεί να δούμε ότι παράγει τον $X$.

Έστω $Y = \text{span}(B)$. Υποθέτουμε ότι $Y \neq X$. Τότε, υπάρχει $z \in X \setminus Y$, δηλαδή το $z$ δεν γράφεται σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $B$. Θα δείξουμε ότι το $B \cup \{z\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Αν $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \mu z = 0$, τότε $\mu = 0$, αλλιώς το $z$ θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_m$. Άρα, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$, και αφού το $B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Άρα, το $B$ δεν είναι μεγιστικό στοιχείο του $M$. Το $B \cup \{z\}$ ανήκει στο $M$ και περιέχει γνήσια το $B$. Αυτό είναι άτοπο.

Έπεται ότι $X = Y = \text{span}(B)$, δηλαδή το $B$ είναι βάση. $\square$

**Σημείωση:** Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται στο τελευταίο βήμα. Ουσιαστικά δείξαμε ότι αν $B$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $X$ που δεν παράγει τον $X$, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το $B$ σε ένα γνήσια μεγαλύτερο σύνολο $B' = B \cup \{z\}$, που είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο. Το Λήμμα του Zorn μάς επιτρέπει να ισχυριστούμε την ύπαρξη μεγιστικού γραμμικά ανεξάρτητου υποσυνόλου του $X$. Αυτό δεν επεκτείνεται, άρα παράγει το χώρο, άρα είναι βάση.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου το ζητούμενο είναι κάποια «μεγιστική επέκταση», το Λήμμα του Zorn είναι εξαιρετικά χρήσιμο. Το Θεώρημα Hahn-Banach είναι, όπως θα δούμε, ακριβώς ένα θεώρημα επέκτασης.

## 7.2 Το Θεώρημα Hahn - Banach

**Ορισμός** Έστω $X$ γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$. Το $p$ λέγεται *υπογραμμικό συναρτησοειδές*, αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(β) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$,

δηλαδή, αν είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Παρατηρήστε ότι: δεν απαιτούμε το $p$ να παίρνει μη αρνητικές τιμές, ούτε την $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (αν η $p$ έχει κι αυτές τις ιδιότητες, τότε λέγεται *ημινόρμα*.)

Εύκολα ελέγχονται οι $p(0) = 0$ και $p(-x) \geq -p(x)$, $x \in X$ (άσκηση).

**Παραδείγματα** (α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, τότε τα $f, |f|$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

(β) Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(γ) Η $p : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με $p((\xi_k)) = \text{limsup}\xi_k$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον $\ell_\infty$.

**Θεώρημα 7.2.1** *(Θεώρημα επέκτασης του Hahn) Έστω $X$ γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω $Z$ γραμμικός υπόχωρος του $X$, και $f : Z \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα: για κάθε $x \in Z$,*

$$(*) \qquad f(x) \leq p(x).$$

*Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

*(a) $\tilde{f}(x) = f(x)$ αν $x \in Z$ (το $\tilde{f}$ είναι επέκταση του $f$),*

*(β) $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.*

(α) Παρατηρήστε ότι δεν υποθέτουμε καμμία τοπολογική δομή για το χώρο $X$ (είναι απλώς ένας γραμμικός χώρος.)

(β) Όπως θα δούμε, το ουσιαστικό βήμα της απόδειξης είναι να δούμε πώς θα επεκτείνουμε το $f$ από έναν υπόχωρο $W$ σε έναν υπόχωρο $W_1$ που έχει «μία διάσταση παραπάνω», με γραμμικό τρόπο και χωρίς να χαλάσει η $(*)$. Από τη στιγμή που αυτό είναι δυνατό, το Λήμμα του Zorn μας εξασφαλίζει μια «μεγιστική επέκταση» $\tilde{f}$, κι αυτή (όπως θα δούμε) υποχρεούται να έχει πεδίο ορισμού ολόκληρον τον $X$.

Αρχίζουμε λοιπόν με το εξής Λήμμα:

**Λήμμα 7.2.1** *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, ας υποθέσουμε επιπλέον ότι για κάποιον γραμμικό υπόχωρο $W_1$ του $X$ ο οποίος περιέχει τον $Z$, έχουμε βρεί $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_1|_Z = f$ και $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.*

*Έστω $y \in X \setminus W_1$, και $W_2 = \text{span}\{W_1, y\}$. Τότε, υπάρχει $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_2|_{W_1} = f_1$ και $f_2(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_2$.*

**Απόδειξη:** Κάθε $z \in W_2$ γράφεται *μονοσήμαντα* στη μορφή

$$z = x + \lambda y$$

για κάποια $x \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (άσκηση). Η γραμμική επέκταση $f_2$ που ζητάμε προσδιορίζεται λοιπόν μονοσήμαντα από την τιμή $a \in \mathbb{R}$ που θα επιλέξουμε σαν $f_2(y)$. Αν θέσουμε $f_2(y) = a$, τότε πρέπει να έχουμε

$$f_2(z) = f_2(x) + \lambda f_2(y) = f_1(x) + \lambda a, \tag{1}$$

αφού ζητάμε το $f_2$ να είναι γραμμικό και να επεκτείνει το $f_1$. Η άλλη ιδιότητα που ζητάμε από το $a$ είναι η εξής: Για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y). \tag{2}$$

Ισοδύναμα, παίρνοντας υπ' όψιν τις (1) και (2), ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y) \quad , \quad f_1(x) - \lambda a \leq p(x - \lambda y). \tag{3}$$

Επειδή το $p$ είναι θετικά ομογενές και το $f_1$ γραμμικό στον $W_1$, η (3) είναι ισοδύναμη με το εξής: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) \quad , \quad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) - a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right), \tag{4}$$

και επειδή ο $W_1$ είναι υπόχωρος, ισοδύναμα ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x') - p(x' - y) \leq a \leq p(x + y) - f_1(x).$$

Μιά τέτοια επιλογή του $a$ είναι δυνατή αν και μόνο αν για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x) + f_1(x') \leq p(x' - y) + p(x + y).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(x') &= f_1(x + x') \\ &\leq p(x + x') \\ &= p((x' - y) + (x + y)) \\ &\leq p(x' - y) + p(x + y), \end{aligned}$$

από την υπογραμμικότητα του $p$, την γραμμικότητα του $f_1$ στον $W_1$, την $f_1 \leq p$ στον $W_1$, και το γεγονός ότι το $p$ ορίζεται σε ολόκληρο τον $X$. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. $\square$

**Απόδειξη του Θεωρήματος:** Έστω $\mathcal{W}$ η οικογένεια όλων των ζευγαριών $(W_1, f_1)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) ο $W_1$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$, και $Z \subseteq W_1$.

(β) το $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό, και $f_1|_Z = f$.

(γ) $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.

Η $\mathcal{W}$ είναι μη κενή, αφού $(Z, f) \in \mathcal{W}$. Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στην $\mathcal{W}$ θέτοντας $(W_1, f_1) \leq (W_2, f_2)$ αν και μόνο αν $W_1 \subseteq W_2$ και $f_2|_{W_1} = f_1$.

Το $(\mathcal{W}, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn: Έστω $\mathcal{C} = \{(W_i, f_i) : i \in I\}$ μια αλυσίδα στο $(\mathcal{W}, \leq)$. Ορίζουμε $W' = \bigcup_{i\in I} W_i$ και $f' : W' \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = f_i(x)$, $x \in W_i$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

(α) Ο $W'$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X$, και $Z \subseteq W_i \subseteq W'$ για κάθε $i \in I$ (θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $W_i \subseteq W_j$ είτε $W_j \subseteq W_i$, αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(β) Η $f'$ ορίζεται καλά, είναι γραμμική, και $f'(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W'$ (κι εδώ θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $f_j|_{W_i} = f_i$ είτε $f_i|_{W_j} = f_j$ αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(γ) Για κάθε $i \in I$, $f'|_{W_i} = f_i$.

Έπεται ότι $(W', f') \in \mathcal{W}$, και το $(W', f')$ είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

Από το Λήμμα του Zorn, το $(\mathcal{W}, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο $(W_0, f_0)$. Από το Λήμμα 7.2.1 βλέπουμε ότι $W_0 = X$: Αν όχι, θα παίρναμε $y \in X \backslash W_0$, και ορίζοντας $W_0' = \mathrm{span}\{W_0, y\}$ θα επεκτείναμε το $f_0$ σε $f_0' : W_0' \to \mathbb{R}$, οπότε το $(W_0', f_0')$ θα ήταν γνήσια μεγαλύτερο από το $(W_0, f_0)$, άτοπο.

Η $\tilde{f} = f_0 : X \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη επέκταση της $f$ στον $X$. $\square$

Στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα, το Θεώρημα Hahn-Banach διατυπώνεται συνήθως στην εξής μορφή:

**Θεώρημα 7.2.2** *(Banach) Έστω $X$ χώρος με νόρμα, $Y$ γραμμικός υπόχωρος του $X$, και $f : Y \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Δηλαδή,*

$$\|f\|_{Y^*} = \sup_{x\in Y, \|x\|=1} |f(x)| < +\infty.$$

*Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής επέκταση του $f$ στον $X$, με διατήρηση της νόρμας.)*

**Απόδειξη:** Έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|$ για κάθε $x \in Y$. Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}$ με $p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$. Το $p$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές:

(α) Για την υπογραμμικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_{Y^*}\|x+y\| \leq \|f\|_{Y^*}(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\|_{Y^*}\|x\| + \|f\|_{Y^*}\|y\| \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

(β) Το $p$ είναι θετικά ομογενές: αν $\lambda > 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \|f\|_{Y^*}\|\lambda x\| = \lambda\|f\|_{Y^*}\|x\| = \lambda p(x).$$

Από το Θεώρημα επέκτασης του Hahn, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ της $f$, τέτοια ώστε

(1) $$\tilde{f}(x) \leq p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|, \quad x \in X.$$

Παίρνοντας το $-x$ στη θέση του $x$ και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του $\tilde{f}$, βλέπουμε ότι

$$(2) \qquad -\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = \|f\|_{Y^*}\|-x\| = \|f\|_{Y^*}\|x\|, \quad x \in X.$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in X$,

$$|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|.$$

Άρα, $\tilde{f} \in X^*$, και $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αφού $\tilde{f}|_Y = f$, παίρνουμε

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x \in Y, \|x\|=1} |f(x)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Δηλαδή, $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. $\square$

Το Θεώρημα 7.2.2 μάς λέει ότι ο $X^*$ είναι «πλούσιος σε συναρτησοειδή». Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πολλές εφαρμογές αυτού του είδους. Δίνουμε εδώ ένα πρώτο παράδειγμα.

**Πρόταση 7.2.1** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $X$, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

**Απόδειξη:** Θέτουμε $Y = \text{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Ο $Y$ έχει διάσταση $m$ και τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ σχηματίζουν βάση του. Ορίζουμε $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ με

$$f_0\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i.$$

Τότε, $f_0(x_i) = a_i$, και το $f_0$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $Y$, αφού ο $Y$ έχει πεπερασμένη διάσταση (παρατηρήστε ότι το $f_0$ είναι καλά ορισμένο, αφού κάθε $x \in Y$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.)

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, το $f_0$ έχει φραγμένη γραμμική επέκταση $f \in X^*$. Προφανώς,

$$f(x_i) = f_0(x_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m. \quad \square$$

## 7.3 Εφαρμογές

(α) **Ο $X^*$ περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή,**

**Θεώρημα 7.3.1** *Έστω $X \neq \{0\}$ χώρος με νόρμα, και $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.*

**Απόδειξη:** Θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \mathrm{span}\{x_0\}$ που παράγεται από το $x_0$, και ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Το $f$ είναι γραμμικό, και

$$\|f\|_{Z^*} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Z^*} = 1$ και

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|. \quad \square$$

**Πόρισμα 7.3.1** *Αν $X \neq \{0\}$, τότε $X^* \neq \{0\}$.*

**Απόδειξη:** Αν $x_0 \neq 0$ και $\tilde{f}$ όπως στο Θεώρημα 7.3.1, τότε $\tilde{f} \neq 0$. $\square$

Ισχύει μάλιστα κάτι πολύ ισχυρότερο:

**Θεώρημα 7.3.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $x \in X$. Τότε,*

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

**Απόδειξη:** Από το Θεώρημα 7.3.1, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$, $\|\tilde{f}\| = 1$ με $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$(*) \qquad \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geq |\tilde{f}(x)| = \|x\|.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\| = 1$ τότε $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = \|x\|$. Άρα,

$$(**) \qquad \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$. Το sup είναι max λόγω του $\tilde{f}$. $\square$

**Σημείωση:** Γνωρίζουμε ήδη ότι $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ για κάθε $f \in X^*$ (αυτό ήταν συνέπεια του *ορισμού* της νόρμας τελεστή.) Το Θεώρημα Hahn-Banach, στη μορφή του Θεωρήματος 7.3.2, μάς δίνει τη δυϊκή σχέση $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$: η νόρμα του $x$ «πιάνεται» σαν τιμή κάποιου $f$ από τη μοναδιαία σφαίρα του δυϊκού χώρου.

**Πόρισμα 7.3.2** *Αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in X^*$, τότε $x = y$.*

**Απόδειξη:** $\|x - y\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x - y)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x) - f(y)| = 0$, άρα $x = y$. $\square$

**Σημείωση:** Λέμε ότι ο $X^*$ *διαχωρίζει* τα σημεία του $X$: αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$.

(β) **Ο δεύτερος δυϊκός ενός χώρου με νόρμα - Αυτοπαθείς χώροι**

Έστω $X$ χώρος με νόρμα. Έχουμε δεί ότι ο $X^*$ είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για τον $(X^*)^*$, το χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X^* \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |F(f)|.$$

Για ευκολία γράφουμε $X^{**} := (X^*)^*$. Ο $X^{**}$ είναι ο *δεύτερος δυϊκός* του $X$.

Κάθε $x \in X$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο ένα στοιχείο $\tau(x)$ του $X^{**}$ ως εξής: ορίζουμε $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$, με

$$[\tau(x)](f) = f(x), \quad f \in X^*.$$

**Λήμμα 7.3.1** *Το $\tau(x)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $X^{**}$.*

**Απόδειξη:** Ελέγχουμε πρώτα τη γραμμικότητα του $\tau(x)$: Αν $f, g \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [\tau(x)](\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda[\tau(x)](f) + \mu[\tau(x)](g). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$|[\tau(x)](f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| = \|x\| \, \|f\|, \quad f \in X^*.$$

Άρα, $\tau(x) \in X^{**}$ και $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$. □

**Λήμμα 7.3.2** *Η απεικόνιση $\tau : X \to X^{**}$ με $x \mapsto \tau(x)$ είναι γραμμική ισομετρία. Ειδικότερα, η $\tau$ είναι ένα προς ένα.*

**Απόδειξη:** (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} [\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](f) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 [\tau(x_1)](f) + \lambda_2 [\tau(x_2)](f) \\ &= [\lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)](f). \end{aligned}$$

Άρα, $\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)$, δηλαδή η $\tau$ είναι γραμμική.

(β) Έστω $x \in X$. Από το Θεώρημα 7.3.1, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|=1} |[\tau(x)](f)| \geq |[\tau(x)](\tilde{f})| = |\tilde{f}(x)| = \|x\|.$$

Δηλαδή, $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \geq \|x\|$. Στο προηγούμενο Λήμμα είδαμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Επομένως,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \|x\|,$$

και η $\tau$ είναι ισομετρία.

(γ) Προφανώς, $\tau(x) = 0 \Longrightarrow \|\tau(x)\|_{X^{**}} = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Επειδή η $\tau$ είναι γραμμική, αυτό δείχνει ότι η $\tau$ είναι ένα προς ένα. □

Άμεση συνέπεια των δύο λημμάτων είναι το εξής:

**Θεώρημα 7.3.3** *Κάθε χώρος $X$ με νόρμα εμφυτεύεται με φυσιολογικό τρόπο ισομετρικά στον $X^{**}$ μέσω της $\tau : X \to X^{**}$ που ορίζεται από την*

$$[\tau(x)](f) = f(x). \quad \square$$

**Παρατηρήσεις** (1) Ο $X$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο $\tau(x)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X^{**}$. Πράγματι, ο $X^{**}$ είναι πλήρης και ο $\tau(X)$ γραμμικός υπόχωρος του $X^{**}$. Ο $\tau(X)$ είναι κλειστός αν και μόνο αν είναι πλήρης, όμως ο $\tau(X)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $X$. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο $X$ είναι πλήρης.

(2) **Ορισμός** Η απεικόνιση $\tau$ λέγεται *κανονική εμφύτευση* του $X$ στον $X^{**}$. Ο $X$ λέγεται *αυτοπαθής* αν $\tau(X) = X^{**}$, δηλαδή αν η $\tau$ είναι επί. Τότε, ο $X$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $X^{**}$.

(3) Η ιδιότητα της αυτοπάθειας *δεν* είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ισομετρικού ισομορφισμού ανάμεσα στους $X$ και $X^{**}$. Αν ο $X$ είναι αυτοπαθής, τότε *είναι* ισομετρικά ισομορφικός με τον $X^{**}$, αλλά με πολύ ισχυρό τρόπο: η κανονική εμφύτευση $\tau$ είναι ισομετρία επί από τον $X$ στον $X^{**}$. Ο James (1951) έχει δώσει παράδειγμα χώρου που είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον δεύτερο δυϊκό του, χωρίς να είναι αυτοπαθής.

(4) Υπάρχουν πολλοί μη αυτοπαθείς χώροι. Πρώτα-πρώτα, ένας χώρος με νόρμα που δεν είναι πλήρης δεν μπορεί να είναι αυτοπαθής (γιατί;).

Ο $c_0$ δεν είναι αυτοπαθής, γιατί $c_0^* \simeq \ell_1$ και $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$. Αν ο $c_0$ ήταν αυτοπαθής, τότε οι $c_0$ και $\ell_\infty$ θα ήταν ισομετρικά ισομορφικοί. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού ο $c_0$ είναι διαχωρίσιμος ενώ ο $\ell_\infty$ όχι.

Ο $\ell_1$ δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, θα ήταν ισομετρικά ισομορφικός με τον $\ell_\infty^*$, δηλαδή ο $\ell_\infty^*$ θα ήταν διαχωρίσιμος. Όπως θα δούμε στην επόμενη υποπαράγραφο, αυτό θα σήμαινε ότι και ο $\ell_\infty$ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο.

**Πρόταση 7.3.1** *Ο $\ell_p$, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.*

**Απόδειξη:** Πρέπει να δείξουμε ότι $\tau(\ell_p) = (\ell_p^*)^*$. Θυμηθείτε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ υπάρχει $y(f) = (\eta_k) \in \ell_q$ τέτοιο ώστε $f(x) = \sum_k \xi_k \eta_k$ για κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_p$.

Η $S_p : \ell_p^* \to \ell_q$ με $S_p(f) = y(f)$ είναι ισομετρία επί. Αντίστοιχα ορίζεται η $S_q : \ell_q^* \to \ell_p$.

Έστω $F \in (\ell_p^*)^*$. Το $F \circ S_p^{-1} \in \ell_q^*$, άρα υπάρχει $x \in \ell_p$ τέτοιο ώστε

$$(F \circ S_p^{-1})((\eta_k)) = \sum_k \xi_k \eta_k, \quad y = (\eta_k) \in \ell_q.$$

Δείχνουμε ότι $\tau(x) = F$. Έστω $f \in \ell_p^*$. Υπάρχει $y = (\eta_k) \in \ell_q$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \sum_k \xi_k \eta_k,$$

δηλαδή, $y = S_p(f)$. Όμως τότε,

$$F(f) = F \circ S_p^{-1} \circ S_p(f) = F \circ S_p^{-1}((\eta_k)) = \sum_k \xi_k \eta_k = f(x) = [\tau(x)](f).$$

Άρα, $F = \tau(x)$. Το $F$ ήταν τυχόν, άρα $\tau(\ell_p) = \ell_p^{**}$. □

(γ) **Ο $X^*$ δίνει πληροφορίες για τον $X$.**

Στην 7.3(α) είδαμε ότι ο $X^*$ διαχωρίζει τα σημεία του $X$. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι ο $X^*$ *διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους*:

**Θεώρημα 7.3.4** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, $Y$ γνήσιος κλειστός υπόχωρος του $X$, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν*

$$\delta = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\},$$

*τότε υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1$, $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\tilde{f}(x_0) = \delta$.*

**Απόδειξη:** Θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \mathrm{span}\{Y, x_0\}$. Κάθε $x \in Z$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + \lambda x_0$, για κάποια $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = f(y + \lambda x_0) = \delta\lambda.$$

Τότε, $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $f(x_0) = \delta$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $f$ είναι φραγμένο στον $Z$, και $\|f\|_{Z^*} = 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το $f$ σε κάποιο $\tilde{f} \in X^*$ με τις ζητούμενες ιδιότητες (ελέγξτε το.)

*Το $f$ είναι φραγμένο:* Έστω $x = y_1 + \lambda x_0 \in Z$. Αν $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\lambda|\delta = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| \\ &\leq |\lambda| \left\| x_0 + \frac{1}{\lambda} y_1 \right\| \\ &= \|\lambda x_0 + y_1\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $|f(x)| = 0 \leq \|x\|$. Άρα, $f \in Z^*$ και $\|f\|_{Z^*} \leq 1$.

*Αντίστροφη ανισότητα για την* $\|f\|_{Z^*}$*:* Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $\|x_0 - y_n\| \to \delta$. Επίσης, έχουμε $\delta > 0$, γιατί ο $Y$ είναι κλειστός και $x_0 \notin Y$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $0 \neq x_0 - y_n \in Z$, άρα

$$\|f\|_{Z^*} \geq \frac{|f(x_0 - y_n)|}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{\delta}{\|x_0 - y_n\|} \to 1$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, $\|f\|_{Z^*} = 1$. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.3.4, δείχνουμε το εξής:

**Θεώρημα 7.3.5** *Αν ο $X^*$ είναι διαχωρίσιμος, τότε ο $X$ είναι διαχωρίσιμος.*

**Απόδειξη:** Θα μάς χρειαστεί ένα Λήμμα:

**Λήμμα 7.3.3** *Η $S_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμη ως προς την επαγόμενη μετρική.*

**Απόδειξη:** Υπάρχει $M$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $X^*$. Ορίζουμε

$$M_1 = \{g = f/\|f\| : f \in M \setminus \{0\}\}.$$

Το $M_1$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο της $S_{X^*}$, και θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στην $S_{X^*}$.

Έστω $f \in S_{X^*}$. Υπάρχει ακολουθία $\{h_k\}$ στο $M$ με $h_k \to f$. Άρα, $\|h_k\| \to \|f\| = 1$, δηλαδή, τελικά $h_k \neq 0$. Οι $l_k = h_k/\|h_k\|$ ανήκουν στο $M_1$, και

$$\begin{aligned}
\|f - l_k\| &= \left\| f - \frac{h_k}{\|h_k\|} \right\| \\
&= \left\| f - h_k + h_k \left(1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right) \right\| \\
&\leq \|f - h_k\| + \|h_k\| \left| 1 - \frac{1}{\|h_k\|} \right| \to 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M_1} = S_{X^*}$. □

**Απόδειξη του Θεωρήματος:** Θεωρούμε $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της $S_{X^*}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|g_n\| = \sup_{\|x\|=1} |g_n(x)| = 1$, άρα υπάρχει $x_n \in X$, $\|x\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Η ιδέα είναι ότι επειδή τα $g_n$ είναι πυκνά στην $S_{X^*}$, πρέπει και τα $x_n$ να είναι «πυκνά» στην $S_X$, οπότε $\overline{Y} = X$, το οποίο θα δείξει ότι ο $X$ είναι διαχωρίσιμος.

**Αυστηρή απόδειξη:** Έστω ότι $\overline{Y} \neq X$. Τότε, από το Θεώρημα 7.3.4, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $\tilde{f}(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{f} - g_n\| \geq |(\tilde{f} - g_n)(x_n)| = |\tilde{f}(x_n) - g_n(x_n)| = |g_n(x_n)| > 1/2,$$

άτοπο, γιατί το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στην $S_{X^*}$.

Άρα, $\overline{Y} = X$. Όμως, ο $\overline{Y}$ είναι διαχωρίσιμος: οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των $x_n$ με ρητούς συντελεστές είναι πυκνοί στον $\overline{Y}$ (άσκηση). Άρα, ο $X$ είναι διαχωρίσιμος. $\square$

## 7.4 Διαχωριστικά θεωρήματα

**Ορισμός** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $A, B$ μη κενά υποσύνολα του $X$.

(α) Λέμε ότι τα $A, B$ *διαχωρίζονται*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) \geq \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(β) Λέμε ότι τα $A, B$ *διαχωρίζονται γνήσια*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) > \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$.

Ο όρος δικαιολογείται από το γεγονός ότι το $\{x \in X : f(x) = \lambda\}$ είναι ένα κλειστό υπερεπίπεδο, το οποίο χωρίζει τον $X$ σε δύο ξένους «ημιχώρους» εκ των οποίων ο ένας περιέχει το $A$ και ο άλλος το $B$.

Τα διαχωριστικά θεωρήματα που θα συζητήσουμε αφορούν κυρτά σύνολα, και η απόδειξή τους βασίζεται πολύ ουσιαστικά στο Θεώρημα Hahn-Banach. Γι' αυτό και αναφερόμαστε σ' αυτά με τον όρο «γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach».

**Λήμμα 7.4.1** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $A \subseteq X$ ανοιχτό και κυρτό, με $0 \in A$. Ορίζουμε*

$$q_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

*Τότε, το $q_A$ είναι ένα μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε*

$$(*) \qquad q_A(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X$$

*και*

$$(**) \qquad A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}.$$

**Απόδειξη:** Η $q_A$ ορίζεται καλά: το $A$ είναι ανοιχτό και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(0, \delta) \subseteq A$. Έπεται ότι αν $0 \neq x \in X$, τότε $(\delta/2\|x\|)x \in A$, άρα

$\frac{2}{\delta}\|x\| \in \{t > 0 : x \in tA\}$ και το σύνολο αυτό είναι κάτω φραγμένο από το 0, άρα έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Επίσης,

$$q_A(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει με $M = 2/\delta$ (αν $x = 0$, τότε από την κυρτότητα του $A$ έπεται ότι $0 \in tA$ για κάθε $t > 0$ (γιατί;), άρα $q_A(0) = 0$.)

Δείχνουμε τώρα τις δύο ιδιότητες του υπογραμμικού συναρτησοειδούς: Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} q_A(x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0 : x \in (t/\lambda)A\} \\ &= \lambda \inf\{(t/\lambda) : t > 0,\ x \in (t/\lambda)A\} = \lambda \inf\{s > 0 : x \in sA\} \\ &= \lambda q_A(x). \end{aligned}$$

Για την υποπροσθετικότητα, έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $t, s > 0$ τέτοια ώστε $t < q_A(x) + \varepsilon$, $s < q_A(y) + \varepsilon$, και $x \in tA$, $y \in sA$. Από την κυρτότητα του $A$ έχουμε

$$tA + sA = (t + s)A$$

(γιατί;), άρα $x + y \in (t + s)A$. Έπεται ότι

$$q_A(x + y) \leq t + s < q_A(x) + q_A(y) + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$q_A(x + y) \leq q_A(x) + q_A(y).$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}$. Αν $q_A(x) < 1$, τότε υπάρχει $r$ τέτοιο ώστε $q_A(x) < r < 1$ και $x \in rA \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $x \in A$, επειδή το $A$ είναι ανοιχτό υπάρχει $t > 0$ τ.ω $x + tx \in A$ (άσκηση), οπότε $q_A(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$. □

**Θεώρημα 7.4.1** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $A$ μη κενό, ανοιχτό κυρτό υποσύνολο του $X$ που δεν περιέχει το 0. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ με την ιδιότητα $\tilde{f}(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή, το $\tilde{f}$ διαχωρίζει το $A$ από το $\{0\}$.*

**Απόδειξη:** Έστω $x_0 \in A$. Το $A' = x_0 - A$ είναι ανοιχτό, κυρτό και περιέχει το 0. Σύμφωνα με το Λήμμα υπάρχει θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές $q : A \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$q(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

και $q(x) < 1$ αν και μόνο αν $x \in A$. Ειδικότερα, $q(x_0) \geq 1$ (γιατί;).

Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \langle x_0 \rangle$ που παράγει το $x_0$, και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda q(x_0)$. Η $f$ φράσσεται από το $q$: αν $\lambda \geq 0$, τότε $f(\lambda x_0) = q(\lambda x_0)$, ενώ αν $\lambda < 0$, τότε $f(\lambda x_0) < 0 \leq q(\lambda x_0)$. Επίσης, $f \in W^*$ γιατί

$$|f(\lambda x_0)| = |\lambda| q(x_0) \leq M|\lambda|\, \|x_0\| = M\|\lambda x_0\|.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, η $f$ επεκτείνεται σε $\tilde{f} \in X^*$ με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{W^*}$. Τέλος, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x_0 - x \in A'$, άρα $q(x_0 - x) < 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\tilde{f}(x_0) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0 - x) \leq q(x_0 - x) < 1.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $q(x_0) \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall x \in A, \quad \tilde{f}(x) > \tilde{f}(x_0) - 1 = q(x_0) - 1 \geq 0. \quad \square$$

**Θεώρημα 7.4.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $A, B$ ξένα κυρτά σύνολα, με το $A$ ανοιχτό. Τότε, υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) < \lambda$ αν $a \in A$, και $f(b) \geq \lambda$ αν $b \in B$. Αν το $B$ είναι κι αυτό ανοιχτό, τότε τα $A, B$ διαχωρίζονται γνήσια.*

**Απόδειξη:** Θέτουμε $G = A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $G$ είναι κυρτό, και αφού $G = \bigcup_{b \in B}(A - b)$, το $G$ είναι ανοιχτό. Από την $A \cap B \neq \emptyset$ έπεται ότι $0 \notin G$. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in G$.

Έστω $a \in A$, $b \in B$. Τότε, $a - b \in G$ άρα $f(a - b) > 0$. Δηλαδή, $f(a) > f(b)$. Υπάρχει λοιπόν $\lambda \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \sup\{f(b) : b \in B\} \leq \lambda \leq \inf\{f(a) : a \in A\}.$$

Το $A$ έχει υποτεθεί ανοιχτό και κυρτό, άρα το $f(A)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ (άσκηση), άρα η $(*)$ δίνει

$$\forall a \in A, \quad f(a) > \lambda \quad , \quad \forall b \in B, \quad f(b) \leq \lambda.$$

Αν και το $B$ είναι ανοιχτό, τότε το $f(B)$ είναι επίσης ανοιχτό διάστημα, άρα $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$, δηλαδή τα $A, B$ διαχωρίζονται γνήσια. $\square$

Τέλος, δείχνουμε ένα διαχωριστικό θεώρημα για ξένα κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $X$, αν ένα από αυτά είναι συμπαγές. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

**Λήμμα 7.4.2** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, $K$ συμπαγές υποσύνολο του $X$, και $A$ ανοιχτό υποσύνολο του $X$ με $K \subseteq A$. Τότε, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε*

$$K + D(0, r) \subseteq A,$$

*όπου $K + D(0, r) = \{x + y : x \in K, \|y\| < r\} = \{x \in X : d(x, K) < r\}$.*

**Απόδειξη:** Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \in A$ και το $A$ είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r_x) = x + D(0, r_x) \subseteq A$.

Τότε,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} D(x, r_x/2),$$

και αφού το $K$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq D(x_1, r_{x_1}/2) \cup \cdots \cup D(x_m, r_{x_m}/2).$$

Θέτουμε $r = \min\{r_{x_1}/2, \ldots, r_{x_m}/2\}$. Τότε,

$$K + D(0,r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + D(0, r_{x_i})) \subseteq A. \quad \square$$

**Θεώρημα 7.4.3** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $A, B$ δύο ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $X$. Αν το $B$ είναι συμπαγές, τότε τα $A, B$ διαχωρίζονται γνήσια.*

**Απόδειξη:** Αφού τα $A, B$ είναι ξένα, το συμπαγές $B$ περιέχεται στο ανοιχτό $X \setminus A$, και από το Λήμμα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B + D(0,r) \subseteq X \setminus A$, απ' όπου παίρνουμε

$$(B + D(0, r/2)) \cap (A + D(0, r/2)) = \emptyset.$$

Τα $A + D(0, r/2)$, $B + D(0, r/2)$ είναι ανοιχτά και κυρτά: κυρτά γιατί τα $A, B$ και $D(0, r/2)$ είναι κυρτά, και ανοιχτά γιατί η $D(0, r/2)$ είναι ανοιχτό σύνολο. Από το Θεώρημα 7.4.2 διαχωρίζονται γνήσια, άρα το ίδιο ισχύει και για τα υποσύνολά τους $A, B$. $\square$

**Παρατήρηση:** Αν τα $A, B$ υποτεθούν απλώς κλειστά, τότε το Θεώρημα 7.4.3 παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τα $A = \{(x, y) : y \leq 0\}$ και $B = \{(x, y) : x > 0, xy \geq 1\}$. Τα $A, B$ είναι κλειστά, κυρτά και ξένα, αλλά δεν διαχωρίζονται γνήσια.

## 7.5 Ασκήσεις

**1.** Δείξτε ότι η απόλυτη τιμή γραμμικού συναρτησοειδούς είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

**2.** Δείξτε ότι κάθε νόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

**3.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $p : X \to \mathbb{R}$ υποπροσθετικό συναρτησοειδές (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι θετικά ομογενές.) Δείξτε ότι:

(α) Αν $p(0) = 0$ και το $p$ είναι συνεχές στο 0, τότε είναι συνεχές σε κάθε $x_0 \in X$.

(β) Αν $p(x) \geq 0$ έξω από μιά σφαίρα $\{x : \|x\| = r\}$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

**4.** Έστω $p$ ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον γραμμικό χώρο $X$. Ορίζουμε $Z = \langle x_0 \rangle$, και $f(x) = ap(x_0)$ αν $x = ax_0 \in Z$. Δείξτε ότι το $f$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x) \leq p(x)$, $x \in Z$.

**5.** Έστω $X$ γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

**6.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $(f_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με την ιδιότητα

$$\mathrm{liminf}_n f_n(x) \leq f(x) \leq \mathrm{limsup}_n f_n(x), \quad x \in X.$$

**7.** Δείξτε ότι αν ο $X$ έχει τουλάχιστον $n$ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και ο $X^*$ έχει τουλάχιστον $n$ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

**8.** Έστω $Y$ κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα $X$, τέτοιος ώστε: αν $f \in X^*$ και $f|_Y \equiv 0$, τότε $f \equiv 0$. Δείξτε ότι $Y = X$.

**9.** Έστω $Y$ υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα $X$. Ορίζουμε

$$A = \{f \in X^* : Y \subseteq \mathrm{Ker} f\}.$$

Δείξτε ότι $\overline{Y} = \bigcap \{\mathrm{Ker} f : f \in A\}$.

**10.** Έστω $X$ και $Y$ χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$M = \sup\{f(Tx) : \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1\} < +\infty.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, δείξτε ότι $\|T\| = M$.

**11.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $A$ μη κενό υποσύνολο του $X$. Δείξτε ότι: $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ αν και μόνο αν, για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$, ισχύει $f(x) = 0$.

**12.** Για κάθε υπόχωρο $Y$ του χώρου με νόρμα $X$, ορίζουμε

$$N(Y) = \{f \in X^* : \forall y \in Y, \ \ f(y) = 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X^*$.
(β) Δείξτε ότι αν $Y_1, Y_2$ είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του $X$ και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

**13.** Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(f) = f \circ T$. Δείξτε ότι ο $T^*$ ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$.

**14.** Έστω $X, Y$ δύο χώροι με νόρμα, και $X \neq \{0\}$. Δείξτε ότι αν ο $B(X, Y)$ είναι πλήρης, τότε ο $Y$ είναι πλήρης.

## Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, και $p(x) = |f(x)|$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$p(x+y) = |f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = p(x) + p(y).$$

Αν $x \in X$ και $\lambda \geq 0$, τότε

$$p(\lambda x) = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = \lambda |f(x)| = \lambda p(x).$$

Άρα, το $p$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

**2.** Έστω $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$. Όπως πρίν, ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \geq 0$, ισχύουν οι

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda \|x\|,$$

από τις γνωστές ιδιότητες της νόρμας.

**3.** (α) Το $p$ είναι συνεχές στο $0$ και $p(0) = 0$, άρα για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|z\| < \delta \Longrightarrow |p(z)| < \varepsilon.$$

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αν $\|x - x_0\| < \delta$, τότε και $\|x_0 - x\| = \|x - x_0\| < \delta$, οπότε

$$|p(x - x_0)| < \varepsilon, \quad |p(x_0 - x)| < \varepsilon.$$

Από την υποπροσθετικότητα του $p$,

$$p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0) \leq |p(x - x_0)| < \varepsilon$$

και

$$p(x_0) - p(x) \leq p(x_0 - x) \leq |p(x_0 - x)| < \varepsilon,$$

άρα $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$. Δηλαδή, το $p$ είναι συνεχές στο $x_0$.

(β) Έστω $r > 0$, και ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $x_0$ με $\|x_0\| = r$ ισχύει η $p(x_0) < 0$. Τότε,

$$p(2x_0) = p(x_0 + x_0) \leq p(x_0) + p(x_0) = 2p(x_0) < 0.$$

Όμως, $\|2x_0\| = 2r \neq r$, άρα $2x_0 \notin \{x : \|x\| = r\}$. Από την υπόθεσή μας, $p(2x_0) \geq 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $p(x) \geq 0$ και στην $\{x : \|x\| = r\}$.

Αν $r = 0$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \notin 0$. Όμως, $p(0) = p(0+0) \leq 2p(0)$ άρα $p(0) \geq 0$. Δηλαδή, $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

**4.** Το $f$ είναι προφανώς γραμμικό, γιατί αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = ax_0, y = bx_0 \in Z$, τότε

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda a + \mu b)x_0) = (\lambda a + \mu b)p(x_0) \\ &= \lambda(ap(x_0)) + \mu(bp(x_0)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Για την ανισότητα $f(x) \leq p(x)$ παρατηρούμε ότι: αν $a \geq 0$, τότε $f(ax_0) = ap(x_0) = p(ax_0)$, ενώ αν $a < 0$, τότε

$$f(ax_0) = -f((-a)x_0) = -p(-ax_0) \leq p(ax_0),$$

αφού κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές ικανοποιεί την $-p(-z) \leq p(z)$.

**5.** Παίρνουμε τυχόν $x_0 \neq 0$ στον $X$. Θεωρούμε τον $Z = \langle x_0 \rangle$, και ορίζουμε $g : Z \to \mathbb{R}$, με $g(ax_0) = ap(x_0)$. Από την Άσκηση 4, το $g$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $Z$, και ικανοποιεί την $g(z) \leq p(z)$ στον $Z$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, που επεκτείνει το $g$, και ικανοποιεί την

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Τέλος,

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) \Longrightarrow f(x) \geq -p(-x), \quad x \in X.$$

Δηλαδή, $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

**6.** Το $p(x) = \limsup f_n(x)$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον $X$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \limsup f_n(x+y) = \limsup[f_n(x) + f_n(y)] \\ &\leq \limsup f_n(x) + \limsup f_n(y) = p(x) + p(y), \end{aligned}$$

και αν $\lambda \geq 0$,

$$p(\lambda x) = \limsup f_n(\lambda x) = \limsup[\lambda f_n(x)] = \lambda \limsup f_n(x) = \lambda p(x).$$

Τώρα εφαρμόζουμε την Άσκηση 5: υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\liminf f_n(x) = -\limsup f_n(-x) \leq f(x) \leq \limsup f_n(x), \quad x \in X.$$

**7.** Έστω $x_1, \ldots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $X$. Ξέρουμε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$, υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Τα $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \ldots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j \leq n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \ldots + t_n f_n)(x_j) = t_1 f_1(x_j) + \ldots + t_n f_n(x_j) = t_j \cdot 1 = t_j.$$

Άρα, $t_1 = \ldots = t_n = 0$.

**8.** Έστω $x \in X \backslash Y$. Αφού ο $Y$ είναι κλειστός και $x \notin Y$, υπάρχει $f \in X^*$ που ικανοποιεί τα εξής:

$$f(y) = 0, \ \ y \in Y, \qquad \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach). Αυτό είναι άτοπο, γιατί η υπόθεση μας λέει ότι

$$f|_Y \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Άρα, $Y = X$.

**9.** Έστω $y \in \overline{Y}$. Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $y_n \to y$. Για κάθε $f \in A$ έχουμε $f(y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(y) = \lim f(y_n) = 0.$$

Δηλαδή, $y \in \mathrm{Ker} f$. Αφού το $f \in A$ ήταν τυχόν, $y \in \cap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\}$. Αφού το $y \in \overline{Y}$ ήταν τυχόν,

$$\overline{Y} \subseteq \bigcap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\}.$$

Έστω ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Τότε, υπάρχει $z \in \cap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\}\setminus\overline{Y}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$, $g(z) \neq 0$ και $g(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{Y}$. Τότε, $g \in A$ και $z \notin \mathrm{Ker} g$, το οποίο είναι άτοπο.

**10.** Το δεξιό μέλος ισούται με

$$M = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left( \sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} f(Tx) \right) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y,$$

από το θεώρημα Hahn-Banach (για το $Tx \in Y$). Όμως, ο $T$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < +\infty,$$

και τότε $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|$ (Κεφάλαιο 5).

**11.** Όμοια με την 8. Αν $Y = \overline{\mathrm{span}(A)}$, παρατηρήστε ότι

$$f|_A \equiv 0 \Longleftrightarrow f|_Y \equiv 0.$$

**12.** (α) Ο $N(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X^*$: αν $f, g \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$(\lambda f + \mu g)(y) = \lambda f(y) + \mu g(y) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0,$$

δηλαδή $\lambda f + \mu g \in N(Y)$.

Ο $N(Y)$ είναι κλειστός: αν $f_n \in N(Y)$ και $f_n \to f \in X^*$, τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

δηλαδή $f \in N(Y)$.

(β) Έστω $Y_1, Y_2$ κλειστοί υπόχωροι του $X$ με $Y_1 \neq Y_2$. Έχουμε δύο περιπτώσεις: είτε υπάρχει $y \in Y_1\setminus Y_2$ είτε υπάρχει $y \in Y_2\setminus Y_1$. Στην πρώτη περίπτωση, αφού ο $Y_2$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X$ και $y \notin Y_2$, μπορούμε να βρούμε $f \in X^*$ με τις ιδιότητες

$$f|_{Y_2} \equiv 0, \quad \|f\| = 1, \quad f(y) \neq 0.$$

Τότε, $f \in N(Y_2)\setminus N(Y_1)$, άρα $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

Εντελώς ανάλογα, αν υπάρχει $y \in Y_2\setminus Y_1$, βρίσκουμε $f \in N(Y_1)\setminus N(Y_2)$.

**13.** Η $f \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική σαν σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων, και για κάθε $x \in X$,

$$|[T^*(f)](x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

δηλαδή $T^*(f) \in X^*$ και $\|T^*(f)\| \leq \|T\| \cdot \|f\|$.

Αυτό δείχνει ότι ο $T^*$ ορίζεται καλά, και

$$(*) \qquad \|T^*\| \leq \|T\|.$$

[Η γραμμικότητα του $T^*$ ελέγχεται εύκολα:

$$T^*(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda(f \circ T) + \mu(g \circ T) = \lambda T^*(f) + \mu T^*(g).]$$

Για την ισότητα των $\|T\|$ και $\|T^*\|$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα Hahn-Banach: Έστω $x \in X$. Τότε, $Tx \in Y$ και υπάρχει $f \in Y^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$ και $f(y) = \|y\| = \|Tx\|$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= f(y) = (f \circ T)(x) = [T^*(f)](x) \\ &\leq \|T^*(f)\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα, $\|T\| \leq \|T^*\|$, και από την $(*)$ έπεται το ζητούμενο.

**14.** Σταθεροποιούμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$. Έστω $(y_n)$ ακολουθία Cauchy στον $Y$. Ορίζουμε $T_n : X \to Y$ με $T_n(x) = f(x)y_n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)(y_n - y_m)\|_Y = \left( \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| \right) \cdot \|y_n - y_m\| \\ &= \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\|, \end{aligned}$$

δηλαδή, η $(T_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$. Αφού ο $B(X,Y)$ έχει υποτεθεί πλήρης, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $T_n \to T$, δηλαδή

$$(*) \qquad T(x) = \lim_{n \to \infty} (f(x)y_n), \quad x \in X.$$

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = 1$. Τότε, αν ορίσουμε $y = T(x)$, έχουμε $y_n \to y$ από την $(*)$.

# Κεφάλαιο 8

# Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε τρία βασικά θεωρήματα για τελεστές σε χώρους Banach: το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης και το θεώρημα κλειστού γραφήματος. Στην απόδειξή τους χρησιμοποιείται ουσιαστικά το θεώρημα του Baire: είναι δηλαδή αποτελέσματα που αφορούν *πλήρεις* χώρους με νόρμα.

## 8.1 Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος

Στην Παράγραφο 2.4 είδαμε το θεώρημα του Osgood: αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την ιδιότητα η $\{f_n(t)\}$ να είναι φραγμένη για κάθε $t \in [0,1]$, τότε υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$ στο οποίο η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Η απόδειξη βασίστηκε στο θεώρημα του Baire.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία τελεστών $T_n \in B(X,Y)$ που έχουν την ιδιότητα η $\{T_n(x)\}$ να είναι φραγμένη στον $Y$ για κάθε $x \in X$. Αν ο $X$ είναι πλήρης, η γραμμικότητα των $T_n$ και η απλή ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος του Osgood μας δίνουν ότι οι νόρμες $\|T_n\|$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες:

**Θεώρημα 8.1.1** *Έστω $X$ χώρος Banach, $Y$ χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\|T_n x\|_Y \leq M_x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*(δηλαδή, η $\{T_n x\}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον $Y$). Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\|T_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*(δηλαδή, η $\{\|T_n\|\}$ είναι φραγμένη).*

**Απόδειξη:** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_k = \{x \in X : \sup_n \|T_n x\| \leq k\}.$$

(α) Κάθε $A_k$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$: έστω $x_j \in A_k$ με $x_j \to x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T_n x_j\| \leq k$ για κάθε $j$, άρα και

$$\|T_n x\| = \lim_{j\to\infty} \|T_n x_j\| \leq k.$$

Αφού αυτό ισχύει για τυχόν $n$, έχουμε $x \in A_k$.

(β) Η υπόθεσή μας εξασφαλίζει ότι

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Πράγματι, αν $x \in X$, υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε $\sup_n \|T_n x\| \leq M_x$, και αν πάρουμε $k_x > M_x$, $k_x \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $x \in A_{k_x} \subseteq \bigcup_k A_k$.

(γ) Ο $X$ είναι πλήρης και τα $A_k$ κλειστά. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A_{k_0}$ να έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$D(x_0, r) \subseteq A_{k_0}.$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$. Τότε,

$$x_0 \ , \ x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x \in D(x_0, r) \subseteq A_{k_0},$$

άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n x_0\| \leq k_0 \ \text{ και } \ \left\|T_n \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x\right)\right\| \leq k_0.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \left\|T_n \left(\frac{r}{2\|x\|}x\right)\right\| &= \left\|T_n \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x\right) + T_n(-x_0)\right\| \\ &\leq \left\|T_n \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x\right)\right\| + \|T_n(x_0)\| \\ &\leq 2k_0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη γραμμικότητα του $T$ και το γεγονός ότι η νόρμα είναι θετικά ομογενής, παίρνουμε

$$\|T_n x\| \leq \frac{4k_0}{r}\|x\|.$$

Έπεται ότι $\|T_n\| \leq \frac{4k_0}{r}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ας δούμε τώρα μερικές ενδεικτικές εφαρμογές του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος:

**Πρόταση 8.1.1** *Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $\{x_n\}$ ακολουθία στον $X$. Η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$ η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.*

**Απόδειξη:** ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \, \|x_n\| \leq M\|f\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε τους $T_n = \tau(x_n) : X^* \to \mathbb{R}$ με $T_n f = [\tau(x_n)](f) = f(x_n)$. Από την υπόθεσή μας, η $\{T_n f\}$ είναι φραγμένη για κάθε $f \in X^*$. Ο $X^*$ είναι χώρος Banach, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος έχουμε

$$\sup_n \|x_n\|_X = \sup_n \|[\tau(x_n)]\|_{X^{**}} = \sup_n \|T_n\| < +\infty.$$

Δηλαδή, η $\{\|x_n\|\}$ είναι φραγμένη. $\square$

Ανάλογο παράδειγμα σε συγκεκριμένο χώρο:

**Πρόταση 8.1.2** *Έστω $y = (\eta_k)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (\xi_k) \in c_0$, η σειρά $\sum_k \xi_k \eta_k$ συγκλίνει. Τότε, $y \in \ell_1$. Δηλαδή,*

$$\sum_k |\eta_k| < +\infty.$$

**Απόδειξη:** Ορίζουμε $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$, με $T_n((\xi_k)) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$. Κάθε $T_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές:

$$\begin{aligned} |T_n x| &= |\sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \, |\eta_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|\right) \sup_k |\xi_k| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|\right) \|x\|_{c_0}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^n |\eta_k|.$$

Ισχύει μάλιστα ισότητα: αν ορίσουμε

$$\xi_k = \begin{cases} 0 & , k > n, \\ \mathrm{sign}(\eta_k) & , k \leq n, \end{cases}$$

έχουμε $x' = (\xi_k) \in c_0$, και $\|x'\| \leq 1$. Όμως,

$$T_n(x') = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sign}(\eta_k)\eta_k = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|.$$

Αφού $\|x'\| \leq 1$,

$$\|T_n\| \geq |T_n(x')| = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|.$$

Από την υπόθεσή μας, αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε το $\sum_k \xi_k\eta_k = \lim_n \sum_{k=1}^n \xi_k\eta_k = \lim_n T_n x$ υπάρχει. Άρα, η $\{T_n x\}$ είναι φραγμένη. Από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος (ο $c_0$ είναι πλήρης), παίρνουμε $\sup_n \|T_n\| < +\infty$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| < +\infty.$$

Άρα, $y = (\eta_k) \in \ell_1$. □

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος χρησιμοποιείται συχνά για την «κατασκευή» αντιπαραδειγμάτων στην Ανάλυση. Ο τρόπος είναι ο εξής: Αν $T_n : X \to Y$ με $\sup_n \|T_n\| = +\infty$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\sup_n \|T_n(x)\|_Y = +\infty$.

**Παράδειγμα** (αποκλίνουσες σειρές Fourier). Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η *σειρά Fourier* της $f$ είναι η

$$(*) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt),$$

όπου οι συντελεστές $a_m, b_m$ δίνονται από τις

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)dt \quad , \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt.$$

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι αν για κάθε συνεχή $f$ και κάθε $t \in [-\pi, \pi]$ η σειρά $(*)$ συγκλίνει (στο $f(t)$). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, θα δούμε ότι η απάντηση είναι αρνητική:

**Πρόταση 8.1.3** *Υπάρχει συνεχής $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο σημείο $t_0 = 0$.*

**Απόδειξη:** Θεωρούμε τον $C[-\pi, \pi]$ με νόρμα την $\|f\| = \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$. Ο $(C[-\pi, \pi], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Ορίζουμε $T_n : C[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, με

$$T_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m,$$

την τιμή δηλαδή του $n$-στού μερικού αθροίσματος της $(*)$ στο $t_0 = 0$. Αλλιώς, μπορούμε να γράφουμε (γιατί;)

$$T_n f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mt\right]\, dt.$$

Απλή τριγωνομετρία δείχνει ότι

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mt = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Δηλαδή,

$$T_n f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) q_n(t) dt, \quad q_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Έχουμε

$$|T_n f| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,|q_n(t)|dt \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q_n(t)|dt\right)\|f\|,$$

άρα ο $T_n$ είναι φραγμένος, και

$$\|T_n\| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q_n(t)|dt.$$

Επιπλέον, αν $f$ συνεχής με $\|f\| = 1$ που «προσεγγίζει» την $\mathrm{sign}(q_n)$, τότε

$$T_n f \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sign}(q_n) q_n(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q_n(t)|dt.$$

Δηλαδή,

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q_n(t)|dt.$$

Όμως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|q_n(t)| = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{|\sin\frac{t}{2}|}dt \ge \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt,$$

γιατί $|\sin\frac{t}{2}| \le \frac{|t|}{2}$ στο $[-\pi,\pi]$, και θέτοντας $v = (n+\frac{1}{2})t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|T\| &\ge \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv \\
&\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \to \infty
\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, $\sup_n \|T_n\| = \infty$. Άρα, υπάρχει $f \in C[-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε η $(T_n f)$ να μην είναι φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά Fourier της $f$ αποκλίνει στο $t_0 = 0$. □

Δίνουμε τώρα μια εφαρμογή του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος, στην αριθμητική ολοκλήρωση: Θεωρούμε ένα διάστημα $J = [a, b]$ και το χώρο $C[a, b]$ με τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Μια *μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης στο* $J$ είναι μια επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_m$ και σημείων $t_1 < \cdots < t_m$ στο $J$.

Αν τα $t_i, a_i$ έχουν δοθεί, τότε για κάθε $f \in C[J]$ εκτιμάμε το $\int_a^b f(t)dt$ μέσω του αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f(t_i).$$

Αν τα $t_i, a_i$ έχουν επιλεγεί «σωστά», περιμένουμε αυτό το άθροισμα να «προσεγγίζει» καλά το ολοκλήρωμα της $f$. Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς ότι, όπως και να επιλέξουμε τα $t_i, a_i$, μπορούμε να κατασκευάσουμε $f \in C[J]$ για την οποία το σφάλμα να είναι μεγάλο: πάρτε π.χ. την $f$ να μηδενίζεται σε όλα τα $t_i$ και να έχει πολύ μεγάλη τιμή σε κάποιο άλλο $t \in J$.

Ορίζουμε μια πιό συγκροτημένη *διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* στο $J$ ως εξής: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad , \ldots, \quad f_n(t) = t^n,$$

και επιλέγουμε $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \in J$ και $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f_j(t_i^{(n)}) = \int_a^b f_j(t)dt, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Τέτοιες επιλογές υπάρχουν πολλές: πάρτε, ας πούμε, τυχόντα $t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \in J$. Τότε, το σύστημα $(*)$ με αγνώστους τους $a_i^{(n)}$ παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} (t_i^{(n)})^j = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση ως προς $a_i^{(n)}$ γιατί η ορίζουσα

$$\det \left[ (t_i^{(n)})^j \right]_{i,j=1}^{n}$$

είναι μη μηδενική (ορίζουσα Vandermonde). Αφού λοιπόν επιλέξουμε τα $t_i^{(n)}$, προσδιορίζουμε μονοσήμαντα τα $a_i^{(n)}$ έτσι ώστε

$$T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}(f_j) := \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f_j(t_i^{(n)}) = \int_a^b f_j(t)dt, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Λόγω γραμμικότητας του αριστερού και του δεξιού μέλους ως προς $f$, έπεται ότι

$$T_{t_i^{(n)},a_i^{(n)}}(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} p(t_i^{(n)}) = \int_a^b p(t)dt$$

για κάθε πολυώνυμο $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ που έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του $n$.

Θέτουμε $T_n := T_{t_i^{(n)},a_i^{(n)}}$, και λέμε ότι η $(T_n)$ είναι μια *διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* στο $J$: Για κάθε $f \in C[J]$ ορίζουμε

$$T_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

και ξέρουμε ότι κάθε $T_n$ είναι *ακριβής* στα πολυώνυμα βαθμού $\leq n$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν για κάθε συνεχή $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$(**) \qquad T_n(f) \to \int_a^b f(t)dt,$$

όταν $n \to \infty$. Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα του Polya:

**Πρόταση 8.1.4** *Μια διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* $(T_n) = (T_{a_i^{(n)},t_i^{(n)}})$ *όπως παραπάνω, ικανοποιεί την* $(**)$ *για κάθε* $f \in C[a,b]$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιος ώστε, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \leq M.$$

**Απόδειξη:** Κάθε $T_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= |\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)})| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \, |f(t_i^{(n)})| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|\right) \|f\|, \end{aligned}$$

δηλαδή το $T_n$ είναι φραγμένο, και $\|T_n\| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|$.

Επιπλέον ισχύει ισότητα γιατί μπορούμε να ορίσουμε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή με $|f(t)| \leq 1$ στο $[a,b]$ και

$$f(t_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 & , a_i^{(n)} > 0, \\ -1 & , a_i^{(n)} < 0, \end{cases}$$

οπότε

$$\|T_n\| \geq |T_n(f)| = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} \mathrm{sign}(a_i^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|.$$

Η απόδειξη της ($\Leftarrow$) της Πρότασης θα μας δώσει την ιδέα για το τι συμβαίνει. Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\|T_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Οι βασικές παρατηρήσεις είναι δύο:

(α) Από την κατασκευή, αν $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο (βαθμού ας πούμε $m$), τότε για κάθε $n \geq m$, $T_n(p) = \int_a^b p$. Άρα, $T_n(p) \to \int_a^b p$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε πολυώνυμο.

(β) Τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $C[a,b]$ (θεώρημα Weierstrass). Αν λοιπόν μας δώσουν $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο $p$ με την ιδιότητα

$$\|f - p\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \left| T_n f - \int_a^b f \right| &\leq |T_n f - T_n p| + \left| T_n p - \int_a^b p \right| + \left| \int_a^b p - \int_a^b f \right| \\ &\leq \|T_n\| \, \|f - p\| + \left| T_n p - \int_a^b p \right| + (b-a)\|p - f\| \\ &< M\varepsilon + \left| T_n p - \int_a^b p \right| + (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού $T_n p \to \int_a^b p$, για $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε

$$\left| T_n f - \int_a^b f \right| < (M + 1 + b - a)\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $T_n f \to \int_a^b f$.

Η απόδειξη της ($\Rightarrow$) είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος: Αν $T_n f \to \int_a^b f$ για κάθε $f \in C[a,b]$, τότε η $\{T_n f\}$ είναι φραγμένη για κάθε $f$. Επομένως, $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

Όμως, $\|T_n\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sup_n \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| = M < +\infty. \quad \square$$

## 8.2 Το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης

**Ορισμός** Έστω $X$ και $Y$ μετρικοί χώροι, και $T : X \to Y$ συνάρτηση. Η $T$ λέγεται *ανοιχτή απεικόνιση* αν για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό, το $T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $Y$.

Αν $T : X \to Y$ συνεχής, η $T$ δεν είναι απαραίτητα ανοιχτή: για παράδειγμα, η $T : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sin x$ είναι συνεχής, αλλά $T((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.

**Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης** *Έστω $X$ και $Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος <u>και επί</u> γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T$ είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Βασικό ρόλο στην απόδειξη θα παίξει το εξής:

**Λήμμα 8.2.1** *Αν $X, Y$ χώροι Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε το $T(D_X(0,1))$ περιέχει ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον $Y$.*

**Απόδειξη: Βήμα 1** Θεωρούμε την ανοιχτή μπάλα $D_X(0,1/2)$ του $X$. Αφού

$$kD_X(0,1/2) = D_X(0,k/2) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

ισχύει

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kD_X(0,1/2).$$

Αφού ο $T$ είναι γραμμικός και επί, παίρνουμε

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(D_X(0,1/2)).$$

Άρα,

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(D_X(0,1/2))} = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{T(D_X(0,1/2))}.$$

Ο $Y$ είναι πλήρης, και κάθε $k\overline{T(D_X(0,1/2))}$ κλειστό. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει $k_0$ τέτοιος ώστε το $k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$ να περιέχει μια μπάλα $D_Y(y_0,\delta)$ στον $Y$. Δηλαδή,

$$y_0 + D_Y(0,\delta) \subseteq k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}. \tag{1}$$

**Βήμα 2** Έστω $y \in D_Y(0,\delta)$. Τότε, $y_0 + y \in k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$, άρα υπάρχει ακολουθία $x_n \in D_X(0,1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x_n) \to y_0 + y.$$

Επίσης, $y_0 \in k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$ (γιατί;), άρα υπάρχει ακολουθία $x'_n \in D_X(0,1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x'_n) \to y_0.$$

Τότε, $x_n - x'_n \in D_X(0,1)$, και

$$k_0T(x_n - x'_n) = k_0T(x_n) - k_0T(x'_n) \to y.$$

Δηλαδή,

$$y \in k_0\overline{T(D_X(0,1))}.$$

Άρα,

$$\overline{T(D_X(0,1))} \supseteq D_Y(0,\delta/k_0) = D_Y(0,\delta') \tag{2}$$

στον $Y$, όπου $\delta' = \delta/k_0$.

**Βήμα 3** Είδαμε ότι η κλειστή θήκη της $T(D_X(0,1))$ περιέχει μια ανοιχτή μπάλα $D_Y(0,\delta')$ στον $Y$. Μένει να δούμε ότι το ίδιο το $T(D_X(0,1))$ έχει την ίδια ιδιότητα.

Θεωρούμε την $D_Y(0,\delta'/2)$. Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \delta'/2$. Τότε,

$$y \in \frac{1}{2}\overline{T(D_X(0,\delta'/2))} = \overline{T(D_X(0,1/2))},$$

άρα υπάρχει $x_1 \in D_X(0,1/2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta'}{2^2}.$$

Τότε, $y - Tx_1 \in \frac{1}{2^2}\overline{T(D_X(0,1))} = \overline{T(D_X(0,1/2^2))}$, άρα υπάρχει $x_2 \in D_X(0,1/2^2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta'}{2^3}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in D_X(0,1/2^n)$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta'}{2^{n+1}}.$$

Η ακολουθία $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι Cauchy στον $X$: αν $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\| &= \|x_m + \cdots + x_{n+1}\| \leq \|x_m\| + \cdots + \|x_{n+1}\| \\ &< \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ο $X$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $z_n \to x$. Παρατηρούμε ότι

$$\|z_n\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| < \|x_1\| + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \|x_1\| + \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| \leq \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Δηλαδή, $x \in D_X(0,1)$. Από την $(*)$, $T(z_n) = T(x_1) + \cdots + T(x_n) \to y$. Όμως $z_n \to x$ και ο $T$ είναι συνεχής, άρα $T(z_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $T(x) = y$, κι αυτό σημαίνει ότι $y \in T(D_X(0,1))$.

Το $y \in D_Y(0,\delta'/2)$ ήταν τυχόν, άρα

$$T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta'/2). \quad \square$$

**Απόδειξη του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης:** Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $T(A)$ είναι ανοιχτό: έστω $y \in T(A)$. Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $Tx = y$. Το $A$ είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D_X(x,r) \subseteq A$.

Από το Λήμμα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$. Τότε,

$$T(D_X(0,r)) = T(rD_X(0,1)) = rT(D_X(0,1)) \supseteq rD_Y(0,\delta) = D_Y(0,\delta r).$$

Αν $y' \in D_Y(y, \delta r)$, τότε $y' - y \in D_Y(0, \delta r)$, άρα υπάρχει $z \in D_X(0, r)$ τέτοιο ώστε $T(z) = y' - y$. Έπεται ότι $x + z \in D_X(x, r)$, και $T(x + z) = y'$. Δηλαδή,

$$T(A) \supseteq T(D_X(x, r)) \supseteq D_Y(y, \delta r).$$

Το $y \in T(A)$ ήταν τυχόν, άρα το $T(A)$ είναι ανοιχτό. □

**Πόρισμα 8.2.1** *(Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης) Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

**Απόδειξη:** Ο $T^{-1}$ ορίζεται καλά και είναι γραμμικός τελεστής (γιατί;). Αφού ο $T$ είναι ανοιχτή απεικόνιση, για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό έχουμε ότι το $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $Y$. Άρα, ο $T^{-1}$ είναι συνεχής. □

## 8.3 Το θεώρημα κλειστού γραφήματος

Το τελευταίο βασικό θεώρημα αυτού του Κεφαλαίου είναι το θεώρημα κλειστού γραφήματος, το οποίο μας δίνει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος.

**Ορισμός** Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το *γράφημα* του $T$ είναι το σύνολο

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y.$$

Ο $T$ έχει *κλειστό γράφημα* αν ισχύει το εξής:

> *Αν $x_n \to x$ στον $X$, $y_n \to y$ στον $Y$, και $y_n = T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $y = T(x)$.*

Ισοδύναμα, αν το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, με νόρμα π.χ. την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (άσκηση).

**Θεώρημα κλειστού γραφήματος** *Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα $\Gamma(T)$ του $T$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, τότε ο $T$ είναι φραγμένος.*

**Απόδειξη:** Θεωρούμε τον $X \times Y$ με νόρμα την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ο $X \times Y$ είναι πλήρης: αν $z_n = (x_n, y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X \times Y$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\varepsilon > \|z_n - z_m\| = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y.$$

Τότε όμως, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ και $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, δηλαδή οι $(x_n)$, $(y_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy στους $X, Y$ αντίστοιχα. Οι $X, Y$ είναι πλήρεις, άρα υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Όμως τότε, αν $z = (x, y)$, έχουμε

$$\|z - z_n\| = \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

Άρα, $z_n \to z$.

Από την υπόθεσή μας, το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, και εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times Y$. Αφού ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach, το $\Gamma(T)$ είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $P : \Gamma(T) \to X$ με $P(x, Tx) = x$. Ο $P$ είναι γραμμικός τελεστής, και

$$P(x, Tx) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow (x, Tx) = (0, 0),$$

άρα ο $P$ είναι ένα προς ένα. Προφανώς, ο $P$ είναι επί. Τέλος, ο $P$ είναι φραγμένος:

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y}.$$

Δηλαδή, $\|P\| \leq 1$.

Από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης, ο $P^{-1} : X \to \Gamma(T)$ με $P^{-1}(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y} = \|P^{-1}(x)\|_{X \times Y} \leq M\|x\|_X.$$

Επομένως, ο $T$ είναι φραγμένος. $\square$

## 8.4 Ασκήσεις

**1.** Έστω $X$ χώρος Banach, $Y$ χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Δείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.

Αν επιπλέον ο $Y$ είναι πλήρης, δείξτε ότι υπάρχει $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$.

**2.** Δείξτε ότι η πληρότητα του $X$ είναι απαραίτητη στο θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: πάρτε τον $c_{00}$ σαν υπόχωρο του $\ell_\infty$, και ορίστε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $T_n(x) = n\xi_n$.

**3.** Αν $X$ χώρος με νόρμα, και $x_n \to x$ στον $X$, τότε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;

**4.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα, και $(x_k)$ ακολουθία στον $X$ τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

**5.** Έστω $X$ χώρος Banach, $(f_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $X^*$, και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \to 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

**6.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T_n \in B(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

(β) Για κάθε $x \in X$, $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

(γ) Για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$.

**7.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.

**8.** Έστω $X$ γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι

$$\|x_n\|_1 \to 0 \Longrightarrow \|x_n\|_2 \to 0.$$

Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

**9.** Θεωρούμε τον $c_{00}$ σαν υπόχωρο του $\ell_\infty$, και ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ με $Tx = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots)$. Δείξτε ότι ο $T$ είναι γραμμικός, φραγμένος, ένα προς ένα και επί. Είναι ο $T^{-1}$ φραγμένος; Εξηγήστε.

**10.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

**11.** Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, $T_1 : X \to Y$ τελεστής με κλειστό γράφημα, και $T_2 : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Δείξτε ότι ο $T_1 + T_2$ έχει κλειστό γράφημα.

**12.** Έστω $X, Y$ χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με κλειστό γράφημα. Δείξτε ότι:

(α) Αν $C \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(C)$ είναι κλειστό στον $Y$.

(β) Αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $T^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον $X$.

**13.** Δείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης χρησιμοποιώντας το θεώρημα κλειστού γραφήματος.

**14.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $f \in Y^*$, τότε $f(Tx_n) \to 0$. Δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος.

**15.** Έστω $X$ χώρος Banach, και $x_n \to x$ στον $X$. Έστω $(f_n)$ ακολουθία στον $X^*$, τέτοια ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

**16.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο $T^{-1} : R(T) \to X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $R(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $Y$.

**17.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο $T$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.

**18.** Θεωρούμε τον $C[0,1]$ και τον υπόχωρό του $C^1[0,1]$ που αποτελείται από όλες τις $f$ που έχουν συνεχή παράγωγο $f'$ στο $[0,1]$. Ορίζουμε $C^1[0,1] : X \to C[0,1]$ με $Tf = f'$.

(α) Δείξτε ότι ο $T$ έχει κλειστό γράφημα.

(β) Ο $T$ δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;

## Υποδείξεις - απαντήσεις

**1.** Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη, άρα η υπόθεση μας δίνει το εξής: για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη. Αφού ο $X$ είναι χώρος Banach, από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο $Y$ είναι πλήρης, έχουμε: για κάθε $x \in X$ η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει το $\lim_n T_n x \in Y$. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο $T$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής: για κάθε $x, y \in X$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε $T_n x \to Tx$ και $T_n y \to Ty$, άρα

$$T_n(ax + by) = aT_n x + bT_n y \to aTx + bTy.$$

Όμως, από τον ορισμό του $T$ έχουμε $T_n(ax + by) \to T(ax + by)$. Άρα,

$$T(ax + by) = aTx + bTy,$$

δηλαδή, ο $T$ είναι γραμμικός. Για να δείξουμε ότι ο $T$ είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι, από το πρώτο μέρος, έχουμε $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Αφού $T_n x \to Tx$, βλέπουμε ότι

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq M\|x\|, \quad x \in X$$

δηλαδή ο $T$ είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq M$.

**2.** Θεωρούμε τον $c_{00}$ με νόρμα την $\|x\| = \sup_k |\xi_k|$. Ορίζουμε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$, με $T_n(x) = n\xi_n$. Κάθε $T_n$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$|T_n x| = n|\xi_n| \leq n\|x\|,$$

άρα, κάθε $T_n$ είναι φραγμένο και $\|T_n\| \leq n$. Έχουμε $T_n(e_n) = n$, άρα $\|T_n\| = n$ (γιατί;). Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $(\|T_n\|)$ δεν είναι φραγμένη.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ τέτοιος ώστε $T_n(x) = n\xi_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη για κάθε $x \in c_{00}$.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος δεν εφαρμόζεται εδώ, γιατί ο $c_{00}$ δεν είναι πλήρης.

**3.** Αν $x_n \to x$, τότε για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, για παράδειγμα, στον $\ell_2$ πάρουμε $x_n = e_n$ τα διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης, έχουμε

$$f(e_n) \to 0 = f(0)$$

για κάθε $f \in \ell_2^*$ (Άσκηση 17, Κεφάλαιο 6). Όμως, $\|e_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα δεν ισχύει ότι $e_n \to 0$.

**4.** Ορίζουμε $T_n : X^* \to \ell_1$, με

$$T_n(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n), 0, 0, \ldots).$$

Κάθε $T_n$ είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T_n(f)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \|f\| \cdot \|x_k\| = \left( \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \right) \cdot \|f\|.$$

Άρα, ο $T_n$ είναι φραγμένος, και $\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$. Η υπόθεση ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$, μας λέει ότι η ακολουθία $(T_n(f))$ είναι φραγμένη στον $\ell_1$ για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;). Ο $X^*$ είναι χώρος Banach, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(f)\| \leq M\|f\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;).

**5.** Θεωρούμε την ακολουθία $(g_n) = (\frac{1}{\varepsilon_n} f_n)$ στον $X^*$. Από την υπόθεση,

$$|g_n(x)| \leq K_x, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή, η $(g_n)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Αφού ο $X$ είναι χώρος Banach, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|g_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|f_n\| \leq M\varepsilon_n \to 0,$$

άρα, $\|f_n\| \to 0$.

**6.** Από το (α) στο (β): αν $x \in X$, τότε

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\|,$$

άρα

$$\sup_n \|T_n x\| \leq (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\| < +\infty.$$

Από το (β) στο (γ): όπως πρίν, για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, έχουμε

$$\sup_n |g(T_n x)| \leq \sup_n (\|g\| \cdot \|T_n x\|) = \|g\| \cdot \sup_n \|T_n x\| < +\infty.$$

Από το (γ) στο (β): Για κάθε $g \in Y^*$, η ακολουθία $(g(T_n x))$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Στη θεωρία είδαμε ότι αυτό μας δίνει ότι η $(T_n x)$ είναι φραγμένη στον $Y$.
Από το (β) στο (α): αυτό είναι ακριβώς το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος.

**7.** Ο $T$ είναι ανοικτή απεικόνιση. Ειδικότερα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$ (θυμηθείτε το βασικό λήμμα στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης).

Έστω $0 \neq y \in Y$. Τότε, $\delta y/2\|y\| \in D_Y(0,\delta)$, άρα υπάρχει $z \in X$ με $\|z\| < 1$ και $Tz = \delta y/2\|y\|$. Θέτουμε $x = 2\|y\|z/\delta$. Από τη γραμμικότητα του $T$,

$$T(x) = T\left(\frac{2\|y\|z}{\delta}\right) = \frac{2\|y\|}{\delta}\frac{\delta y}{2\|y\|} = y,$$

και

$$\|x\| = \frac{2\|y\| \cdot \|z\|}{\delta} \leq \frac{2}{\delta}\|y\|,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο, με $M = 2/\delta$.

**8.** Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2).$$

Ο $I$ είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και η υπόθεση μας δίνει ότι ο $I$ είναι συνεχής στο 0, άρα φραγμένος τελεστής (γιατί;). Αφού ο $X$ είναι πλήρης ως προς τις δύο νόρμες, το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μας λέει ότι ο $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης φραγμένος.

Υπάρχουν λοιπόν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leq a\|x\|_1, \quad \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

Οι δύο ανισότητες δείχνουν ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

**9.** Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $T$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ο $T^{-1} : Y \to X$ ορίζεται από την

$$T^{-1}(y) = (\eta_1, 2\eta_2, 3\eta_3, \ldots).$$

Έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_k \frac{|\xi_k|}{k} \leq \sup_k |\xi_k| = \|x\|,$$

άρα ο $T$ είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq 1$ (ισχύει ισότητα - γιατί;). Όμως, για κάθε $n$ έχουμε

$$\frac{\|T^{-1}(e_n)\|}{\|e_n\|} = \frac{\|ne_n\|}{\|e_n\|} = n,$$

άρα ο $T^{-1}$ δεν είναι φραγμένος. Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δεν εφαρμόζεται, γιατί ο $c_{00}$ δεν είναι πλήρης.

**10.** Ο $T$ είναι φραγμένος, άρα παίρνοντας $b = \|T\|$ έχουμε

$$\|Tx\| \leq b\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφού ο $T$ είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και αφού οι $X, Y$ είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο $T^{-1}$ είναι φραγμένος. Αν $x \in X$, τότε $x = T^{-1}(Tx)$ άρα

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$

δηλαδή ισχύει και η αριστερή ανισότητα, με $a = 1/\|T^{-1}\|$.

**11.** Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον $X$ και $(T_1 + T_2)(x_n) \to y$ στον $Y$. Θα δείξουμε ότι

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x = y,$$

οπότε ο $T$ έχει κλειστό γράφημα.

Αφού ο $T_2$ είναι φραγμένος και $x_n \to x$, έχουμε

$$T_2 x_n \to T_2 x.$$

Όμως τότε,

$$T_1 x_n = (T_1 + T_2)(x_n) - T_2 x_n \to y - T_2 x.$$

Αφού ο $T_1$ έχει κλειστό γράφημα, αυτό σημαίνει ότι $y - T_2 x = T_1 x$ (γιατί;), δηλαδή το ζητούμενο.

**12.** (α) Έστω $y_n = Tx_n$ στο $T(C)$, με $y_n \to y$ στον $Y$. Θα δείξουμε ότι $y \in T(C)$, δηλαδή ότι υπάρχει $x \in C$ τέτοιο ώστε $y = Tx$.

Αφού το $C$ είναι συμπαγές και $x_n \in C$, υπάρχουν υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ και $x \in C$, τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Τότε, αφού η $(y_{k_n})$ είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(y_n)$, έχουμε

$$Tx_{k_n} = y_{k_n} \to y.$$

Ο $T$ έχει κλειστό γράφημα, $x_{k_n} \to x$ και $y_{k_n} \to y$. Άρα, $y = Tx \in T(C)$.

(β) Έστω $x_n = T^{-1} y_n \in T^{-1}(K)$, με $x_n \to x \in X$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y \in K$ με $x = T^{-1} y$.

Αφού το $K$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $Y$, υπάρχουν $(y_{k_n})$ και $y \in K$ τέτοια ώστε

$$y_{k_n} = Tx_{k_n} \to y.$$

Όμως, $x_{k_n} \to x$, και ο $T$ έχει κλειστό γράφημα. Άρα, $y = Tx$.

**13.** Έστω $X, Y$ χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Για να δείξουμε ότι ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος, αρκεί να δείξουμε ότι έχει κλειστό γράφημα.

Έστω $y_n \to y$ στον $Y$, και $x_n = T^{-1} y_n \to x$ στον $X$. Θα δείξουμε ότι

$$x = T^{-1} y \Longleftrightarrow Tx = y.$$

(η ισοδυναμία εξηγείται από το ότι ο $T$ είναι ένα προς ένα και επί). Ο $T$ είναι φραγμένος, και $x_n \to x$. Άρα,

$$y_n = Tx_n \to Tx.$$

Όμως, έχουμε και την $y_n \to y$. Από μοναδικότητα του ορίου, $y = Tx$.

**14.** Αρκεί να δείξουμε ότι ο $T$ έχει κλειστό γράφημα. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον $X$ και $Tx_n \to y$ στον $Y$. Θα δείξουμε ότι $y = Tx$.

Για κάθε $f \in Y^*$ ισχύουν τα εξής:

(α) Αφού $Tx_n \to y$ και το $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές,

$$f(Tx_n) \to f(y).$$

(β) Από την υπόθεση, αφού $x_n - x \to 0$,

$$f(T(x_n - x)) = f(Tx_n) - f(Tx) \to 0 \Longrightarrow f(Tx_n) \to f(Tx).$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in Y^*$, $f(Tx) = f(y)$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$y = Tx$$

(βασική συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach είναι ότι ο $Y^*$ «διαχωρίζει» τα σημεία του $Y$).

**15.** Παρατηρούμε πρώτα ότι για τις $f_n : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Ο $X$ είναι χώρος Banach και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φραγμένη (γιατί συγκλίνει). Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|f_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $\|f\| \leq M$ (βλέπε Άσκηση 1), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_n(x) \to f(x)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n - x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_n - x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq M\|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \to 0, \end{aligned}$$

δηλαδή, $f_n(x_n) \to f(x)$.

**16.** Αν ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $Y$, τότε είναι χώρος Banach, και ο $T : X \to R(T)$ είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T^{-1} : R(T) \to X$ είναι φραγμένος.

Αντίστροφα: έστω ότι ο $T^{-1} : R(T) \to X$ είναι φραγμένος, και έστω $y_n \in R(T)$ με $y_n \to y \in Y$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = y$.

Υπάρχουν $x_n \in X$ με $Tx_n = y_n$, και αφού ο $T^{-1}$ είναι φραγμένος, έχουμε

$$(*) \qquad \|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η $(y_n)$ συγκλίνει στον $Y$ άρα είναι ακολουθία Cauchy στον $Y$, και από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X$. Ο $X$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.

Ο $T$ είναι φραγμένος και $x_n \to x$, άρα $y_n = Tx_n \to Tx$. Από μοναδικότητα του ορίου,

$$y = Tx \in R(T),$$

δηλαδή το $R(T)$ είναι κλειστό.

**17.** Αν ο $T$ είναι φραγμένος, τότε για κάθε $g \in Y^*$ το $g \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (ως σύνθεση συνεχών γραμμικών συναρτήσεων), δηλαδή $g \circ T \in X^*$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, με την υπόθεση $g \in Y^* \Longrightarrow g \circ T \in X^*$ δείχνουμε ότι ο $T$ έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος: έστω $x_n \to x$ στον $X$ και $Tx_n \to y$ στον $Y$.

Αν $g \in Y^*$, από τη μία μεριά έχουμε

$$Tx_n \to y \Longrightarrow g(Tx_n) \to g(y),$$

και από την άλλη, αφού $g \circ T \in X^*$ και $x_n \to x$, έχουμε

$$g(Tx_n) = (g \circ T)(x_n) \to (g \circ T)(x) = g(Tx).$$

Δηλαδή,

$$g(y) = g(Tx), \quad g \in Y^*$$

και αφού ο $Y^*$ διαχωρίζει τα σημεία του $Y$, παίρνουμε $y = Tx$. Έπεται ότι ο $T$ έχει κλειστό γράφημα.

**18.** (α) Αν $f_n \to f$ στον $C^1[0,1]$ και $Tf_n \to g$ στον $C[0,1]$, τότε έχουμε τις ομοιόμορφες συγκλίσεις

$$f_n \to f, \quad f_n' \to g.$$

Είναι γνωστό ότι με αυτές τις υποθέσεις έχουμε $f' = g$ στο $[0,1]$, δηλαδή

$$T(f) = g.$$

Αυτό δείχνει ότι ο $T$ έχει κλειστό γράφημα.

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(t) = t^n$. Τότε $\|f_n\| = 1$ για κάθε $n$, αλλά

$$(Tf_n)(t) = nt^{n-1}, \quad t \in [0,1],$$

δηλαδή, $\|Tf_n\| = n$. Αυτό δείχνει ότι ο $T$ δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται σ' αυτήν την περίπτωση, κι αυτό σημαίνει (αναγκαστικά) ότι ο $C^1[0,1]$ δεν είναι χώρος Banach.

# Κεφάλαιο 9

# Το θεώρημα σταθερού σημείου

## 9.1 Συστολές - θεώρημα σταθερού σημείου

**Ορισμός** (α) Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος, και $T : X \to X$ μιά συνάρτηση. Το $x \in X$ λέγεται *σταθερό σημείο* της $T$ αν $T(x) = x$.

(β) Η $T$ λέγεται *συστολή* στον $X$, αν υπάρχει $0 < a < 1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x, y \in X$

$$d(T(x), T(y)) \leq a d(x,y).$$

**Θεώρημα σταθερού σημείου** (Banach) *Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι ο $X$ είναι πλήρης, και ότι $T : X \to X$ είναι μιά συστολή στον $X$. Τότε, η $T$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.*

*Απόδειξη:* Ορίζουμε διαδοχικά τους όρους μιάς ακολουθίας $(x_n)$ στον $X$ ως εξής: επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in X$, και θέτουμε

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad x_3 = T(x_2) = T^3(x_0), \dots$$

Γενικά,

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X$: αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq a d(x_m, x_{m-1}) \\ &= a d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq a^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}), \end{aligned}$$

και, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq a^m d(x_1, x_0), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Αν $m > n$, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εκτίμηση και την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq a^{m-1} d(x_1, x_0) + a^{m-2} d(x_1, x_0) + \ldots + a^n d(x_1, x_0) \\ &= a^n d(x_1, x_0) \frac{1 - a^{m-n}}{1 - a} \\ &\leq a^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - a}. \end{aligned}$$

Αφού $0 < a < 1$, έχουμε $a^n d(x_1, x_0)/(1-a) \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Άρα, η $(x_m)$ είναι ακολουθία Cauchy. Ο $(X, d)$ είναι πλήρης, επομένως υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_m \to x$. Έχουμε

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m-1}, x) \to 0, \end{aligned}$$

άρα $d(x, Tx) = 0$, δηλαδή $Tx = x$.

Αν υπήρχε κι άλλο σταθερό σημείο $y$ της $T$, θα είχαμε

$$0 < d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq a d(x, y),$$

άτοπο, αφού $0 < a < 1$. □

Η απόδειξη του θεωρήματος μάς δίνει και εκτίμηση για το πόσο κοντά βρισκόμαστε στο σταθερό σημείο $x$ της $T$ μετά το $m$-στό βήμα της διαδικασίας που περιγράψαμε:

**Πόρισμα 9.1.1** *Έστω $T : X \to X$ συστολή όπως στο Θεώρημα, και $x_0 \in X$. Αν $x$ είναι το σταθερό σημείο της $T$, τότε*

*(α)* $d(x_m, x) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0)$,

*(β)* $d(x_m, x) \leq \frac{a}{1-a} d(x_m, x_{m-1})$.

*Απόδειξη:* Στην απόδειξη του θεωρήματος είδαμε ότι, αν $s > m$ τότε

$$d(x_s, x_m) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0).$$

Αφήνοντας το $s$ να πάει στο άπειρο, έχουμε $x_s \to x$, άρα

$$d(x, x_m) = \lim_{s \to \infty} d(x_s, x_m) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0).$$

Για το (β) θεωρούμε την

$$y_0 = x_{m-1} \quad , \quad y_1 = x_m \quad , \quad \ldots \quad , \quad y_s = x_{m-1+s} \to x.$$

Εφαρμόζοντας το (α) για την $(y_s)$ με $s=1$, παίρνουμε

$$d(y_1,x)\leq \frac{a}{1-a}d(y_1,y_0),$$

δηλαδή

$$d(x_m,x)\leq \frac{a}{1-a}d(x_m,x_{m-1}). \quad \square$$

Πολύ συχνά ξέρουμε ότι η $T:X\to X$ είναι συστολή σε ένα υποσύνολο $Y$ του $X$ (και όχι σε ολόκληρον τον $X$). Αν το $Y$ είναι κλειστό, τότε επιλέγοντας το $x_0\in Y$ και εξασφαλίζοντας ότι όλοι οι όροι της $(x_m)$ θα παραμείνουν στο $Y$, μπορούμε να βρούμε σταθερό σημείο της $T$ στο $Y$ (άρα, στον $X$):

*Παράδειγμα.* Έστω $(X,d)$ πλήρης μετρικός χώρος, και $T:X\to X$. Υποθέτουμε ότι η $T$ είναι συστολή (για κάποιο $0<a<1$) σε μιά κλειστή μπάλα $Y=\{x\in X: d(x_0,x)\leq r\}$, όπου $x_0\in X$ και $r>0$. Αν $d(x_0,Tx_0)<(1-a)r$, τότε η $x_m=T^m x_0$ συγκλίνει σε σταθερό σημείο της $T$.

*Απόδειξη:* Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $x_m$ ανήκει στο $Y$. Στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου είδαμε ότι

$$d(x_m,x_n)\leq \frac{a^n}{1-a}d(x_1,x_0).$$

Παίρνοντας, $n=0$, έχουμε

$$d(x_m,x_0)\leq \frac{1}{1-a}d(x_1,x_0)=\frac{1}{1-a}d(Tx_0,x_0)<\frac{(1-a)r}{1-a}=r,$$

δηλαδή, $x_m\in Y$, $m\in\mathbb{N}$. $\square$

## 9.2 Εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $f'=F(t,f)$, με αρχική συνθήκη την $f(t_0)=x_0$.

**Θεώρημα 9.2.1** *(Picard) Έστω $F$ συνεχής συνάρτηση στο ορθογώνιο*

$$R=\{(t,x):|t-t_0|\leq a,|x-x_0|\leq b\},$$

*τέτοια ώστε $|f(t,x)|\leq M$ για κάθε $(t,x)\in R$. Υποθέτουμε ότι η $F$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή: υπάρχει $L>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $(t,x),(t,y)\in R$,*

$$|F(t,x)-F(t,y)|\leq L|x-y|.$$

*Τότε, η $f'=F(t,f)$, $f(t_0)=x_0$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[t_0-h,t_0+h]$, αν $h<\min\{a,\frac{b}{M},\frac{1}{L}\}$.*

*Απόδειξη:* Θεωρούμε τον πλήρη μετρικό χώρο $C[J]$, $J = [t_0 - h, t_0 + h]$, με μετρική την $d(f,g) = \max_{t\in J}|f(t) - g(t)|$, και τον υπόχωρο

$$C_1 = \{f \in C[J] : |f(t) - x_0| \leq Mh\}.$$

Ο $C_1$ είναι κλειστός υπόχωρος του $C[J]$, άρα πλήρης. Η $f$ είναι λύση της εξίσωσης αν και μόνο αν $Tf = f$, όπου

$$(Tf)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J.$$

Έχουμε $|f(s) - x_0| \leq Ml \leq b$, άρα $(s, f(s)) \in R$ για κάθε $s$, και η $F$ είναι συνεχής στο $R$, άρα το $\int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds$ είναι καλά ορισμένο. Επίσης,

$$|(Tf)(t) - t_0| = \left|\int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Mh,$$

άρα,

$$f \in C_1 \Longrightarrow Tf \in C_1.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}
|(Tf)(t) - (Tg)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} \{F(s, f(s)) - F(s, g(s))\}\, ds\right| \\
&\leq L\left(\max_J |f(s) - g(s)|\right)|t - t_0| \\
&\leq (Lh)d(f,g),
\end{aligned}$$

και $0 < Lh < 1$, άρα η $T$ είναι συστολή: $d(Tf, Tg) \leq (Lh)d(f,g)$.

Από το θεώρημα σταθερού σημείου, υπάρχει μοναδική $f \in C_1$ τέτοια ώστε $Tf = f$, δηλαδή

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J,$$

οπότε $f' = F(t, f)$, και $f(t_0) = x_0$. □

*Σημείωση:* Η απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου δείχνει ότι μπορούμε να πάρουμε τη λύση $f$ σαν όριο της ακολουθίας

$$f_{n+1}(s) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds,$$

ξεκινώντας από τυχούσα $f_0 \in C_1$.

## 9.3 Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

(α) **Εξίσωση Fredholm**. *Έστω* $J = [a,b]$, *και* $K : J \times J \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ *συνεχείς συναρτήσεις. Αν* $|K(t,s)| \leq M$ *στο* $J \times J$, *και* $|\mu| < 1/M(b-a)$, *τότε η*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t,s)f(s)ds$$

*έχει μοναδική λύση στο* $J$.

*Απόδειξη:* Ορίζουμε $T : C[a,b] \to C[a,b]$, με

$$(Tf)(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t,s)f(s)ds.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η $T$ είναι συστολή (γιατί;). Όμως,

$$\begin{aligned} d(Tf,Th) &= \max_{t\in J} |(Tf)(t) - (Th)(t)| \\ &= |\mu| \max_{t\in J} \Big| \int_a^b K(t,s)(f(s)-h(s))ds \Big| \\ &\leq |\mu| M \left( \max_{s\in J} |f(s)-h(s)| \right)(b-a) \\ &= \{|\mu| M(b-a)\}\, d(f,h). \end{aligned}$$

Αφού $|\mu|M(b-a) < 1$, το θεώρημα σταθερού σημείου μάς εξασφαλίζει μοναδική $f_0 \in C[a,b]$ τέτοια ώστε $Tf_0 = f_0$. □

(β) **Εξίσωση Volterra** *Έστω* $J = [a,b]$, *και* $K : J \times J \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ *συνεχείς συναρτήσεις. Τότε, για κάθε* $\mu \in \mathbb{R}$, *η*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t,s)f(s)ds$$

*έχει μοναδική λύση στο* $J$.

*Απόδειξη:* Για κάθε $f \in C[J]$ ορίζουμε

$$(Tf)(t) = g(t) + \mu \int_a^t K(t,s)f(s)ds, \quad t \in J.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $T(f) \in C[J]$. Δηλαδή, $T : C[J] \to C[J]$. Για κάθε $f,h \in C[J]$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Th)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^b K(t,s)(f(s)-h(s))ds \right| \\ &\leq |\mu| (\max |K|) d(f,h) \int_a^t ds \\ &= |\mu| (\max |K|) d(f,h)(t-a). \end{aligned}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$(*) \qquad |(T^m f)(t) - (T^m h)(t)| \leq |\mu|^m (\max|K|)^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(f,h).$$

*Επαγωγικό βήμα:*

$$\begin{aligned} |(T^{m+1}f)(t) - (T^{m+1}h)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t K(t,s) \left\{ (T^m f)(s) - (T^m h)(s) \right\} ds \right| \\ &\leq |\mu| (\max|K|) \int_a^t |\mu|^m (\max|K|)^m \frac{(s-a)^m}{m!} d(f,h) ds \\ &= |\mu|^{m+1} (\max|K|)^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(f,h). \end{aligned}$$

Από την $(*)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} d(T^m f, T^m h) &= \max_t |(T^m f)(t) - (T^m h)(t)| \\ &\leq \left\{ |\mu|^m (\max|K|)^m \frac{(b-a)^m}{m!} \right\} d(f,h). \end{aligned}$$

Για μεγάλα $m$ έχουμε $|\mu|^m (\max|K|)^m \frac{(b-a)^m}{m!} < 1$. Άρα, η $T^m$ είναι συστολή στον $C[a,b]$. Έπεται ότι η $T^m$ έχει σταθερό σημείο: υπάρχει $f_0$ με την ιδιότητα $T^m f_0 = f_0$. Αν πάρουμε τυχούσα $f \in C[a,b]$, τότε $(T^m)^n f \to f_0$ καθώς $n \to \infty$.

Παίρνοντας $f = Tf_0$, έχουμε

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} T^{mn}(Tf_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{mn} f_0) = \lim_{n\to\infty} Tf_0 = Tf_0.$$

Η $f_0$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της $T$, γιατί κάθε σταθερό σημείο της $T$ είναι και σταθερό σημείο της $T^m$, και η $T^m$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο (είναι συστολή). $\square$

## 9.4 Ασκήσεις

**1.** Κάθε συστολή $T : X \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**2.** Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η πληρότητα του $X$ είναι ουσιαστική για την απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου.

**3.** Έστω $T : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ με $Tx = x + \frac{1}{x}$. Δείξτε ότι αν $x \neq y$ τότε $|Tx - Ty| < |x - y|$, αλλά η $T$ δεν έχει σταθερό σημείο.

**4.** Αν η $T$ είναι συστολή, τότε η $T^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συστολή. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

**5.** Έστω $X$ συμπαγής μετρικός χώρος, και $T : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ για κάθε $x \neq y$ στον $X$. Δείξτε ότι η $T$ έχει σταθερό σημείο.

**6.** Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, και $0 < c \le g'(x) \le d$ στο $[a,b]$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του σταθερού σημείου για να βρείτε καλή προσέγγιση της μοναδικής (γιατί;) λύσης της $g(x) = 0$ στο $[a,b]$. *Υπόδειξη:* Θεωρείστε συνάρτηση $f(x) = x - \mu g(x)$ για κατάλληλο $\mu$, και βρείτε σταθερό σημείο της $f$.

**7.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, και $x_0$ απλή ρίζα της $f$ στο $(a,b)$. Δείξτε ότι η

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

είναι συστολή σε μιά περιοχή του $x_0$, και συμπεράνετε ότι αν ξεκινήσουμε με $x_1$ σ' αυτήν την περιοχή και ορίσουμε $(x_n)$ μέσω της $x_{n+1} = g(x_n)$, τότε $x_n \to x_0$.

**8.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα εξισώσεων $x = Ax + b$, όπου $A = (a_{ij})_{i,j\le n}$ και $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Αν

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| < 1$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Δείξτε ότι η λύση αυτή παίρνεται σαν το όριο της $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο, και $x_{n+1} = Ax_n + b$.

**9.** (α) Το ίδιο με την Άσκηση 9, αν για τον πίνακα $A$ υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(β) Το ίδιο, αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

**10.** Δείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών $f' = |f|^{1/2}$, $f(0) = 0$ έχει λύσεις τις $f \equiv 0$ και $g(t) = t|t|/4$. Έρχεται αυτό σε αντίφαση με το θεώρημα του Picard; Βρείτε κι άλλες λύσεις.

**11.** Βρείτε όλες τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες το πρόβλημα αρχικών τιμών $tf' = 2f$, $f(t_0) = x_0$ (α) δεν έχει λύση, (β) έχει περισσότερες από μία λύση, (γ) έχει ακριβώς μία λύση.

**12.** Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$(*) \qquad f(x) = \mu \int_a^b K(x, y, f(y))dy + \phi(x),$$

με συνεχείς $K$ και $\phi$, και την $K$ να ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz της μορφής

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \le M|z_1 - z_2|.$$

Δείξτε ότι η $(*)$ έχει μοναδική λύση αν $|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$.

**13.** Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$f(t) - \mu \int_0^1 e^{t-s} f(s)ds = g(t)$$

όπου $|\mu| < 1$, παίρνοντας $f_0 = g$ και ορίζοντας $f_{n+1} = Tf_n$ για κατάλληλη $T$.

**14.** Δίνονται ένας χώρος με νόρμα $X$, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$, και ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο $K$ του $X$ με την ιδιότητα $T(K) \subseteq K$. Δείξτε ότι ο $T$ έχει σταθερό σημείο στο $K$ (Θεώρημα Markov-Kakutani), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(α) Θέτουμε $T_0$ τον ταυτοτικό τελεστή, $T^k = T \circ \ldots \circ T$ ($k$ φορές). Δείξτε ότι ο

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένος, γραμμικός, και $S_n(K) \subseteq K$.
(β) Δείξτε ότι οι $S_n$ αντιμετατίθενται: $S_m \circ S_n = S_n \circ S_m$, $m, n \in \mathbb{N}$.
(γ) Για κάθε $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$S_{n_1} \circ \ldots \circ S_{n_s}(K) \subseteq S_{n_1}(K).$$

(δ) Έστω $(Y, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος. Αν $(F_n)$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $Y$ με την ιδιότητα $\bigcap_{j \leq n} F_k \neq \emptyset$ για κάθε $n$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
(ε) $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K) \neq \emptyset$.
(ζ) Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K)$, τότε $T(x) - x \in \frac{1}{n}(K - K)$, όπου $K - K = \{u - v : u, v \in K\}$.
(η) Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K)$, τότε $T(x) = x$.

# Κεφάλαιο 10

# Η ζωή του Stefan Banach

## 10.1 Τα πρώτα χρόνια

Ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του εικοστού αιώνα, ο Stefan Banach συνδέεται με ένα ευρύ φάσμα θεμελιωδών και γνήσιων μαθηματικών, ειδικά στην περιοχή της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Στην Πολωνία, θεωρείται εθνικός ήρωας.

Ο Banach γεννήθηκε την Τετάρτη, 30 Μαρτίου του 1892 στην Κρακοβία, στο Γενικό Νοσοκομείο του Αγ. Λαζάρου. Τα ονόματα του πρώτου και του δεύτερου γιατρού που εκτελούσαν υπηρεσία στον θάλαμο, καθώς και της μαίας που κατά πάσα πιθανότητα έφερε σε πέρας τον τοκετό, είναι καταγεγραμμένα στα αρχεία του νοσοκομείου. Το πιστοποιητικό γεννήσεως αναφέρει ότι μητέρα του Banach ήταν η Katarzyna Banach, και ότι πατέρας του ήταν ο Stefan Greczek, ένας κατώτερος δημόσιος υπάλληλος. Οι γονείς δεν ήταν παντρεμένοι.

Ο Banach δεν γνώρισε ποτέ τη μητέρα του, η οποία τον εγκατέλειψε αμέσως μετά τη βάπτισή του στην Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία του Αγ. Νικολάου, στις 3 Απριλίου του 1892. Αρκετές φορές ο Banach προσπάθησε να μάθει κάτι γι' αυτήν από τον πατέρα του, αλλά το μυστήριο δεν λύθηκε ποτέ, γιατί ο πατέρας του αρνούνταν να αποκαλύψει την ταυτότητά της ή οποιαδήποτε άλλη πληροφορία για το θέμα. Ο Greczek συνήθιζε να απαντά ότι είχε ορκιστεί να κρατήσει το μυστικό. Αργότερα παντρεύτηκε δύο φορές, και απέκτησε ένα παιδί από τον πρώτο του γάμο και τέσσερα από τη δεύτερη γυναίκα του.

Σύμφωνα με τον Hugo Steinhaus, ο οποίος ανακάλυψε τον Banach και στη συνέχεια ήταν στενός φίλος και μαθηματικός συνεργάτης του, ο Stefan Greczek καταγόταν από τα υψίπεδα του Jordanów, και εργαζόταν σαν υπάλληλος στα κεντρικά γραφεία των Σιδηροδρόμων της Κρακοβίας. Όμως αυτό δεν είναι αλήθεια. Από στοιχεία που διατηρούνται στην Κεντρική Εφορία της Κρακοβίας, γνωρίζουμε ότι ο Greczek προσελήφθη σαν κλητήρας της Εφορίας το 1903. Δύο χρόνια αργότερα του απενεμήθη αργυρούς σταυρός για τις υπηρεσίες του, και προήχθη σε αξιωματούχο της Εφορίας. Ο Greczek πέθανε το 1968 σε ηλικία 100 ετών, σχεδόν εικοσιπέντε χρόνια μετά τον Banach.

Η οικογενειακή μυθολογία αναφέρει ότι ο Banach πέρασε τα πρώτα του χρόνια με τη γιαγιά του στο Ostrowsko. Είτε αυτό αληθεύει ή όχι, ο νεαρός Stefan ήταν πολύ συνδεδεμένος μαζί της, και αισθανόταν μεγαλύτερο σεβασμό γι' αυτήν παρά για τους υπόλοιπους συγγενείς του. Όταν αυτή αρρώστησε, ο πατέρας του τον έστειλε στην Κρακοβία και εμπιστεύτηκε την ανατροφή του σε δύο γυναίκες, την Franciszka Plowa και την κόρη της Maria. Ο Stefan επισκεπτόταν τη γιαγιά του συχνά μέχρι το θάνατό της, και ήταν παρών στην κηδεία της.

Με τα δεδομένα της εποχής, ο Banach ζούσε σχετικά άνετα με τις Plowa, που ήταν αρκετά ευκατάστατες. Αρκετές πηγές συμφωνούν ότι ο Greczek δεν ξέχασε ποτέ το γιό του, ακόμα κι όταν είχε δημιουργήσει τη δική του νόμιμη οικογένεια. Όχι μόνο παρείχε τακτική οικονομική βοήθεια, αλλά διατηρούσε και στενή επαφή με τις Plowa που επέβλεπαν τον Banach μέχρι τα χρόνια του κολλεγίου. Οι επαφές πατέρα και γιού ήταν ευγενικές και εγκάρδιες. Σε μιά κάρτα που ο Banach έστειλε στον πατέρα του, ο μαθητής τότε του γυμνασίου ευχαριστεί τον Greczel για τα χρήματα που του έδωσε για να συμμετάσχει σε σχολική εκδρομή στο Kielce και τα βουνά βόρεια της Κρακοβίας.

Το 1902, αφού τελείωσε το δημοτικό σχολείο, ο Banach, σε ηλικία δέκα ετών, γράφτηκε στην πρώτη τάξη του γυμνασίου Henryk Sienkiewicz της Κρακοβίας. Το γυμνάσιο, που ειδικευόταν στις ανθρωπιστικές σπουδές, βρισκόταν στο Podwale (ακριβώς κάτω από τα τείχη της πόλης) και συνήθως αποκαλούνταν «Goetz», γιατί το νοικιασμένο κτίριο στο οποίο στεγαζόταν ανήκε στον ζυθέμπορο της Κρακοβίας Goetz-Okocimski.

Οι συμμαθητές και καλύτεροι φίλοι του Banach ήταν οι Witold Wilkosz (μελλοντικός μαθηματικός) και Marian Albinski. Τα απομνημονεύματα του Albinski μας δίνουν τη μόνη αξιόπιστη αναφορά γι' αυτήν την περίοδο της ζωής του Banach. Αυτός και ο Banach συνυπήρξαν από το 1902 ως το 1906, οπότε ο Marian μετακινήθηκε στο γυμνάσιο Sobieski. Η αιτία αυτής της μετακίνησης ρίχνει φώς σε κάποια χαρακτηριστικά του σχολικού συστήματος στο Αυστριακό κομμάτι της διαμελισμένης τότε Πολωνίας. Ο Albinski γράφει ότι αιτία της μετακίνησης ήταν η σύγκρουσή του με τον καθηγητή των Ελληνικών. Όταν στο τέλος του πρώτου εξαμήνου απερρίφθη στα Ελληνικά, του επιβλήθηκε σκληρό χρηματικό πρόστιμο! Ιδού τι γράφει ο Albinski για τους καλούς του φίλους:

«Ο Wilkosz ήρθε μαζί μου στο Sobieski. Δεν ξέρω ποιοί ήταν οι δικοί του λόγοι. Ο Banach παρέμεινε στο Goetz μέχρι την αποφοίτησή του στα 1910.

Οι επαφές μου με τον Banach περιορίστηκαν, όμως ο Wilkosz συνέχισε να τον βλέπει πολύ τακτικά. Ο Stefan Banach, όπως τον θυμάμαι, ήταν καλός φίλος. Ήσυχος, αλλά με μιά ευγενική αίσθηση του χιούμορ, ήταν μάλλον απόμακρος. Η οικονομική του κατάσταση τον υποχρέωνε να παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα σε μικρότερους μαθητές καθώς και σε μαθητές από το «κέντρο της πόλης», ποτέ του όμως δεν έμοιαζε φτωχός. Πρέπει να προσθέσω ότι στους συμμαθητές του έκανε ιδιαίτερα μαθήματα δωρεάν.

Ο Banach και ο Wilkosz ήρθαν κοντά μέσα από την αγάπη τους για τα μαθηματικά. Στα διαλείματα, τους έβλεπα συχνά να προσπαθούν να λύσουν μαθηματικά προβλήματα. Αν κάποιο πρόβλημα τους ερέθιζε, η επιστροφή τους από το σχολείο στο σπίτι κρατούσε ώρες: περπατούσαν από το σπίτι του ενός στο σπίτι του άλλου και αντίστροφα, συζητώντας το επί ώρες.»

Πρέπει να σημειωθεί ότι το εκπαιδευτικό πρόγραμμα του γυμνασίου έριχνε ιδιαίτερα το βάρος στις κλασικές σπουδές - Λατινικά, Ελληνικά, Ξένες γλώσες, Ιστορία κλπ., και όχι στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Ο Banach δεν ακολούθησε λοιπόν ένα πρόγραμμα σπουδών συμβιβαστό με την κλίση του. Πολύ συχνά διδασκόταν μαθηματικά από ανεπαρκείς ανθρώπους. Αργότερα, όταν θυμόταν αυτήν την περίοδο, ο Banach δεν μιλούσε και πολύ ευγενικά για την ποιότητα και τις μεθόδους διδασκαλίας στο αγαπημένο του αντικείμενο.

Είναι ενδιαφέρον να δεί κανείς το ωρολόγιο πρόγραμμα της δευτέρας (για παράδειγμα) τάξης: Θρησκευτικά (δύο ώρες), Λατινικά (οκτώ ώρες), Πολωνικά (τρείς ώρες), Γερμανικά (πέντε ώρες), Ιστορία και Γεωγραφία (τέσσερις ώρες), Μαθηματικά (τρείς ώρες), Φυσική ιστορία (δύο ώρες). Υπήρχαν και προαιρετικά μαθήματα ωδικής, σχεδίου, καλλιγραφίας, γυμναστικής, και στενογραφίας.

Τα Μαθηματικά διδάσκονταν από τα βιβλία «Βασική Αριθμητική και Άλγεβρα» του Brzostowin, και «Γεωμετρία και Φαντασία» των Mocnik-Maryniak.

Το γυμνάσιο που παρακολούθησε ο Banach δεν ήταν ιδιαίτερα αριστοκρατικό, διατηρούσε όμως ισχυρούς δεσμούς με ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα, όπως και πολλά άλλα σχολεία της Κρακοβίας. Πολλοί ακαδημαϊκοί δάσκαλοι εργάζονταν συχνά και σαν καθηγητές γυμνασίων, κάτι που εξασφάλιζε πολύ υψηλό επίπεδο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συγκρινόμενο με το Sobieski, το γυμνάσιο του Banach δεν ήταν πολύ της μόδας, ίσως όμως αυτό να ήταν το μεγάλο του πλεονέκτημα, αφού σ' αυτά τα αποφασιστικά χρόνια ο Banach απέφυγε τις αρνητικές εμπειρίες των συγχρόνων του στα γειτονικά γυμνάσια. Η έντονη παρουσία των γόνων της αριστοκρατίας σ' αυτά, πολύ συχνά παρέλυε τους μαθητές που είχαν ταπεινότερη καταγωγή, βγάζοντας στην επιφάνεια συναισθήματα κατωτερότητας που οδηγούσαν στον αρριβισμό και τη ματαιοδοξία.

Αντίθετα με το Sobieski, η ατμόσφαιρα στο Goetz ήταν πολύ πιό άνετη. Κανένας από τους συμμαθητές του Banach δεν προερχόταν από την υψηλή κοινωνία της Κρακοβίας. Ο παράγοντας αυτός έχει ειδικό βάρος, και επηρρέασε σαφώς τις μεταγενέστερες πολιτικές τάσεις και συμπάθειές του. Στον κατάλογο των ονομάτων της τάξης του συμπεριλαμβάνονται τα καθόλου αριστοκρατικά ονόματα Piotr Owca (πρόβατο), Stanislaw Klocek (κούτσουρο), Albin Kawaler (εργένης), και άλλα.

Οι βαθμοί του Banach ήταν «άριστα» στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες, «λίαν καλώς» και «καλώς» στα υπόλοιπα. Ο Albinski σημειώνει:

«Η μετριοφροσύνη του, ή καλύτερα η ντροπαλοσύνη του, είναι ο λόγος που δεν καλοφαίνεται στην φωτογραφία της δευτέρας τάξης που έχω φυλάξει. Κάθεται στο θρανίο της τρίτης σειράς και είναι σχεδόν κρυμμένος. Η κανονική του θέση ήταν στην πρώτη σειρά, όταν όμως εμφανίστηκε ο φωτογράφος, ο Banach επωφελήθηκε από την αναστάτωση και έτρεξε πίσω.»

Ιδού και μία άλλη περιγραφή του Banach από τον Adolf Rozek, συμμαθητή που κατόπιν έγινε ιστορικός:

«Ο Banach ήταν ευχάριστος στις σχέσεις του με τους συμμαθητές, έξω όμως από τα μαθηματικά δεν τον ενδιέφερε τίποτα. Αν ποτέ μιλούσε, μιλούσε τόσο γρήγορα, όσο γρήγορη ήταν και η μαθηματική του σκέψη. Είχε τόσο μεγάλη ταχύτητα στη σκέψη και τους υπολογισμούς, που οι γύρω του νόμιζαν ότι είχε μαντικές ικανότητες.»

Υπάρχουν ενδιαφέρουσες αναφορές για τις σχέσεις του Banach με τον θεολόγο του σχολείου, Πατέρα Pylko. Ο Banach του απηύθυνε συχνά ερωτήσεις του τύπου «αφού ο Θεός είναι παντοδύναμος, μπορεί να φτιάξει ένα βράχο που να μην μπορεί να μετακινήσει;» Είναι σαφές ότι είχε από νωρίς προσχωρήσει στο σκεπτικισμό. Στις σχολικές φωτογραφίες διακρίνεται μιά ήρεμη, ελαφρώς σαρκαστική, αλλά και συνεσταλμένη έκφραση στο πρόσωπό του. Αυτή η έκφραση τον συνόδευε ως το τέλος των γυμνασιακών του χρόνων: ο ενθουσιασμός του για τις σπουδές είχε ανακοπεί, αφού από δεκαπέντε χρόνων ο Banach παράλληλα εργαζόταν στα φροντιστήρια για να αντιμετωπίσει τα έξοδά του.

Από τους εικοσιεφτά μαθητές που πήραν το απολυτήριο γυμνασίου στη χρονιά του, έξι τιμήθηκαν με «διάκριση». Ο Banach δεν ήταν ανάμεσά τους, χαρακτηρίστηκε όμως «προικισμένος» μαθητής. Από τους εικοσιεφτά, δύο πήγαν προς τη Θεολογία, οχτώ στη Νομική, τρείς στην Ιατρική, έξι στη Φιλοσοφική, ένας στη Γεωπονική, τρείς στο Πολυτεχνείο, δύο στα Οικονομικά, και ένας σε μιά Στρατιωτική Ακαδημία. Ένας από αυτούς που πήγαν στο Πολυτεχνείο, ήταν ο Stefan Banach.

**Σημείωση** Πριν το 1914 η Πολωνία βρίσκεται κυρίως υπό ρωσική κυριαρχία. Αυτό είναι αποτέλεσμα μακραίωνων εθνικών αγώνων και αντιζηλιών ανάμεσα σε ισχυρότερους γείτονες (Σουηδία, Πρωσσία, Ρωσία). Παρά τις μεταπτώσεις της τύχης του και την καταστολή των εξεγέρσεων, η σημαντικότερη των οποίων ήταν του 1830, ο λαός αυτός, βασικά αγροτικός, παραμένει βαθύτατα θρησκευόμενος (ρωμαιοκαθολικός) και εθνικιστής.

## 10.2 Η «μεγαλύτερη ανακάλυψη» του Hugo Steinhaus

Λίγα πράγματα είναι γνωστά για την περίοδο της ζωής του Banach αμέσως μετά την αποφοίτησή του. Οι άνθρωποι που τον γνώριζαν εκείνη την εποχή δε ζούν πιά, και πολλά από τα ντοκουμέντα εκείνων των χρόνων δεν σώθηκαν, ή τουλάχιστον ο συγγραφέας δεν κατάφερε να τα ανακαλύψει. Τα γεγονότα όμως που επακολούθησαν δείχνουν ότι εκείνα τα χρόνια ήταν σημαντικά.

Μετά την αποφοίτησή τους το 1910, ο Stefan Banach και ο φίλος του Witold Wilkosz έκαναν σχέδια για το μέλλον τους. Το συμπέρασμα που έβγαλαν ήταν ότι τα μαθηματικά είχαν αναπτυχθεί τόσο πολύ, που θα ήταν αδύνατο να κάνουν κάτι καινούργιο σ' αυτόν τον κλάδο, δεν είχε λοιπόν και τόσο νόημα να σπουδάσουν μαθηματικά. Ο Banach επέλεξε μία πολυτεχνική σχολή, ενώ ο Wilkosz πήγε να σπουδάσει γλώσες. Έτσι, χώρισαν. Αργότερα ο Banach παραδεχόταν ότι ήταν πολύ αφελείς όταν πίστευαν ότι δεν υπήρχε πλέον χώρος για αυθεντική δουλειά στα μαθηματικά.

Η απάντηση του πατέρα του Banach για την αποφοίτηση και την είσοδό του στο Πολυτεχνείο λέγεται ότι ήταν η εξής: «Υποσχέθηκα στη μητέρα σου ότι θα σε βοηθούσα μέχρι αυτό το σημείο. Από δώ και πέρα είσαι μόνος σου». Καθώς ο Banach ετοιμαζόταν να φύγει για το Πολυτεχνείο της Lvov, του έδωσε μερικές ακόμα συμβουλές: «Να φροντίζεις τον εαυτό σου και να αποφεύγεις τα μικρόβια». Είναι διασταυρωμένο ότι ο Banach, χωρίς να αισθάνεται προσβολή ή θλίψη, άφησε την Κρακοβία χωρίς δραχμή στο ονομά του, και χωρίς να περιμένει περαιτέρω οικονομική βοήθεια από τον πατέρα του.

Για τον Wilkosz, που προερχόταν από μία αξιοσέβαστη οικογένεια της Κρακοβίας, η κατάσταση ήταν πολύ διαφορετική. Ο πατέρας του ήταν καθηγητής γυμνασίου, και οι κλίσεις του νεαρού Witold, τόσο στη φιλολογία όσο και στα μαθηματικά, είχαν αναγνωριστεί από πολύ νωρίς. Τη στιγμή που αποφοίτησε είχε ήδη εξασφαλίσει μία υποτροφία για να περάσει μερικούς μήνες στη Βηρυτό. Γράφτηκε στο πρόγραμμα φιλολογίας του Jagiellonian πανεπιστημίου, όμως μετά από δύο χρόνια το γύρισε στα μαθηματικά. Με το ξεκίνημα του πρώτου παγκοσμίου πολέμου δέχτηκε μιά θέση καθηγητή γυμνασίου στο Zawiercie, ενώ παράλληλα συνέχισε στις ακαδημαϊκές του επιδιώξεις. Πήρε το διδακτορικό του από το Jagiellonian το 1919, και την υφηγεσία του το 1920. Μέσα σε λίγα χρόνια έγινε τακτικός καθηγητής και κατόπιν πήρε τον τίτλο του «διακεκριμένου» καθηγητή. Ήταν διάσημος σαν δάσκαλος, έγραφε εκλαϊκευτικά άρθρα, πρωτότυπες εργασίες και πανεπιστημιακά συγγράμματα.

Αντιθέτως, ο Banach έπρεπε να βρεί μόνος τα χρήματα για να υποστηρίξει τις σπουδές του. Το πιθανότερο είναι ότι παρέδιδε ιδιαίτερα μαθήματα. Δεν πρέπει λοιπόν να προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι χρειάστηκε τέσσερα χρόνια για να περάσει τις «εξετάσεις του μέσου των σπουδών»: συμπλήρωσε τις απαιτήσεις των πρώτων δύο ετών μόλις το 1914. Η επιτροπή που τον εξέτασε είχε πρόεδρο τον Jan Bogucki, και μεταξύ των μελών της βρίσκονταν ο μαθηματικός Placyd Dziwinski και ο φυσικός Kazimierz Olearski.

Πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά για τα ενδιαφέροντά του, τους φίλους του, και το πώς περνούσε τον καιρό του.

Τον Ιούλιο του 1914 ξέσπασε ο πρώτος παγκόσμιος πόλεμος. Τα Ρωσικά στρατεύματα επιτέθηκαν, και ο Banach εγκατέλειψε την Lvov. Ο Banach δεν υπηρέτησε στο στρατό για δύο λόγους: ήταν αριστερόχειρας και είχε σοβαρό πρόβλημα με το αριστερό του μάτι. Ο Turowicz λέει ότι ο Banach βρήκε δουλειά σαν εργοδηγός κάπου στην Galicia, για ένα όμως διάστημα τον καιρό του πολέμου έζησε στην Κρακοβία. Είναι γνωστό ότι κάποια στιγμή η διευθύντρια ενός παρθεναγωγείου της Κρακοβίας του προσέφερε κανονική θέση καθηγητή μαθηματικών, όμως ο Banach την απέρριψε. Δεν είχε κανένα ενδιαφέρον να δουλέψει στο γυμνάσιο. Ίσως εκείνη την εποχή να είχε ήδη αποφασίσει ότι ήθελε να κάνει έρευνα στα μαθηματικά.

Όπως έχουμε ήδη πεί, πολύ λίγες πληροφορίες υπάρχουν γιά την περίοδο αυτή του πολέμου. Ακόμα και στα μητρώα του Jagiellonian δεν βρέθηκε τίποτα σχετικό με τον Banach, αν και είναι σαφές ότι παρακολουθούσε κάποιες διαλέξεις εκεί. Το Jagiellonian ιδρύθηκε το 1363 και ήταν ένα από τα μεγάλα εκπαιδευτικά κέντρα επί αιώνες. Από το 1900, η κυρίαρχη φυσιογνωμία στους μαθηματικούς κύκλους του πανεπιστημίου ήταν ο Stanislaw Zaremba (1863-1942), που ενσάρκωνε μερικές από τις σημαντικότερες Ευρωπαϊκές επιστημονικές παραδόσεις. Γεννημένος στη Romanówka της Ουκρανίας, είχε αποφοιτήσει από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας της St. Petersburg (Ρωσία), και είχε πάρει διδακτορικό στα μαθηματικά από την Sorbonne (Γαλλία). Είχε πρωτότυπη συμβολή στη θεωρία των ελλειπτικών και υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, στη θεωρία δυναμικού, και σε προβλήματα της μαθηματικής φυσικής. Οι ιδέες του εφαρμόστηκαν αργότερα από τον Henri Poincaré (1854-1912), Γάλλο μαθηματικό, φυσικό και φιλόσοφο, που είχε τεράστια επίδραση στην κατεύθυνση των μαθηματικών του εικοστού αιώνα. Ο Henri Lebesgue (1875-1941), ένας άλλος σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός, από τους θεμελιωτές της σύγχρονης θεωρίας μέτρου, και άνθρωπος που δεν συνήθιζε να επαινεί, αναγνώριζε τη δύναμη των μεθόδων του και την αυθεντικότητα των εμπνεύσεών του, ειδικά στη μαθηματική φυσική.

Με δεδομένο το κύρος του Zaremba αλλά και την έλλειψη στοιχείων για τη ζωή του Banach εκείνη την εποχή, υπήρχε μεγάλη διαμάχη γύρω από το αν ο Banach, που σίγουρα δεν είχε φοιτητική ταυτότητα, παρακολουθούσε ή όχι τις διαλέξεις του Zaremba. Δύο σπουδαίοι Πολωνοί μαθηματικοί που γνώριζαν καλά τον Banach, ο Hugo Steinhaus και ο Kazimierz Kuratowski, συνέκλιναν προς τη θετική απάντηση. Την ίδια γνώμη έχουν και πολλοί άλλοι. Ο Andrzej Turowicz, που ήταν πολύ κοντά στον Banach, λέει:

«Πάντα κυκλοφορούσε η φήμη, και το ίδιο πιστεύω κι εγώ, ότι ο Banach παρακολουθούσε τις διαλέξεις του Zaremba. Κατά τη γνώμη μου όμως, αυτό δεν συνέβη πριν φύγει για τη Lvov, αλλά μετά, όταν επέστρεψε στην Κρακοβία, στη διάρκεια του πρώτου παγκοσμίου πολέμου. Βέβαια, όπως λένε, ο Banach ποτέ δεν παρακολουθούσε διαλέξεις σε κανονική βάση. Αυτό μου φαίνεται απολύτως φυσικό. Ο Banach σκεφτόταν με αστραπιαία ταχύτητα, ενώ οι διαλέξεις του Zaremba, τις οποίες γνωρίζω πολύ καλά, ήταν επιστημονικά άψογες, αλλά σχολαστικές και γεμάτες μικρές λεπτομέρειες. Ο Banach δεν χρειαζόταν πολλές εξηγήσεις. Έπιανε τις ιδέες στη στιγμή, και συνήθως βρισκόταν πολύ μπροστά από τον ομιλητή. Από την άλλη μεριά, από καιρού εις καιρόν θα ήθελε ασφαλώς να ξέρει ποιά καινούργια θέματα συζητούνταν ώστε να τα δουλέψει μόνος του.»

Ο Banach μιλούσε στον Turowicz για τον Zaremba με μεγάλο σεβασμό και θαυμασμό, και ίσως από αυτές τις συζητήσεις ο Turowicz έβγαλε το συμπέρασμα ότι ο Banach παρακολουθούσε τις διαλέξεις του Zaremba. Ένα είναι βέβαιο: ο Banach γνώριζε τα άρθρα και τα βασικά ερευνητικά αποτελέσματα του Zaremba πολύ καλά.

Κάποιες ενδείξεις για το αν θα μπορούσε ο Banach να εισχωρήσει στο αμφιθέατρο του Zaremba χωρίς να είναι γραμμένος στο Jagiellonian, μάς δίνει ο γεωμέτρης Stanislaw Golab σε ένα άρθρο για την ιστορία του πανεπιστημίου:

«Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι εκείνη την εποχή ο τρόπος για να περάσει επιτυχώς ένας φοιτητής από τη μία χρονιά στην άλλη ήταν μία και μόνο τελική εξέταση. Αποτέλεσμα αυτού του συστήματος ήταν οι καθηγητές να μην γνωρίζουν τους φοιτητές τους.»

Είτε ο Banach παρακολουθούσε τις σχολαστικά επεξεργασμένες διαλέξεις του

Zaremba ή όχι, ένα είναι βέβαιο: το μεταγενέστερο δικό του στύλ δουλειάς και διδασκαλίας θα ήταν δραματικά διαφορετικό.

Η ζωή του Stefan Banach πήρε αναπάντεχη τροπή την Άνοιξη του 1916, όταν τελείως συμπτωματικά συναντήθηκε με τον Hugo Steinhaus. Αυτή η συνάντηση έμελλε να αλλάξει τελείως την επαγγελματική αλλά και προσωπική ζωή του Banach: μέσω του Steinhaus ο Banach γνώρισε και τη μελλοντική σύζυγό του Lucja Braus.

Ποιός ήταν ο Hugo Dyonizy Steinhaus; Γεννήθηκε το 1887 στο Jaslo της Galicia σε μιά οικογένεια Εβραίων διανοουμένων (ο θείος του ήταν γνωστός πολιτικός, μέλος του κοινοβουλίου της Αυστρίας). Αν και μόλις πέντε χρόνια μεγαλύτερος από τον Banach, είχε μαθηματική σταδιοδρομία ασυγκρίτως ευτυχέστερη από αυτήν του Banach. Σπούδασε στη Lvov και συνέχισε στο Gottingen, όπου πήρε διδακτορικό με επιβλέποντα καθηγητή τον D. Hilbert στα 1911. Το θέμα της διατριβής του ήταν οι τριγωνομετρικές σειρές. Από το 1920 ως το 1941 ήταν καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Lvov. Μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο μετακινήθηκε στο Wroclaw, όπου ήταν καθηγητής του Πανεπιστημίου και μέλος της Πολωνικής Ακαδημίας Επιστημών. Στην τελευταία αυτή περίοδο επισκέφτηκε διάφορα Πανεπιστήμια στις Ηνωμένες Πολιτείες. Ο Steinhaus και ο Banach θεωρούνται ιδρυτές της Μαθηματικής Σχολής της Lvov. Η βιβλιογραφία του περιλαμβάνει πάνω από 170 εργασίες με θέμα τις σειρές Fourier, τη θεωρία τελεστών, τη θεωρία πιθανοτήτων, τη θεωρία παιγνίων, και εφαρμογές των μαθηματικών στη βιολογία, την ιατρική, τα νομικά, και τη στατιστική. Ήταν επίσης σπουδαίος εκλαϊκευτής των μαθηματικών.

Όλα όμως αυτά συνέβησαν αργότερα. Τον καιρό της συνάντησής του με τον Banach, μετά από μιά σύντομη στρατιωτική θητεία στην Πολωνική Λεγεώνα που βοήθησε την Πολωνία να αποκτήσει την ανεξαρτησία της με το τέλος του πρώτου παγκοσμίου πολέμου, ετοιμαζόταν να πάρει θέση βοηθού στο Πανεπιστήμιο Jan Kazimierz της Lvov. Στα «Απομνημονεύματά» του, ο Steinhaus περιγράφει τη συνάντηση ως εξής:

«Αν και η Κρακοβία ήταν τυπικά ακόμα σε εμπόλεμη κατάσταση, ήταν ήδη αρκετά ασφαλές να κάνεις ένα βραδυνό περίπατο στο πάρκο της. Στη διάρκεια ενός τέτοιου περιπάτου, άκουσα κατά λάθος τις λέξεις «μέτρο Lebesgue». Πλησίασα το παγκάκι και συστήθηκα στους δύο λάτρεις των μαθηματικών. Μου είπαν ότι είχαν άλλον ένα φίλο που λεγόταν Witold Wilkosz, και μου τον επαίνεσαν υπερβολικά. Οι δύο νέοι λέγονταν Stefan Banach και Otto Nikodym.

Από εκείνη τη στιγμή και μετά συναντιόμασταν σε κανονική βάση, και καθώς εκείνο τον καιρό βρίσκονταν στην Κρακοβία οι Wladyslaw Slebodzinski, Leon Chwistek, Jan Kroc και Wlodzimierz Stozek, αποφασίσαμε να ιδρύσουμε μία μαθηματική εταιρεία. Σαν εμπνευστής της ιδέας, προσφέρθηκα οι συναντήσεις να γίνονται στο δωμάτιό μου. Η πρώτη μου ενέργεια λοιπόν ήταν να καρφώσω ένα μαυροπίνακα στον τοίχο. Όταν η Γαλλίδα υπεύθυνη κτιρίου είδε τι είχα κάνει, τρομοκρατήθηκε – τί θα έλεγε ο ιδιοκτήτης; Την καθησύχασα υπενθυμίζοντάς της ότι ο ιδιοκτήτης του κτιρίου ήταν μακρινός συγγενής μου, και μου συγχώρησε το αμάρτημα. Είχα όμως κάνει λάθος. Ο κύριος L. φέρθηκε σαν ένας παραδοσιακός άκαρδος σπιτονοικοκύρης, και έμεινε ασυγκίνητος από τον υψηλό σκοπό που εξυπηρετούσε ο πίνακας. Παρ' όλες τις δυσκολίες, η εταιρεία συνεχώς επεκτεινόταν: ήταν η πρώτη αχτίδα φωτός αυτού του είδους στην Πολωνία.»

Ο Hugo Steinhaus, στο υπόλοιπο της ζωής του, σε ομιλίες και γραπτά του, συνεχώς ισχυριζόταν ότι ο Stefan Banach ήταν η «μεγαλύτερη ανακάλυψη» της ζωής του. Αμέσως μετά την τυχαία πρώτη συνάντησή τους, μιά πολύ στενή συνεργασία αναπτύχθηκε ανάμεσα σ' αυτές τις δύο τελείως διαφορετικές προσωπικότητες, συνεργασία που κράτησε πολλά χρόνια. Οι συχνές πλέον συναντήσεις τους γίνονταν στο Esplanada Café, στη γωνία των οδών Karmelicka και Podwale.

Ένα απόγευμα ο Steinhaus περιέγραψε στον Banach ένα πρόβλημα που προσπαθούσε να λύσει για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το πρόβλημα αφορούσε τη σύγκλιση κατά μέσο των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μιάς ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Λίγες μέρες μετά, ο Banach επέστρεψε με την πλήρη απάντηση. Ο Steinhaus θυμάται:

«Έμεινα έκπληκτος όταν, μετά από λίγες μέρες, ο Banach έδωσε αρνητική απάντηση. Η απόδειξη που μου έδωσε είχε ένα κενό, που οφειλόταν στο ότι αγνοούσε το παράδειγμα του Du Bois-Reymond. Γράψαμε μαζί ένα άρθρο, το οποίο παρουσιάστηκε από τον Zaremba στην Ακαδημία της Κρακοβίας και, με μεγάλη καθυστέρηση, δημοσιεύτηκε το 1918.»

Το άρθρο δημοσιεύτηκε στο Δελτίο της Ακαδημίας της Κρακοβίας. Με αυτό, ο Banach έκανε το ντεμπούτο του σαν μαθηματικός.

Η συνάντηση με τον Steinhaus είχε κι άλλες συνέπειες για την προσωπική ζωή του Banach. Στις 19 Οκτωβρίου του 1920, ο Banach παντρεύτηκε την Lucja Braus στην Κρακοβία. Η νύφη προερχόταν από οικογένεια μαστόρων και δούλευε από μικρή για τα προς το ζήν. Τον καιρό που γνώρισε τον Banach, ήταν γραμματέας του δικηγόρου Lisowski που ήταν γαμπρός του πολιτικού θείου του Steinhaus. Η οικογένεια Steinhaus έμενε εκείνο τον καιρό στους Lisowski, και ο Stefan γνώρισε την Lucja την ώρα που δακτυλογραφούσε τις αγορεύσεις του Lisowski. Η νεαρή Lucja τράβηξε αμέσως την προσοχή του Banach.

Μετά το γάμο, οι Banach αποσύρθηκαν στα όρη Tatra, και πέρασαν το καλοκαίρι τους στη βίλλα Gerlach. Η βίλλα ανήκε στον μαθηματικό Leon Chwistek και στην αδερφή του Anna Stozek, σύζυγο του Wlodzimierz Stozek που ήταν μαθηματικός στο Jagiellonian. Οι Chwistek και οι Stozek περνούσαν εκεί τα καλοκαίρια τους, και στα επόμενα χρόνια είχαν συχνά φιλοξενούμενους τον Banach και τον Sierpinski. Στα γύρω δάση και στις όχθες ενός κρύου ορεινού ποταμού, ο Banach, ο Sierpinski και ο Stozek έγραψαν τα σχολικά βιβλία μαθηματικών από τα οποία έμαθαν μαθηματικά ολόκληρες γενιές Πολωνών μαθητών και φοιτητών πανεπιστημίου.

**Σημείωση** Στις 28 Ιουνίου του 1919, η συνθήκη των Βερσαλλιών καθιερώνει την ύπαρξη Πολωνικού κράτους. Το νέο κράτος βρισκόταν στη σφαίρα επιρροής των Άγγλων και των Γάλλων, που εκείνη την εποχή επιθυμούσαν μιά προστατευτική ζώνη απέναντι στην Οκτωβριανή επανάσταση. Τα σύνορα του κράτους καθορίστηκαν μόλις το 1922-23, με το τέλος του «λευκού πολέμου» εναντίον της Ρωσίας.

## 10.3 Fundamenta Mathematicae

Δύο από τα πιό σημαντικά γεγονότα της εποχής στο χώρο της επιστήμης, ήταν η εμφάνιση του Principia Mathematica των Alfred Whitehead και Bertrand Russell, που εκδόθηκε λίγο πριν τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο, και η ειδική και γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein. Οι Πολωνοί διανοούμενοι παρακολουθούσαν τις εξελίξεις με ενθουσιασμό. Τα νέα έρχονταν συνεχώς από κάθε κατεύθυνση.

Τα Μαθηματικά ήταν κι αυτά ζωντανά. Ο νεαρός τοπολόγος Zygmund Janiseswski (1988-1920), που μόλις είχε επιστρέψει από το Παρίσι, προσπαθούσε να διαμορφώσει ένα πρόγραμμα στόχων και δράσης για τα Πολωνικά μαθηματικά. Ο Kazimierz Kuratowski, διευθυντής, επί σειράν ετών μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, του Ινστιτούτου Μαθηματικών της Πολωνικής Ακαδημίας Επιστημών, περιγράφει εκείνη την περίοδο στο βιβλίο του «Μισός αιώνας μαθηματικών στην Πολωνία»:

«Προς το τέλος του πρώτου παγκοσμίου πολέμου, η Kasa im. J. Mianowskiego, μία τράπεζα που εξυπηρετούσε τους Πολωνούς επιστήμονες, ιδιαίτερα εκείνους που προέρχονταν από τις επαρχίες που υπάγονταν στη Ρωσία, ίδρυσε το περιοδικό «Πολωνική επιστήμη: οι ανάγκες της, η οργάνωσή της, και η ανάπτυξή της». Όπως φαίνεται κι από το όνομα, σκοπός της έκδοσης ήταν να εξασφαλίσει ένα βήμα ανταλλαγής απόψεων για την επιστημονική ανάπτυξη της Πολωνίας, μιάς χώρας που είχε μόλις επανακτήσει την ανεξαρτησία της. Στον πρώτο τόμο της έκδοσης, που εμφανίστηκε το 1918, ο Janisewski δημοσίευσε ένα άρθρο με τίτλο «*Οι ανάγκες των μαθηματικών στην Πολωνία*». Με εκπληκτική σαφήνεια και ακρίβεια, παρουσίασε ένα προσχέδιο για τα Πολωνικά μαθηματικά. Ο Janisewski ξεκινούσε με την υπόθεση ότι «οι Πολωνοί μαθηματικοί δεν πρέπει να αρκεστούν στο ρόλο των πελατών και ακολουθητών των ξένων μαθηματικών κέντρων», αλλά «πρέπει να διεκδικήσουν έναν ανεξάρτητο ρόλο για τα Πολωνικά μαθηματικά». Ένας από τους καλύτερους τρόπους για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος, πρότεινε ο Janisewski, θα ήταν οι Πολωνοί μαθηματικοί να συγκεντρωθούν στα σχετικά στενά πεδία έρευνας στα οποία είχαν κοινά ενδιαφέροντα, και – το πιό σημαντικό – είχαν ήδη διεθνώς αναγνωρισμένη συνεισφορά. Στα πεδία αυτά περιλαμβάνονταν η θεωρία συνόλων, η τοπολογία, και τα θεμέλια των μαθηματικών (μαζί και η μαθηματική λογική).»

Μέσα στο νεανικό του ενθουσιασμό, ο Janisewski προχωρούσε στη διατύπωση ενός πολύ φιλόδοξου προγράμματος:

«Είναι αλήθεια ότι ένας μαθηματικός δεν χρειάζεται εργαστήρια και πολύπλοκες ή ακριβές εγκαταστάσεις. Χρειάζεται όμως την κατάλληλη μαθηματική ατμόσφαιρα και τις ευκαιρίες να παραμείνει σε επαφή με τους συνεργάτες του. Μιά τέτοια ατμόσφαιρα μπορεί να δημιουργηθεί μόνο αν οι άνθρωποι δουλεύουν μαζί, σε κοινά ερευνητικά προβλήματα. Οι συνεργάτες είναι σχεδόν απαραίτητοι για έναν ερευνητή. Απομονωμένος, συνήθως μαραζώνει. Ο λόγος γι' αυτό δεν είναι μόνο η ψυχολογική έλλειψη κινήτρων: είναι ότι ο μοναχικός ερευνητής ξέρει πολύ λιγότερα από αυτούς που δουλεύουν μαζί. Μόνο τα τελικά αποτελέσματα φτάνουν σ' αυτόν: ιδέες που είναι ήδη ώριμες και σε τελειωμένη μορφή, συχνά πολύ μετά τη στιγμή της δημιουργίας τους, όταν επιτέλους εκδίδονται. Ο μοναχικός ερευνητής δεν καταλαβαίνει ποτέ γιατί δημιουργήθηκαν και πώς προέκυψαν: δεν έζησε τη διαδικασία της σφυρηλάτησής τους μαζί με τους δημιουργούς τους. Είμαστε πολύ μακριά από τα καμίνια και τα καζάνια όπου δημιουργούνται τα μαθηματικά. Φτάνουμε αργά, και αναπόφευκτα μάς έχουν αφήσει πίσω. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι αν δεν θέλουμε να μένουμε πίσω, πρέπει να ακολουθήσουμε ριζοσπαστικές μεθόδους και να αντιμετωπίσουμε τη ρίζα του προβλήματος. Πρέπει να φτιάξουμε ένα δικό μας καμίνι.»

Προσπαθώντας να υποδείξει έναν ανεξάρτητο δρόμο για τα Πολωνικά μαθηματικά, ο Janisewski ανέλυε σε βάθος τις αλληλεπιδράσεις των διαφόρων κλάδων των σύγχρονων μαθηματικών, δίνοντας έναν αυθεντικό και πολύπλοκο χάρτη που τις οπτικοποιούσε. Επιπλέον, πρότεινε τη δημιουργία ενός περιοδικού που θα ήταν αφιερωμένο αποκλειστικά στη θεωρία συνόλων και τα θεμέλια των μαθηματικών. Ένα τέτοιο περιοδικό, το πρώτο στον κόσμο που θα είχε τόσο συγκεκριμένο περιεχόμενο, θα εκδιδόταν σε γλώσσες κατανοητές για τη διεθνή κοινότητα, και θα έπαιζε διπλό ρόλο: θα παρουσίαζε στον επιστημονικό κόσμο τη δουλειά των Πολωνών μαθηματικών, και την ίδια στιγμή θα προσήλκυε άρθρα ξένων συγγραφέων που είχαν τα ίδια ενδιαφέροντα. Εν συντομία, θα ήταν ένα διεθνές όργανο για την περιοχή των μαθηματικών που προωθούσαν οι Πολωνοί. «Αν θέλουμε να αποκτήσουμε μιά θέση στον επιστημονικό κόσμο, ας το κάνουμε με δική μας πρωτοβουλία», είπε ο Janisewski στην ομιλία του προς τη μαθηματική κοινότητα της Βαρσοβίας. Οι στόχοι του επιτεύχθηκαν πολύ σύντομα. Ο πρώτος τόμος του *Fundamenta Mathematicae* εμφανίστηκε το 1920. Εκδότες ήταν οι Stefan Mazurkiewicz και Waclaw Sierpinski. Κατά τραγική σύμπτωση, ο πρώτος αυτός τόμος περιείχε και τη νεκρολογία του Zygmunt Janisewski. Πέθανε στις 3 Ιανουαρίου του 1920: ήταν ένα από τα πολλά θύματα μιάς επιδημίας δυσεντερίας.

Το περιοδικό είχε μεγάλη απήχηση στο μαθηματικό κόσμο. Ο Henri Lebesgue, που συμμετείχε στις συζητήσεις για την ίδρυση του *Fundamenta Mathematicae* του Janisewski, συμβούλευσε τους Πολωνούς μαθηματικούς να λάβουν υπ' όψιν «όλες τις πιθανές εφαρμογές της θεωρίας συνόλων, και όχι μόνο τις απευθείας εφαρμογές που περιέγραφαν οι προγραμματικές προτάσεις». Η σύσταση αυτή αντανακλούσε όχι μόνο την ειλικρινή του επιθυμία να πετύχει το νέο περιοδικό, αλλά και την αγωνία του για το μέλλον της θεωρίας συνόλων, μιάς από τις πιό σημαντικές αναπτυσσόμενες περιοχές των μαθηματικών εκείνη την περίοδο.

Ο Lebesgue έγραφε ότι «...η θεωρία βρισκόταν έξω από το πεδίο των μαθηματικών που μελετούσε το υψηλό ιερατείο της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων», και πως, ακόμα κι αν «ο εξοστρακισμός της θεωρίας συνόλων λήγει, αυτό συμβαίνει μόνο γιατί η θεωρία συνόλων (η οποία, αρκετά ειρωνικά, ξεπήδησε από τη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων) φάνηκε πολύ χρήσιμη στη μεγαλύτερη αδελφή της και απέδειξε την αξία και τον πλούτο της σε όλους». Επίσης εκτιμούσε ότι, εξαιτίας των επαφών που οι ιδρυτές της διατηρούσαν με τους αναλύστες, «δεν μετακινήθηκαν σε πεδία έρευνας απομονωμένα από τα υπόλοιπα μαθηματικά. Αυτό θα μπορούσε να είχε οδηγήσει στη δημιουργία ενός νέου, αξιοσέβαστου ίσως κλάδου, ο οποίος όμως θα είχε πιθανότατα μείνει για πολύ καιρό έξω από την περιοχή του γενικού ενδιαφέροντος».

Η θετική επίδραση των συμβουλών του Lebesgue, και η ευέλικτη ερμηνεία που έδινε στα όρια των εφαρμογών της θεωρίας συνόλων, είχε σαν αποτέλεσμα να εμφανιστούν στις σελίδες του *Fundamenta Mathematicae* πολλά σημαντικά άρθρα με θέμα τη γεωμετρία, την θεωρία πιθανοτήτων, και τις τριγωνομετρικές σειρές. Με τα λόγια του Lebesgue, η θεωρία συνόλων ξεπλήρωνε το χρέος της στην θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών, αφού το *σύνολο του Cantor*, μία από τις πιό λαμπρές ανακαλύψεις του Georg Cantor, προέκυψε από προβλήματα της θεωρίας των τριγωνομετρικών σειρών.

Στα απομνημονεύματά του, ο Kuratowski, συζητώντας τη συμβουλή του Lebesgue, σχολιάζει ότι ένα άλλο θετικό τους αποτέλεσμα ήταν η απελευθέρωση (στα 1929) της συναρτησιακής ανάλυσης (του κλάδου στον οποίο κυρίως συνεισέφερε ο Banach) από το *Fundamenta Mathematicae*. Η έρευνα στη συναρτησιακή ανάλυση οδήγησε στη δημιουργία ενός δεύτερου ειδικού περιοδικού: του *Studia Mathematica*. Εδώ όμως έχουμε φύγει πολύ μπροστά από την ιστορία μας.

## 10.4 Τα μαθηματικά στην Lvov: 1919-1929

Στην περίοδο 1919-29, η απίστευτη ερευνητική δραστηριότητα του Banach, αλλά και η συνεισφορά του στην αναδιοργάνωση των μαθηματικών στην Πολωνία, είχαν σαν αποτέλεσμα να θεωρείται ένας από τους κορυφαίους Πολωνούς μαθηματικούς. Συνέχιζε τις συναντήσεις του με τον Steinhaus, συζητούσε όμως και με άλλους μαθηματικούς, έκανε φίλους και απέκτησε επαφές στη διεθνή μαθηματική κοινότητα.

Η δημοσίευση του πρώτου άρθρου του Banach στο Δελτίο της Ακαδημίας της Κρακοβίας (1918) τράβηξε την προσοχή του μαθηματικού κόσμου, που αναγνώρισε χωρίς αμφιβολία το ταλέντο του. Το άρθρο είχε μεγάλο ειδικό βάρος. Γραμμένο από κοινού με τον Steinhaus, ήταν στη Γαλλική γλώσα, κυρίαρχη γλώσα της επιστήμης εκείνη την εποχή, και είχε τίτλο *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier*. Ήταν μιά σημαντική συνεισφορά στην ακμάζουσα τότε θεωρία των σειρών Fourier, η οποία είχε αναπτυχθεί στις αρχές του 19ου αιώνα για να βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων της μαθηματικής φυσικής, όπως η μετάδοση της θερμότητας και η κυματική διάδοση. Στις μέρες μας, οι φοιτητές των μαθηματικών αποδεικνύουν αυτό το αποτέλεσμα σαν μιά σχετικά απλή άσκηση, και μπορούμε να το δούμε σαν άμεσο πόρισμα ενός από τα πιό σημαντικά θεωρήματα της συναρτησιακής ανάλυσης το οποίο απέδειξε ο Banach. Μπορεί μάλιστα να θεωρηθεί σαν ένας από τους σπόρους που τελικά γέννησαν την αφηρημένη μέθοδο που σήμερα λέγεται συναρτησιακή ανάλυση.

Πολλοί από τους αστέρες των Πολωνικών μαθηματικών είδαν το άρθρο και άρχισαν να ρωτούν με περιέργεια για τη δουλειά του Banach. Ο Steinhaus διέδιδε παντού ότι ο «αυτοδίδακτος» έλυνε δύσκολα και πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα, το ένα μετά το άλλο.

Εκείνη την εποχή, ο Banach έγραψε το δεύτερο άρθρο του, μόνος αυτή τη φορά: *Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales*. Σε αυτό απέδειξε ότι η ακολουθία των αριθμητικών μέσων μιάς ορθοκανονικής ακολουθίας συναρτήσεων συγκλίνει στο μηδέν σχεδόν παντού – ένα φαινόμενο που θυμίζει τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών στη θεωρία των πιθανοτήτων. Αργότερα, το αποτέλεσμα αυτό ισχυροποιήθηκε από άλλους μαθηματικούς. Παρατηρήθηκε ακόμα ότι με εφαρμογή του Λήμματος του Kronecker, η απόδειξή του απλοποιείται σημαντικά, γεγονός που περιόρισε τη σημασία του άρθρου του Banach.

Την ίδια χρονιά, ο Banach έγραψε άλλο ένα άρθρο, που εντυπωσιάζει ακόμα και σήμερα με την κομψότητά του. Εμφανίστηκε αργότερα στο *Fundamenta Mathematicae* με τίτλο *Sur l'équation fonctionelle* $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Πολλοί μαθηματικοί είχαν μελετήσει το πρόβλημα να βρεθούν συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτήν την συναρτησιακή εξίσωση, με πρώτον τον Augustin Louis Cauchy (1789-1857) κατά τον 19ο αιώνα. [Ο Cauchy ήταν ένας από τους πρώτους μαθηματικούς που έδωσαν αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Ήταν ο άνθρωπος που δημιούργησε τον $\varepsilon$-$\delta$ ορισμό που τόσο πολύ φοβούνται οι πρωτοετείς φοιτητές.] Στο άρθρο του (μήκους δύο σελίδων), ο Banach απεδείκνυε ότι μία μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, είναι υποχρεωτικά συνεχής, άρα γραμμική. Το αποτέλεσμα αυτό εξακολουθεί να χρησιμοποιείται, και βρίσκει εφαρμογές σε πολλές περιοχές της μαθηματικής ανάλυσης.

Το επόμενο άρθρο του, *Sur les ensembles de points ou la dérivée est infinie*, περιέχει μιά απόδειξη του εξής θεωρήματος: το σύνολο των σημείων στα οποία η δεξιά πλευρική παράγωγος μιάς συνάρτησης απειρίζεται, έχει μέτρο μηδέν. Το αποτέλεσμα του Banach ήταν ισχυρότερο από τα προηγούμενα γνωστά αποτελέσματα του είδους, και, την ίδια στιγμή, η απόδειξη που έδινε ήταν απλούστερη.

Τα τελευταία αυτά δύο άρθρα ήταν πραγματικά αριστουργήματα της σύγχρονης θεωρίας συναρτήσεων πραγματικών μεταβλητών, και ήταν μόνο η αρχή μιάς σειράς εργασιών του Banach πάνω σ' αυτό το θέμα. Μόνο γι' αυτά, ο Banach είχε εξασφαλισμένη την αποδοχή της μαθηματικής κοινότητας.

Στα 1920, ο Antoni Marian Lomnicki (1881-1941), που είχε μόλις πάρει έδρα στο Πολυτεχνείο της Lvov, προσέφερε στον Banach μιά θέση βοηθού. Αυτή ήταν η πρώτη επί πληρωμή ακαδημαϊκή θέση του Banach, αν και μέσα στα καθήκοντά του συμπεριλαμβάνονταν το baby-sitting της μικρής κόρης του Lomnicki και άλλες ανορθόδοξες ασχολίες.

Ο Banach συνέχιζε να αποδεικνύει με φρενήρη ρυθμό. Μαζί με το φίλο του Stanislaw Ruziewicz, βρήκαν όλες τις συναρτήσεις $f$ που ικανοποιούν την ισότητα $f(u)f(v)f(w)=u^2+v^2+w^2$, μιά εξίσωση που είχε μελετήσει ο Maxwell σε σχέση με προβλήματα της μαθηματικής φυσικής (είχε βρεί όλες τις παραγωγίσιμες λύσεις της). Στο έκτο άρθρο του, επέστρεψε στη θεωρία των συναρτήσεων μιάς πραγματικής μεταβλητής, την οποία εμπλούτιζε με ιδέες από τη νέα θεωρία μέτρου του Lebesgue. Αυτή θα ήταν πάντα η μεγάλη δύναμή του: με ιδιοφυή τρόπο, εφάρμοζε νέες αναπτυσσόμενες τεχνικές για να λύσει κλασικά παλιά προβλήματα. Αυτό είχε συνέπειες τόσο για τις παλιές όσο και για τις νέες θεωρίες.

Ο Banach πέρασε ένα μέρος αυτής της έντονης ερευνητικά περιόδου στο σπίτι του Lomnicki: ζούσε μαζί του και δούλευε γι' αυτόν. Η μεγαλύτερη κόρη του Lomnicki, η Irena, σημειώνει:

«Ήμουν έφηβη τότε, στα 1920, όταν ο Banach έφτασε στην Lvov και εγκαταστάθηκε σε ένα δωμάτιο του σπιτιού μας, στην οδό Nabielaka. Εκτός από την κουζίνα και το μπάνιο, το σπίτι μας είχε τρία δωμάτια: την τραπεζαρία, το υπνοδωμάτιο, και το γραφείο του πατέρα μου. Αν θυμάμαι καλά, ο Banach κοιμόταν στο γραφείο. Έζησε μαζί μας μερικούς μήνες, μέχρι να βρεί δικό του χώρο στην Lvov. Ήταν πολύ σεμνός και ευγενικός, και δεν μάς ενοχλούσε καθόλου. Η μητέρα μου Wladyslawa αγαπούσε τη λογοτεχνία, και είχε μεγάλη συλλογή μυθιστορημάτων. Ο Banach δανειζόταν συχνά βιβλία από αυτήν, και η μητέρα μου είχε να το λέει για το πόσο γρήγορα τα τελείωνε, και πόσες ουσιαστικές λεπτομέρειες συγκρατούσε από τα διαβάσματά του.»

Αργότερα, ο Lomnicki συνήθιζε να διηγείται ιστορίες για την απίστευτη μνήμη του πρώην βοηθού του, ο οποίος μπορούσε να ανακατασκευάσει με κάθε λεπτομέρεια μυθιστορήματα που είχε διαβάσει πολλά χρόνια πριν ή ακόμα και να αφηγηθεί από μνήμης ολόκληρα αποσπάσματα από αυτά τα βιβλία – πάντα με ένα ελαφρώς ειρωνικό και δήθεν αυτάρεσκο ύφος.

Το 1920, μετά από πολλούς δισταγμούς, ο Banach έγραψε τελικά τη διδακτορική διατριβή του με τίτλο «Πράξεις σε αφηρημένα σύνολα και εφαρμογές τους στις ολοκληρωτικές εξισώσεις». Ήταν γραμμένη στα Πολωνικά, και το 1922 δημοσιεύτηκε η Γαλλική της έκδοση στο *Fundamenta Mathematicae* με τίτλο *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales.*

Αξίζει να περιγράψουμε αυτή τη δουλειά με κάποια λεπτομέρεια, όχι μόνο γιατί ήταν η διατριβή του Banach, αλλά και γιατί περιείχε μερικές από τις πιό σημαντικές ιδέες που προσέφερε ποτέ. Τι περιείχε λοιπόν; Πρώτα απ' όλα, εισήγαγε μιά αφηρημένη δομή που αργότερα ονομάστηκε *χώρος Banach.* Ο Banach έδινε αξιωματικό ορισμό τέτοιων (ενδεχομένως απειροδιάστατων) χώρων, και εισήγαγε την έννοια του γραμμικού μετασχηματισμού μεταξύ τους. Ένα πλήθος συγκεκριμένων παραδειγμάτων που είχαν προηγουμένως μελετηθεί το ένα ανεξάρτητα από το άλλο, έμπαινε τώρα υπό την σκέπη της ενοποιητικής θεωρίας των χώρων Banach. Οι γνωστοί Ευκλείδειοι χώροι ήταν προφανείς ειδικές περιπτώσεις, πολύ πιό ενδιαφέροντες όμως ήταν οι απειροδιάστατοι χώροι συναρτήσεων που έπαιζαν σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους της κλασικής ανάλυσης. Η δομή τους, και η δομή των γραμμικών μετασχηματισμών (τελεστών) ανάμεσά τους, ήταν πολύ πλουσιότερη και δεν έχει – ακόμα και στις μέρες μας – κατανοηθεί πλήρως. Αν και αυτό ήταν το πρώτο άρθρο του Banach στην περιοχή που σήμερα ονομάζεται *συναρτησιακή ανάλυση*, η αξιωματικοποίηση που εισήγαγε ήταν εκπληκτικά πλήρης και, με μία έννοια, τελική. Ως ένα βαθμό, είναι σωστό να πούμε ότι η διατριβή του Banach γέννησε έναν κλάδο με ανεξάρτητη ζωή μέσα σε μία μέρα.

Η αλήθεια είναι ότι παρόμοιες ιδέες αξιωματικοποίησης ωρίμαζαν σε άρθρα άλλων μαθηματικών της εποχής. Το 1921, ο Αυστριακός μαθηματικός E. Helly εισήγαγε αντίστοιχες έννοιες. Ο ίδιος ο Steinhaus είχε ορίσει την έννοια του γραμμικού τελεστή, και ο Norbert Wiener ισχυρίζεται στην αυτοβιογραφία του ότι είχε ταυτόχρονα κάνει κάποιες ανακαλύψεις στον κλάδο. Αυτό όμως που διαχώριζε τη δουλειά του Banach από τη δουλειά όλων των υπολοίπων, ήταν ότι απαιτούσε σαφώς οι χώροι του να είναι πλήρεις. Αναγνώρισε αυτήν την ιδιότητα ως θεμελιώδη και έδειξε γιατί η ιδιότητα αυτή είναι απαραίτητη για να αποδειχθούν βαθιά και χρήσιμα θεωρήματα. Δύο τέτοια θεωρήματα εμφανίζονταν ήδη στη διατριβή του. Το πρώτο ισχυριζόταν ότι το κατά σημείο όριο μιάς ακολουθίας γραμμικών και συνεχών τελεστών είναι υποχρεωτικά γραμμικός, αλλά και *συνεχής*, τελεστής. Το δεύτερο ήταν το φημισμένο *θεώρημα σταθερού σημείου του Banach* για συστολές. Το θεώρημα αυτό, μία πολύ γενική και αφηρημένη έκδοση της κλασικής μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων που εφαρμοζόταν σε πολλές ειδικές περιπτώσεις, δίνει πρακτική μέθοδο για την επίλυση διαφόρων εξισώσεων. Η αξία των δύο θεωρημάτων ήταν σαφής. Παρείχαν κλειδιά που άνοιγαν πολλές πόρτες ταυτόχρονα: χωρίς αυτά, κάθε πόρτα απαιτούσε το δικό της αντικλείδι.

Παρά τη σημασία της ανακάλυψης του Banach, η τυπική διαδικασία της απονομής του διδακτορικού ήταν ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα. Υπήρχαν πολλά εμπόδια. Ο Banach, που ήταν αυτοδίδακτος και δεν είχε πτυχίο πανεπιστημίου, έπρεπε να εξαιρεθεί με υπουργική απόφαση για να δώσει απευθείας εξετάσεις για την απονομή μεταπτυχιακού διπλώματος, κάτι που έπρεπε να προηγηθεί της εξέτασης για το διδακτορικό. Το μεγαλύτερο όμως πρόβλημα ήταν ο ίδιος ο Banach! Οι καθηγητές στην Lvov σύντομα κατάλαβαν ότι το υλικό της διατριβής του Banach ήταν έτοιμο από καιρό, αλλά ο Banach δεν είχε καμμία πρόθεση να καθήσει να το γράψει στο χαρτί. Από τη στιγμή που ο Banach απεδείκνυε το θεώρημά του, δεν ενδιαφερόταν και πολύ να το μετατρέψει σε εκδόσιμο χειρόγραφο. Βαριόταν τη διαδικασία. Οι ακροβασίες της σκέψης τον ενθουσίαζαν, όμως η μεταφορά τους στο χαρτί τον απωθούσε. Ο Nikodym θυμάται πώς οι συνάδελφοι του Banach τον βοηθούσαν, συχνά τον ξεγελούσαν, ώστε οι ιδέες του να γράφονται:

«Ο καθηγητής Ruziewicz καθοδήγησε έναν από τους βοηθούς του να συνοδεύει τον Banach στις συχνές επισκέψεις του στα καφενεία της πόλης. Εκεί, έβρισκε την ευκαιρία να τον ρωτήσει διακριτικά για τη δουλειά του. Κατόπιν, έγραφε τα θεωρήματα και τις αποδείξεις του Banach. Όταν όλα είχαν γραφτεί και δακτυλογραφηθεί, παρουσίαζαν την εργασία στον Banach, και του ζητούσαν να κάνει τις διορθώσεις. Μόνον έτσι ολοκληρώθηκε τελικά η διατριβή του Banach».

Σε ηλικία εικοσιοκτώ ετών, ο Banach έγινε διδάκτωρ των μαθηματικών. Επιβλέπων της διατριβής ήταν ο Antoni Lomnicki.

Ο Stanislaw Marcin Ulam, φοιτητής τότε στην Lvov και μελλοντικός μαθητής του Banach, περιγράφει στα απομνημονεύματά του τον τρόπο με τον οποίο απονέμονταν εκείνη την εποχή τα διδακτορικά στο Πανεπιστήμιο Jan Kazimierz:

«Η διαδικασία ήταν μάλλον τυπική. Γινόταν σε μία μεγάλη αίθουσα του τμήματος, γεμάτη από συγγενείς και φίλους. Ο υποψήφιος έπρεπε να φοράει λευκή γραββάτα και γάντια. Οι επιβλέποντες έβγαζαν ένα λογύδριο που περιέγραφε το έργο και τις δημοσιεύσεις του υποψηφίου. Μετά από μία πολύ σύντομη παρουσίαση του διδακτορικού, έδιναν στον υποψήφιο το δίπλωμα».

Η εξέταση για το διδακτορικό κάλυπτε το αντικείμενο της έρευνας του υποψηφίου και ένα ακόμα θέμα. Ο Steinhaus υπέδειξε στον Banach να επιλέξει σαν δεύτερο θέμα την αστρονομία. Ο Banach, με καλές αρχικά προθέσεις, επικοινώνησε με τον καθηγητή αστρονομίας Stanislaw Loria για να του ζητήσει την ύλη πάνω στην οποία θα εξεταζόταν. Ο Loria του έδωσε έναν κατάλογο βιβλίων, και, όπως έλεγε αργότερα, είχε μείνει έκπληκτος από την ταχύτητα με την οποία ο Banach καθημερινά κάλυπτε την ύλη. Όμως, αν και ο Banach διεκπεραίωνε με ενθουσιασμό τη μαθησιακή διαδικασία, δεν πολυσκεφτόταν την ιδέα ότι χρειάζεται να εξεταστεί στο αντικείμενο. Τη μέρα και ώρα της εξέτασης, οι φίλοι του τον παρέσυραν με τέχνασμα στην προγραμματισμένη αίθουσα.

Στο δελτίο του Πολυτεχνείου της Lvov για το ακαδημαϊκό έτος 1920-21, ο Banach αναφέρεται σαν βοηθός του A. Lomnicki στο τμήμα μαθηματικών. Οι διδακτικές υποχρεώσεις του ήταν τρείς ώρες την εβδομάδα, κάτι που τον άφηνε ουσιαστικά απερίσπαστο στην έρευνά του. Η ελεύθερη ανταλλαγή ιδεών που πάντα χαρακτήριζε τη μαθηματική κοινότητα της Lvov, απέδωσε σύντομα καρπούς. Εκείνη την εποχή, ο Banach έγραψε το άρθρο *Sur le problème de la mesure*, που αργότερα δημοσιεύτηκε στον τέταρτο τόμο του *Fundamenta Mathematicae*.

Το 1922, ο Stefan Banach πήρε την υφηγεσία του. Στο «Χρονικό του Πανεπιστημίου Jan Kazimierz» της Lvov για το ακαδημαϊκό έτος 1921-22, στη στήλη «προσωπικά», διαβάζουμε:

«Στις 7 Απριλίου του 1922, ο Δρ. Banach πήρε υφηγεσία στα μαθηματικά. Προσελήφθη ως Διακεκριμένος Καθηγητής των Μαθηματικών με προεδρικό διάταγμα που εκδόθηκε στις 22 Ιουλίου του 1922.»

Σε γενικές γραμμές, οι καθηγητές του πανεπιστημίου ζούσαν πολύ άνετα. Το κόστος ζωής στην Lvov ήταν μικρότερο απ' ότι στη Βαρσοβία: ένας άνθρωπος με μέτριες απαιτήσεις μπορούσε να ζήσει λογικά με μισό δολλάριο την ημέρα.

Σαν καθηγητής πανεπιστημίου λοιπόν ο Banach θα έπρεπε να είναι σε καλή οικονομική κατάσταση. Αυτό όμως δεν συνέβαινε στην περίπτωσή του. Άρχισε να ξοδεύει πολύ περισσότερα απ' όσα έβγαζε, και ήταν συχνά χρεωμένος. Για να βελτιώσει την οικονομική του κατάσταση, άρχισε να γράφει διδακτικά βιβλία, έργο που πήρε πολύ στα σοβαρά. Ο Steinhaus σχολιάζει αυτήν την περίοδο των «σχολικών βιβλίων»:

«Ο Banach σπαταλούσε τον χρόνο και την ενέργειά του γράφοντας βιβλία αριθμητικής, άλγεβρας και γεωμετρίας για το Γυμνάσιο. Τα έγραφε μαζί με τον Sierpinski και τον Stozek, αλλά και μόνος του. Λόγω της εμπειρίας που είχε αποκτήσει κάνοντας φροντιστήρια, ο Banach είχε πλήρη επίγνωση του ότι κάθε ορισμός, κάθε απόδειξη, και κάθε άσκηση είναι μεγάλη πρόκληση για ένα συγγραφέα σχολικών εγχειριδίων που ενδιαφέρεται για τη διδασκαλία.»

Πιό κάτω, ο Steinhaus κάνει ένα περίεργο αλλά αποκαλυπτικό σχόλιο για τις συγγραφικές δραστηριότητες του Banach:

«Κατά τη γνώμη μου, από τον Banach έλειπε μόνο ένα από τα χαρίσματα που πρέπει να έχει ένας συγγραφέας σχολικών βιβλίων: η ικανότητα να συλλαμβάνει με τη φαντασία του τον χώρο.»

Τα χρόνια 1929 και 1930, ο Banach εξέδωσε, σε δύο τόμους, και το πανεπιστημιακό σύγγραμμα *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Έγινε γνωστό για την αυστηρή προσέγγισή του στο αντικείμενο, και κάλυψε ένα κενό της Πολωνικής μαθηματικής βιβλιογραφίας.

Πέρα από αυτές τις «παράπλευρες» ασχολίες, ο Banach συνέχισε το ερευνητικό του πρόγραμμα, το οποίο απέφερε τέσσερις ακόμα εργασίες. Η τελευταία από αυτές, με τίτλο *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, αξίζει ιδιαίτερη μνεία. Ο Banach την έγραψε μαζί με τον Alfred Tarski, έναν φιλόσοφο και μαθηματικό κατά δέκα χρόνια νεώτερό του (ο οποίος έγινε αργότερα πρύτανις του Πανεπιστημίου της Βαρσοβίας, και το 1946 καθηγητής στο Berkeley, όπου ήταν ο ιδρυτής ολόκληρης ερευνητικής σχολής στη μαθηματική λογική και είχε τεράστια επίδραση στην ανάπτυξη του κλάδου στις Ηνωμένες Πολιτείες και αλλού). Η εργασία περιέχει ένα διαισθητικά αναπάντεχο αποτέλεσμα, που ρίχνει φώς όχι μόνο στη θεωρία των μετρήσιμων συνόλων, αλλά και στην αντίληψή μας για τα θεμέλια των μαθηματικών.

Για να εξηγήσουμε αυτό το αποτέλεσμα, πρέπει να δώσουμε δύο ορισμούς. Λέμε ότι δύο υποσύνολα μιάς μπάλας *ταιριάζουν*, αν το ένα μεταφέρεται στο άλλο με περιστροφή της μπάλας γύρω από το κέντρο της. Λέμε ακόμα ότι δύο σύνολα είναι *ισοδύναμα ως προς πεπερασμένη διάσπαση*, αν μπορούμε να ορίσουμε διασπάσεις τους σε πεπερασμένα το πλήθος κομμάτια (ίδιο πλήθος κομματιών για καθένα από τα δύο σύνολα), έτσι ώστε τα αντίστοιχα κομμάτια των δύο διασπάσεων να ταιριάζουν.

Ο Banach και ο Tarski απέδειξαν ότι υπάρχουν δύο ξένα υποσύνολα της μπάλας, καθένα από τα οποία είναι ισοδύναμο ως προς πεπερασμένη διάσπαση με την αρχική μπάλα. Μία λιγότερο ακριβής, αλλά πιό παραστατική, περιγραφή του αποτελέσματος είναι η εξής: Μπορούμε να χωρίσουμε τη μπάλα σε δύο κομμάτια, με τέτοιο τρόπο ώστε από αυτά τα κομμάτια να μπορούμε να συναρμολογήσουμε δύο μπάλες πανομοιότυπες με την αρχική. Είναι φανερό ότι γι' αυτά τα κομμάτια η έννοια του όγκου δεν έχει κανένα νόημα: αλλιώς, ο όγκος της αρχικής μπάλας θα ήταν ίσος με το διπλάσιό του.

Αυτή η παράδοξη διάσπαση της μπάλας, που στις μέρες μας ονομάζεται «*το παράδοξο των Banach και Tarski*», ήταν μία από τις ανακαλύψεις που έκαναν επιτακτική την ανάγκη επανεξέτασης των θεμελιωδών εννοιών των μαθηματικών. Ειδικότερα, έβαλε τους μαθηματικούς να εξετάσουν πολύ προσεκτικά το ρόλο του λεγόμενου *αξιώματος της επιλογής*. Έγινε φανερό ότι μπορεί να εξασφαλίζεται η ύπαρξη μιάς τέτοιας διάσπασης, όχι όμως και ο τρόπος κατασκευής της. Το παράδοξο ενέπνευσε πολλούς μαθηματικούς και προκάλεσε έντονο ενδιαφέρον, ακόμα και έξω από τον κύκλο των επαγγελματιών μαθηματικών. Ήταν μία από τις ελάχιστες μη τετριμμένες σύγχρονες μαθηματικές ανακαλύψεις που μπορούσε κανείς εύκολα να περιγράψει και στους αδαείς.

Αυτά τα χρόνια ήταν πολύ ευτυχισμένα για τον Banach. Στο «Χρονικό του Πανεπιστημίου Jan Kazimierz», διαβάζουμε:

«Αυτό το χρόνο, όπως και τις προηγούμενες χρονιές, το Υπουργείο Παιδείας χορήγησε άδεια σε κάποιους από τους καθηγητές των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών, ώστε να γνωρίσουν από πρώτο χέρι τις πιό πρόσφατες εξελίξεις στην επιστήμη και να δημιουργήσουν προσωπικές επαφές με διακεκριμένους επιστήμονες σε άλλες χώρες. Για το έτος 1924-25, δόθηκαν άδειες (με πλήρη μισθό) στον καθηγητή Loria για να συνεχίσει την έρευνά του στο California Institute of Technology στην Pasadena, και στον καθηγητή Banach για να συνεχίσει την μαθηματική έρευνά του στο Παρίσι.»

Δεν γνωρίζουμε πόσο σημαντικό ήταν το ταξίδι του Banach στη Γαλλία για την περαιτέρω εξέλιξή του. Η επιρροή όμως των Γάλλων στη μαθηματική σχολή της Lvov είναι εμφανής. Ο Marek Kac, μαθητής του Steinhaus και διακεκριμένος πιθανοθεωρητικός αργότερα, γράφει:

«Η επιρροή του Lebesgue στη σχολή της Lvov ήταν πολύ άμεση. Η σχολή, που ουσιαστικά ιδρύθηκε από τους Banach και Steinhaus, επικεντρωνόταν στη συναρτησιακή ανάλυση, τη γενική θεωρία των ορθογώνιων σειρών, και τη θεωρία πιθανοτήτων. Καμμία από αυτές τις θεωρίες δεν θα είχε προχωρήσει στο σημερινό της βάθος, χωρίς την ουσιαστική κατανόηση του μέτρου και του ολοκληρώματος του Lebesgue. Από την άλλη πλευρά, οι ιδέες του Lebesgue δεν βρήκαν πουθενά αλλού τόσο εντυπωσιακές και γόνιμες εφαρμογές, όσο εκεί: στην Lvov.»

Μιά μαρτυρία για τον «δάσκαλο» Banach δίνεται από τον Josef Jarymowicz:

«Ο Banach είχε το ταλέντο να μεταδίδει την μαθηματική γνώση με καθαρό τρόπο. Στο μάθημα μιλούσε χαμηλόφωνα, αλλά στην αίθουσα υπήρχε ησυχία: όλοι ήταν μαγεμένοι απ' αυτά που έλεγε. Χρησιμοποιούσε πολύ απλή γλώσσα, σα να μάς έλεγε: κοίτα πόσο εύκολο και απλό είναι. Καταλαβαίναμε τις ιδιαιτερότητες των νέων εννοιών, κι αυτό είναι το πιό σημαντικό όταν πρωτομπαίνεις σε μιά θεωρία. Κατά κανόνα, ερχόταν δέκα με δεκαπέντε λεπτά καθυστερημένος, όμως στην υπόλοιπη μισή ώρα προλάβαινε να μάς μεταδώσει περισσότερη γνώση από όση θα παίρναμε αν παρακολουθούσαμε κάποιον άλλον επί ώρες. Όλοι οι άλλοι καθηγητές είχαν υπερένταση, και παρέδιδαν το μάθημα με νευρικότητα. Δεν μπορούσαν να το κάνουν έτσι απλά και αβίαστα όπως αυτός.»

Στα απομνημονεύματα του Marceli Stark διαβάζουμε:

«Εκείνη την εποχή, υπήρχαν τέσσερις έδρες μαθηματικών στο Jan Kazimierz, τις οποίες κατείχαν (κατά σειράν προσλήψεως) οι E. Zylinski, H. Steinhaus, S. Ruziewicz, και S. Banach. Συνήθως, το μάθημα της Ανάλυσης για τους πρωτοετείς διδασκόταν κάθε χρονιά από διαφορετικό καθηγητή, ο οποίος κρατούσε την ίδια τάξη και στο δεύτερο έτος, και στη συνέχεια διηύθυνε σεμινάρια και καθοδηγούσε τους ίδιους φοιτητές και στο τρίτο έτος. Μετά απ' αυτό, στο τελευταίο τους έτος, οι φοιτητές παρακολουθούσαν μόνο ειδικά μαθήματα και σεμινάρια.

Την τάξη μου είχε αναλάβει ο καθηγητής Steinhaus. Ήταν πολύ μεγάλη τάξη, και στις παραδόσεις της Ανάλυσης πάνω από 220 άτομα συνωστίζονταν σε ένα μικρό αμφιθέατρο με πολύ φτωχό κλιματισμό, όπου πολλοί βολεύονταν στα σκαλιά και στα περβάζια των παραθύρων. Ολόκληρο το τμήμα των Μαθηματικών είχε μόνο τέσσερις βοηθούς, και ως εκ τούτου η τάξη δεν είχε μοιραστεί σε μικρότερα τμήματα για τις φροντιστηριακές ασκήσεις, τις οποίες είχε αναλάβει μόνος ο καθηγητής Steinhaus, χωρίς καμμία βοήθεια.

Σκαρφαλωμένος σε ένα βάθρο μπροστά από έναν μικρό μαυροπίνακα, κυριαρχούσε στο αμφιθέατρο. Αν και προετοίμαζε πολύ καλά τις διαλέξεις του, ο μέσος φοιτητής είχε φοβερή δυσκολία στο να τον παρακολουθήσει. Με αυτήν την έννοια, ο Steinhaus ήταν το ακριβώς αντίθετο του Banach, οι διαλέξεις του οποίου ήταν όχι μόνο σχολαστικά προετοιμασμένες, αλλά και δίνονταν με τέτοιον τρόπο που όλοι στην τάξη μπορούσαν να τις παρακολουθήσουν.

Πρέπει να εξηγήσω μερικά πράγματα για τη σχέση του Steinhaus με τους άλλους μαθηματικούς της σχολής της Lvov. Υπάρχουν κάποιες παρανοήσεις, ειδικά για τη σχέση του Banach με τον Steinhaus... Λέγεται ότι ο Banach στράφηκε προς τη συναρτησιακή ανάλυση κάτω από την επιρροή του Steinhaus. Είχα πάντα την περιέργεια, και κάποια στιγμή, αμέσως μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, ρώτησα τον ίδιο τον Steinhaus. Ο Steinhaus σιώπησε για λίγα λεπτά, και κατόπιν απάντησε: «Όχι!» Ο Banach κινήθηκε σ' αυτήν την κατεύθυνση ανεξάρτητα, όπως έκανε κι όταν άρχισε να δουλεύει πάνω στη θεωρία συνόλων, και, νωρίτερα, πάνω στο ολοκλήρωμα του Lebesgue (ήταν ακόμα φοιτητής τότε, και το θέμα δεν υπήρχε καν στα πανεπιστημιακά βιβλία). Χωρίς αμφιβολία, ο Steinhaus επέδρασε καταλυτικά στον Banach: το πρώτο άρθρο του Banach στις τριγωνομετρικές σειρές προέκυψε από μία ερώτηση του Steinhaus. Ο Steinhaus τον έπεισε να δουλέψει στις ορθογώνιες σειρές. Στη δεκαετία του 20 ήταν πολύ στενοί συνεργάτες. Καθώς όμως η συναρτησιακή ανάλυση άρχισε να αποκτά το δικό της βάρος, οι δρόμοι τους άρχισαν να αποκλίνουν. Ο Banach σχημάτισε μιά δική του ομάδα, με συνεργάτες τους Schauder, Mazur, Orlicz (μαθητή του Steinhaus), και Ulam (ο οποίος ξεκίνησε σαν μαθητής του Kuratowski), και άρχισαν να δουλεύουν πάνω στη συναρτησιακή ανάλυση και τις εφαρμογές της.»

Η συνεργασία ανάμεσα στον Banach και τον Steinhaus δεν είχε τελειώσει: αντιθέτως, είχε με μία έννοια γίνει βαθύτερη. Το 1928-29 δίδαξαν μαζί το μάθημα *Ειδικά θέματα μαθηματικής φυσικής*, και, το 1929, ίδρυσαν από κοινού ένα νέο μαθηματικό περιοδικό που έμελλε να αποκτήσει διεθνή επιρροή: το *Studia Mathematica*. Ο Banach είχε δείξει τις προθέσεις τους να κάνουν αυτό το βήμα, στο Συνέδριο των Πολωνών μθηματικών που έγινε στην Lvov, τον Σεπτέμβριο του 1927. Σε ένα άρθρο που παρέδωσε για τα πρακτικά του συνεδρίου, έγραφε:

«Στο συνέδριο έγινε σαφές ότι η θεωρία συνόλων και ή έρευνα στα θεμέλια των μαθηματικών είναι *ειδικότητα* των Πολωνών μαθηματικών. Η επιτυχία του *Fundamenta Mathematicae* τονίζει αυτό ακριβώς το σημείο. Από την άλλη πλευρά, η πολύ όμορφη περιοχή των εφαρμογών των μαθηματικών, στις οποίες συμπεριλαμβάνω τη μηχανική και ολόκληρο τον κλάδο της μαθηματικής φυσικής, δεν έχει εκτιμηθεί από τις νεώτερες γενιές των Πολωνών μαθηματικών, πλήν ελαχίστων εξαιρέσεων.»

## 10.5 Studia Mathematica

Οι σημαντικότερες επιστημονικές συνεισφορές του Banach στην περίοδο 1920-30, ήταν η δημιουργία του περιοδικού *Studia Mathematica* μαζί με τον Steinhaus, και η έκδοση του βιβλίου *Théorie des Opérations Linéaires*.

Το Studia αρχικά χρηματοδοτήθηκε από το Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, και, στα χρόνια πριν τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, από μία δωρεά του Josef Pilsudski. Ο Kazimierz Szalajko, ο οποίος ήταν υπεύθυνος για την διακίνηση του περιοδικού κατά την περίοδο 1934-39, αναφέρει ότι τα έσοδα του περιοδικού από τις συνδρομές ήταν σημαντικά, και ότι το ύψος του λογαριασμού που είχε ανοιχτεί στην τράπεζα Handlowy ανέβαινε με γοργούς ρυθμούς. Υπήρχε επίσης ένα δραστήριο πρόγραμμα ανταλλαγών με άλλα μαθηματικά περιοδικά, το οποίο εμπλούτισε άμεσα τη βιβλιοθήκη του τμήματος μαθηματικών.

Η ίδρυση του νέου μαθηματικού περιοδικού ανακοινώθηκε τον Οκτώβριο του 1929 στο Mathesis Polska:

«Ο πρώτος τόμος ενός νέου περιοδικού, του Studia Mathematica, εμφανίστηκε στην Lvov, κάτω από την διεύθυνση των Stefan Banach και Hugo Steinhaus.

Το περιοδικό θα δημοσιεύει ερευνητικές εργασίες στις περιοχές των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, και η διεύθυνσή του σκοπεύει να επικεντρωθεί στην συναρτησιακή ανάλυση και τις εφαρμογές της.

Το Studia Mathematica θα δημοσιεύει άρθρα γραμμένα στα Γαλλικά, τα Γερμανικά, τα Αγγλικά, και τα Ιταλικά. Τα άρθρα πρέπει να υποβάλλονται σε έναν από τους εκδότες: τον Καθηγητή Stefan Banach, Lvov, St. Nicolaus 4, ή τον Καθηγητή Hugo Steinhaus, Lvov, Kadecka 14. Κάθε τόμος κοστίζει 1.5 δολλάριο στο εξωτερικό, και 12 zlotys στην Πολωνία. Τα γραφεία του περιοδικού βρίσκονται στην Lvov, στην οδό St. Nicolaus 4, στο Πανεπιστήμιο.»

Όπως βλέπετε, ο Banach έδινε τη διεύθυνση του γραφείου του, ενώ ο Steinhaus τη διεύθυνση του σπιτιού του. Οι Banach είχαν ένα διαμέρισμα στο «παλιό» κτίριο του πανεπιστημίου. Τα διορθωμένα χειρόγραφα έπρεπε να επιστρέφονται στον Steinhaus, ο οποίος επέβλεπε όλες τις διαδικαστικές λεπτομέρειες της έκδοσης: τις επαφές με τους εκδοτικούς οίκους, τις ανταλλαγές με άλλα περιοδικά, τα οικονομικά, την τυπογραφική επιμέλεια, και άλλα.

Σε αυτό το σημείο, ταιριάζει ίσως να σχολιάσουμε την προσωπικότητα του Steinhaus. Ο Andrzej Turowicz περιγράφει έναν άνθρωπο που συνδύαζε τον ανεπτυγμένο πραγματισμό με μία ιδιαίτερη αίσθηση της μεταφυσικής, δύο χαρακτηριστικά που μοιάζουν απαραίτητα για έναν μαθηματικό που υπερβαίνει τα όρια της συμβατικής καριέρας:

«Θα σας διηγηθώ ένα ανέκδοτο που άκουσα από τον Steinhaus στο Scottish Café της Lvov πριν από τον πόλεμο, το οποίο επαναλαμβάνεται και στα απομνημονεύματά του. Ο Steinhaus με ρώτησε: ξέρεις ποιό είναι το πιό σημαντικό ερώτημα όλων των εποχών;

Του απάντησα ότι δεν είχα ιδέα, και μου είπε ότι κάποτε, σε μία διάλεξή του, ο Hilbert είχε πεί πως αν για κάποιο λόγο κοιμόταν και ξυπνούσε μετά από 500 χρόνια, δεν θα ρωτούσε για τα ιστορικά γεγονότα ή τις κοινωνικές αλλαγές, αλλά για τις εξελίξεις πάνω στην υπόθεση του Riemann, γιατί *αυτό ήταν το πιό σημαντικό πρόβλημα*.

Ο Steinhaus είχε μία μέθοδο ανάλογη με αυτήν του Σωκράτη. Του άρεσε να οδηγεί τους ανθρώπους στη βαθύτερη κατανόηση ενός προβλήματος, κάνοντας ερωτήσεις. Τους κολλούσε τόσο πολύ στον τοίχο με τις ερωτήσεις του, που στο τέλος έμεναν άφωνοι. Στις αναμνήσεις του από το Gottingen, αν θυμάμαι καλά, περιγράφει έναν διάλογο με τη σπιτονοικοκυρά του. Την ρώτησε γιατί πρέπει κανείς να πληρώνει φόρους.

– Μάλλον πληρώνουμε φόρους για να διασφαλιστεί το αξιόμαχον του στρατού μας.

– Μα τι τον θέλουμε αυτόν το στρατό;

– Για να νικήσουμε τους Γάλλους, φαντάζομαι.

– Μα γιατί να νικήσουμε τους Γάλλους;

Σε αυτό το σημείο, δεν υπήρξε απάντηση. Ο Steinhaus χρησιμοποιούσε αυτήν τη μέθοδο πολύ συχνά.

Ο Steinhaus προσπαθούσε να διδάξει τους νέους να είναι τακτικοί και ακριβείς στη δουλειά τους. Ο Mazur μου διηγήθηκε την ιστορία του πρώτου άρθρου που, φοιτητής ακόμα, έγραψε και υπέβαλλε στον Steinhaus. Ο Steinhaus θα το παρουσίαζε σε μία συνάντηση της μαθηματικής εταιρείας της Lvov. Δύο ώρες πριν τη συνάντηση, κάλεσε τον Mazur και του είπε:

– Κύριε Mazur, πώς μπορώ να παρουσιάσω το άρθρο σας, αφού δεν μου το δώσατε;

Ο Mazur έμεινε εμβρόντητος.

– Τι εννοείτε κύριε; Σας το παρέδωσα εγώ ο ίδιος.

– Μου παραδώσατε τέσσερις άδειες κόλλες. Κοιτάξτε.

Τι είχε συμβεί: πριν από τον πόλεμο, κυκλοφορούσε ένα είδος φτηνού χαρτιού, με ελαφρώς κιτρινωπή απόχρωση. Καθώς ο Mazur έγραφε το άρθρο, του τελείωσε το μελάνι, και μέσα στη βιασύνη του, αντί να πάει να αγοράσει μελάνι πρόσθεσε λίγο νερό στο μελανοδοχείο. Ο Steinhaus έδωσε το άρθρο στον φτωχό συγγραφέα, και του είπε:

– Ίσως, κύριε Mazur, να γράψατε κάποια πράγματα εδώ. Αν όμως σκοπεύετε να αφιερώσετε τη ζωή σας στην επιστήμη, καλά θα κάνετε να εφοδιαστείτε με άσπρα χαρτιά και αρκετό μαύρο μελάνι.»

Ο Steinhaus εκτιμούσε πολύ τη συνεργασία του με τον Banach. Αν και ήταν ο άνθρωπος που ανακάλυψε τον Banach, ο πρώτος του δάσκαλος, και αρκετές φορές ο καθοδηγητής του, συνήθιζε να αποδίδει στον εαυτό του τον ταπεινό ρόλο του εξωτερικού παρατηρητή. Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι πολλά κρίσιμα βήματα προήλθαν από αυτόν: η ίδρυση της μαθηματικής εταιρείας στην Κρακοβία, το Studia Mathematica, κοινά μαθήματα, και κοινά ερευνητικά αποτελέσματα. Υπήρχε όμως κάτι πραγματικά θαυμάσιο στον χαρακτήρα του Steinhaus: δεν ζήλευε, βοηθούσε τους ανθρώπους χωρίς να περιμένει ανταλλάγματα, και ήταν μετριόφρων. Ήταν ιδανικός υποψήφιος για συνεργασία με οποιονδήποτε. Στα απομνημονεύματά του γράφει:

«Το 1927, μία συνεργασία με τον Banach οδήγησε στο άρθρο *Sur le principe de la condensation des singularités*, το οποίο δημοσιεύτηκε στο Fundamenta Mathematicae Ο Henkel είχε νωρίτερα σκεφτεί ότι κάτι τέτοιο έπρεπε να ισχύει. Ο Stanislaw Saks διάβασε το αρχικό χειρόγραφο, και ισχυροποίησε το αποτέλεσμά μας χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Baire. Αυτό βοήθησε το άρθρο μας να εξελιχθεί σε μία σημαντική Πολωνική επιτυχία της εποχής του μεσοπολέμου, στην περιοχή της συναρτησιακής ανάλυσης...

Το 1928, ιδρύσαμε το Studia Mathematica. Ο πρώτος τόμος εμφανίστηκε στην Lvov το 1929. Το περιοδικό είναι αφιερωμένο στη συναρτησιακή ανάλυση, και είναι το επίσημο όργανο της λεγόμενης σχολής της Lvov. Μέχρι τον πόλεμο, το Studia εκδιδόταν στα Γαλλικά, τα Γερμανικά, τα Αγγλικά, και τα Ιταλικά. Μετά τον πόλεμο, τα Ιταλικά αντικαταστάθηκαν από τα Ρωσσικά.»

Στον πρώτο τόμο του Studia Mathematica, ο Banach δημοσίευσε το άρθρο *Sur les fonctionelles linéaires*, σε δύο μέρη. Το άρθρο περιείχε εξαιρετικά σημαντικές ιδέες. Στο πρώτο του μέρος, έδινε μία απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος επέκτασης γραμμικών συναρτησοειδών, και μερικές απλές αλλά σημαντικές συνέπειές του. Στις μέρες μας, το θεώρημα αυτό είναι γνωστό σαν *Θεώρημα Hahn-Banach.* Ο Γερμανός μαθηματικός Hans Hahn το είχε αποδείξει νωρίτερα, όμως ο Banach, που δεν παρακολουθούσε στενά τη βιβλιογραφία, αγνοούσε την ύπαρξή του. Στο δεύτερο μέρος, ο Banach εισήγαγε μία σειρά σημαντικών εννοιών και απεδείκνυε πλήθος σπουδαίων θεωρημάτων. Μεταξύ άλλων, εισήγαγε την έννοια του συζυγούς τελεστή, την ασθενή συμπάγεια, και απέδειξε μία πρώτη μορφή του θεωρήματος κλειστού γραφήματος, το οποίο θα τελειοποιούσε ο ίδιος λίγο αργότερα.

Το 1931, μία νέα σειρά «Μαθηματικών Μονογραφιών» άρχισε να εκδίδεται με οικονομική ενίσχυση από το Εθνικό Ίδρυμα Πολιτισμού. Την εκδοτική επιμέλεια είχαν οι Banach και Steinhaus από την Lvov, και οι Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz και Sierpinski από τη Βαρσοβία. Ο Kuratowski πίστευε ότι η δημιουργία αυτής της σειράς ήταν καθοριστική για το μέλλον των μαθηματικών στην Πολωνία. Ιδού πώς την περιγράφει:

«Ένα από τα πιό σημαντικά γεγονότα για τα Πολωνικά μαθηματικά ήταν η δημιουργία της σειράς των Μαθηματικών Μονογραφιών, στα 1931. Οι προηγούμενες εκδοτικές δραστηριότητες εξαντλούνταν στη δημοσίευση σύντομων ερευνητικών εργασιών από τα περιοδικά Fundamenta Mathematicae και Studia Mathematica. Είχε όμως έρθει η ώρα για μία πιό ουσιώδη σύνθεση των επιτευγμάτων των Πολωνών μαθηματικών, ή ακόμα και τη σύνθεση όλων των κλάδων των μαθηματικών στους οποίους οι Πολωνοί μαθηματικοί είχαν εξαιρετικά σημαντική συνεισφορά. Το αρχικό σχέδιο περιλάμβανε την έκδοση μονογραφιών στις περιοχές της συναρτησιακής ανάλυσης (Τόμος 1 - Opérations linéaires του Banach), της θεωρίας του ολοκληρώματος (Τόμος 2 - Théorie de l' integrale του Saks), της τοπολογίας (Τόμος 3 - Kuratowski), της υπόθεσης του συνεχούς (Τόμος 4 - Sierpinski), και της θεωρίας των ορθογώνιων σειρών (Τόμος 5 - Steinhaus και Kaczmarz).»

Στο αρχικό σχέδιο προστέθηκε και το βιβλίο Trigonometric series του Zygmund (Σημείωση: κυκλοφορεί στα ελληνικά από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης). Όλα αυτά τα βιβλία ήρθαν στο φώς μέσα σε εκπληκτικά σύντομο χρονικό διάστημα. Το 1935 είχαν όλα εκδοθεί, και παραμένουν κλασικά στο είδος τους. Το βιβλίο του Banach έγινε δεκτό με ενθουσιασμό. Πρώτοι απ' όλους αντέδρασαν οι Αμερικανοί. Ο Tamarkin, σχολιάζοντάς το στο Bulletin of the American Mathematical Society, τον τοποθέτησε μεταξύ των μεγάλων της ανάλυσης: Volterra, Fredholm, Hilbert, Hadamard, Frechet, Riesz. Έγραφε: «η Theory of Linear Operators είναι ούτως ή άλλως γοητευτική, η σημασία της όμως εκτιμάται περισσότερο από τις πολυάριθμες όμορφες εφαρμογές της».

Το βιβλίο είχε κυκλοφορήσει νωρίτερα στα Πολωνικά, το 1931. Ο τίτλος του, Teoria operacyj. Tom I. Operacje liniowe, έδειχνε ότι ο Banach είχε σκοπό να προχωρήσει πέρα από την γραμμική συναρτησιακή ανάλυση, στη μελέτη των μη γραμμικών τελεστών. Ο δεύτερος όμως τόμος δεν ολοκληρώθηκε ποτέ, αν και, αργότερα, ο Banach ανέπτυξε μία θεωρία πολυωνυμικών τελεστών μαζί με τους συνεργάτες του Mazur και Orlicz. Η πρώτη έκδοση του βιβλίου περιείχε την αφιέρωση «A Madame Lucie Banach», ήταν 256 σελίδων, και κόστιζε 3 δολλάρια.

Το 1931, ο Banach δημοσίευσε άλλα τέσσερα άρθρα. Το τρίτο χρησιμοποιούσε το Θεώρημα του Baire για να αποδείξει (με εξαιρετικά απλό τρόπο) την ύπαρξη συνεχούς συνάρτησης που δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο. Αυτό ήταν γνωστό από την εποχή του Weierstrass, ο οποίος όμως είχε χρησιμοποιήσει πολύπλοκες κατασκευές για να το αποδείξει.

Μέχρι το 1936, ο Banach είχε γράψει 47 εργασίες, και είχε την μεγάλη τιμή να προσκληθεί σαν κύριος ομιλητής στο International Congress του Oslo. Διάλεξε να μιλήσει για την «Θεωρία Τελεστών και τη σημασία της στην Ανάλυση». Ο Antoni Zygmund, καθηγητής τότε στο Wilno, και κατόπιν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Chicago και πατέρας της Αμερικανικής σχολής της αρμονικής ανάλυσης, έγραψε το 1938 για τη συνάντηση του Oslo:

«Η συμμετοχή στο Oslo δεν ήταν μεγάλη. Οι σύνεδροι ήταν μόλις 500, λίγοι σε σχέση με τους 1200 της Bologna και τους 700 της Ζυρίχης. Σοβαρός λόγος γι' αυτό ήταν το πολιτικό κλίμα. Οι Ιταλοί αρνήθηκαν κατηγορηματικά να συμμετάσχουν, αντιδρώντας στον διεθνή αποκλεισμό που είχε επιβληθεί στην Ιταλία. Οι Ρώσσοι δεν εμφανίστηκαν κι αυτοί, αν και είχαν αρχικά υποσχεθεί ότι θα συμμετείχαν. Ακόμα και οι Γερμανοί, που συνήθως ήταν πολυάριθμοι και πήγαιναν παντού, ήταν απόντες. Αυτό ερμηνεύτηκε σαν αντίδραση στο ότι οι Νορβηγοί δεν είχαν στείλει αντιπροσωπεία στη γιορτή του Πανεπιστημίου της Χαϊδελβέργης, νωρίτερα τον ίδιο χρόνο.

Οι Αμερικανοί είχαν τη μεγαλύτερη ομάδα, με 70 μαθηματικούς. Την Πολωνία εκπροσώπησαν οι: Borsuk, Eilenberg, Gruzewska, Lubelski, Sierpinski, Zarankiewicz από τη Βαρσοβία, Banach, Kaczmarz, Schauder, Zylinski από την Lvov, Golab, Wazewski, Zaremba από την Κρακοβία, και ο Zygmund από το Wilno.

Ως συνήθως, υπήρχαν δύο ειδών ομιλίες: οι κύριες και οι ομιλίες ανά κλάδο. Ο αριθμός των κύριων ομιλιών είναι πολύ περιορισμένος: γίνονται το πρωί, και κρατούν μία ώρα. Οι οργανωτές δίνουν αυτές τις ομιλίες σε εξαιρετικούς μαθηματικούς, οι οποίοι περιγράφουν τις γενικές κατευθύνσεις ενός κλάδου στον οποίο έχουν ηγετικό ρόλο. Μιά τέτοια πρόσκληση θεωρείται πάντα πολύ τιμητική. Ο Banach εκπροσώπησε τους Πολωνούς μαθηματικούς με τέτοια διάλεξη.»

Ακριβώς πριν από τον πόλεμο, ο Banach γνώρισε μεγάλες τιμές. Τον Απρίλιο του 1939 εξελέγη Πρόεδρος της Πολωνικής Μαθηματικής Εταιρείας, της οποίας ήταν συνιδρυτής είκοσι χρόνια νωρίτερα. Η Εταιρεία είχε πολύ έντονη δραστηριότητα. Μεταξύ άλλων, συντόνιζε τις επισκέψεις διάσημων Ευρωπαίων μαθηματικών στην Πολωνία, για διαλέξεις και συνεργασία με τους Πολωνούς μαθηματικούς. Μεταξύ αυτών ήταν οι: P. Aleksandrov, E. Borel, E. Cartan, R. Frechet, H. Hardy, L. Kantorovich, H. Lebesgue, S. Lefschetz, N. Luzin, F. Riesz, I. Vinogradov και E. Zermelo.

Στις 9 Ιουνίου του 1939, ο Banach έλαβε βραβείο 20.000 zlotys (ποσό αντίστοιχο του ετήσιου μισθού καθηγητή Αμερικανικού Πανεπιστημίου της εποχής) από την Πολωνική Ακαδημία Επιστημών, για το άρθρο του Sur les fonctionelles linéaires. Ήταν το πρώτο τέτοιο βραβείο που δινόταν σε μαθηματικό, και το μεγαλύτερο σε αξία που δόθηκε ποτέ. Το ποσό κατατέθηκε στο λογαριασμό του, όμως ο Banach δεν μπόρεσε να το εισπράξει ποτέ. Ξέσπασε ο πόλεμος, και όλοι οι λογαριασμοί πάγωσαν. Η τελετή της απονομής θα γινόταν τον Οκτώβριο, με το ξεκίνημα της νέας ακαδημαϊκής χρονιάς. Όμως ο πόλεμος άρχισε το Σεπτέμβριο, και όλες οι γιορτές αναβλήθηκαν. Την 1η Οκτωβρίου, ο Σοβιετικός στρατός είχε καταλάβει την Lvov.

## 10.6 Scottish Café

Όπως γράφει ο Zygmund, η Lvov ήταν μία πολύ ζωντανή και ευχάριστη πόλη στη διάρκεια του μεσοπολέμου: η γενικευμένη αισιοδοξία και η συσσωρευμένη ενέργεια που απελευθερώθηκε με την ανακήρυξη της ανεξάρτητης Πολωνίας, ωθούσαν τους ανθρώπους να βγούν από τα σπίτια τους, στις πλατείες, στους δρόμους και στα μαγαζιά.

Η γειτονιά της Academicka Street, πολύ κοντά στο Πανεπιστήμιο, ήταν ένα από τα στέκια των διανοουμένων της πόλης. Στο νούμερο 22 βρισκόταν το ζαχαροπλαστείο του Zalewski, στο οποίο σύχναζαν οι Lomnicki, Steinhaus και Kuratowski. Πολύ κοντά του βρίσκονταν το Café Roma και το Scottish Café. Αρχικά, οι μαθηματικοί συναντιούνταν στο Café Roma κάθε Σαββατόβραδο, μετά τις εβδομαδιαίες συναντήσεις του τοπικού παραρτήματος της Πολωνικής μαθηματικής εταιρείας. Οι συναντήσεις γίνονταν στην αίθουσα σεμιναρίων του Πανεπιστημίου, και ήταν πολύ σύντομες. Αμέσως μετά, η συζήτηση μεταφερόταν στο Café Roma. Ο Banach άρχισε να πηγαίνει μαζί τους, και εξελίχθηκε σε καθημερινό θαμώνα του μαγαζιού. Πολύ σύντομα όμως εκνευρίστηκε με τον τρόπο που ο ιδιοκτήτης αντιμετώπιζε τα χρέη του, και μετέφερε όλη την παρέα στην απέναντι γωνία, στο Scottish Café.

Ο εικονογραφημένος οδηγός της Lvov του 1925, σημειώνει ότι το Scottish Café βρισκόταν στο 9 της Academicka, ανήκε στον κύριο Zielinski, και ήταν στέκι φίλων του αθλητισμού και της λογοτεχνίας, και ανθρώπων του Πανεπιστημίου. Το βράδυ είχε καλή ζωντανή μουσική. Ο συγγραφέας του οδηγού δεν κάνει ειδική μνεία στους μαθηματικούς: ως το 1925, το Scottish δεν είχε ακόμα αποκτήσει την εύνοια του Banach.

Το Scottish Café είχε Βιεννέζικη διακόσμηση. Οι μαρμάρινες επιφάνειες των μικρών τραπεζιών του ήταν θα έλεγε κανείς ειδικά φτιαγμένες για να φιλοξενήσουν μαθηματικούς τύπους. Στην αρχή ο ιδιοκτήτης δεν ήταν και τόσο ενθουσιώδης με αυτήν την δραστηριότητα. Όμως, μετά από λίγο ο Zielinski συνήθισε να μην διαμαρτύρεται για την «καταστροφή» της περιουσίας του (αργότερα, η κυρία Banach τον λυπήθηκε και αγόρασε ένα πολυσέλιδο τετράδιο, το οποίο εξελίχθηκε στο φημισμένο Scottish book). Στο κάτω-κάτω, αυτοί που κάθονταν στα τραπέζια του δεν ήταν τυχαίοι έφηβοι ταραξίες, αλλά σοβαροί καθηγητές του Πανεπιστημίου και του Πολυτεχνείου.

Οι συναντήσεις των μαθηματικών στο Scottish Café ήταν αρχικά ακανόνιστες, πολύ σύντομα όμως έγιναν καθημερινή συνήθεια, και πήραν τα χαρακτηριστικά αληθινής ιεροτελεστίας στην οποία συμμετείχαν όλο και περισσότεροι. Τα αρχικά «μέλη» ήταν οι Banach, Stozek, Ruziewicz, Steinhaus, Kaczmarz, Zylinski, και ο πιό κοντινός συνεργάτης του Banach, ο Mazur. Στην ομάδα προσχώρησαν αργότερα οι Nikliborc, Auerbach, Schreier, Schauder, Kuratowski, Nikodym, Ulam, Eilenberg, Orlicz, Eidelheit, Kac, και Birnbaum. Μαζεύονταν στο καφενείο γύρω στις 5 με 7 το απόγευμα, κάθονταν πάντα στα ίδια τραπέζια, και δούλευαν ως αργά τη νύχτα με απόλυτη συγκέντρωση, διακοσμώντας τα τραπέζια του Zielinski με μαθηματικούς τύπους. Όταν όμως λέμε ότι «δούλευαν με απόλυτη συγκέντρωση», δεν είμαστε εντελώς ακριβείς: δεν υπήρχε συνάντηση χωρίς αστεία, ζωηρές συζητήσεις, φωνές, και ποτό. Ο Banach, για παράδειγμα, έπινε τεράστιες ποσότητες καφέ και κονιάκ, και κάπνιζε δεκάδες τσιγάρα.

Ούτε οι συζητήσεις ήταν αποκλειστικά μαθηματικές. Ο Stozek, για παράδειγμα, έπαιζε συχνά σκάκι με τον Nikliborc, και οι υπόλοιποι έπιναν τριγύρω και τους πείραζαν. Ο Auebarch ήταν επίσης μανιώδης σκακιστής. Κανένας δεν παραπονιόταν για το μέτριο φαγητό και ποτό, όλα καταναλώνονταν σε μεγάλες ποσότητες. Ο Ulam θυμάται την ατμόσφαιρα της εποχής:

«Ο Kuratowski και ο Steinhaus εμφανίζονταν αραιά και πού. Σύχναζαν σε ένα ευγενέστερο τεϊοποτείο που προσέφερε τα καλύτερα γλυκά στην Πολωνία.

Ήταν δύσκολο να ξεπεράσεις τον Banach, είτε στη συζήτηση είτε στο ποτό. Συζητούσαμε προβλήματα που προτείνονταν επί τόπου, χωρίς να βρούμε τη λύση μετά από πολλές ώρες σκέψης. Την επόμενη μέρα, ο Banach θα ερχόταν κρατώντας διάφορα χαρτάκια που περιείχαν το σχήμα των αποδείξεων που είχε συμπληρώσει. Αν δεν ήταν τέλειες ή αν είχαν κάποιο μικρό λάθος, ο Mazur αναλάμβανε να μπαλώσει τις ατέλειες και να τις φέρει σε ικανοποιητική μορφή.

Περιτό να πούμε ότι οι μαθηματικές συζητήσεις διακόπτονταν από κουβέντα γύρω από την επιστήμη, το πανεπιστημιακό κουτσομπολιό, την πολιτική, την κατάσταση στην Πολωνία. Το «υπόλοιπο σύμπαν» για να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση του John von Neumann. Η άνοδος του Χίτλερ στην εξουσία και ο φόβος του παγκοσμίου πολέμου ήταν βασικά θέματα συζήτησης.»

Η αίσθηση του χιούμορ χαρακτήριζε την μαθηματική κοινότητα της Lvov. Πλήθος ανέκδοτα κυκλοφορούν για την εποχή εκείνη. Όταν κάποιος διαμαρτυρήθηκε στον Auerbach, πρόεδρο τότε του τμήματος μαθηματικών, για την ακαταστασία που επικρατούσε στη βιβλιοθήκη των μαθηματικών, αυτός απάντησε ότι «το χάος είναι καλύτερο από την τάξη. Μπορεί μέσα στο χάος να μην βρείς ποτέ αυτό που ψάχνεις, αποκλείεται όμως και να το χάσεις.»

Όλοι αισθάνονταν άνετα στην Lvov, ακόμα και οι ξένοι. Το 1938, ο Steinhaus κανόνισε μία επίσκεψη του Lebesgue στο Πανεπιστήμιο Jan Kazimierz, για να τον αναγορεύσει επίτιμο διδάκτορα. Να πώς περιγράφει ο Kac την ιστορία:

«Τον καιρό της επίσκεψής του, ο Lebesgue ενδιαφερόταν πιά μόνο για τα στοιχειώδη μαθηματικά. Αρνιόταν να συζητήσει για το μέτρο, το ολοκλήρωμα, τα σύνολα Borel και τα τοιαύτα. Έδωσε δύο διαλέξεις, εξαιρετικά όμορφες αλλά εξαιρετικά στοιχειώδεις: μία για κατασκευές με κανόνα και διαβήτη, και μία για ριζικά.

Η δεξίωση για τον Lebesgue έγινε στο Scottish Café. Οι παρόντες δεν ήταν παραπάνω από δεκαπέντε, οι καιροί ήταν πιά δύσκολοι. Ο σερβιτόρος μοίρασε τους καταλόγους, και, νομίζοντας ότι ο Lebesgue ήταν Πολωνός, έδωσε έναν και σ' αυτόν. Ο Lebesgue περιεργάστηκε τον κατάλογο με πολύ σοβαρό ύφος, και είπε: Merci, je ne mange que des choses bien définies (Ευχαριστώ, τρώω μόνο καλά ορισμένα πράγματα).»

Τα μαθηματικά ήταν φυσικά το κύριο θέμα των συναντήσεων. Ο Ulam τις θυμάται καλά:

«Υπήρχαν σύντομες εξάρσεις στη συζήτηση, δυό-τρείς γραμμές γράφονταν πάνω στο τραπέζι, κάποιος ξεσπούσε ξαφνικά σε γέλια, και ακολουθούσαν μακρές περίοδοι σιωπής, όπου πίναμε καφέ και κοιτούσαμε ανέκφραστα ο ένας τον άλλον. Οι πελάτες στα διπλανά τραπέζια έμοιαζαν απορημένοι με την αλλόκοτη συμπεριφορά μας. Όμως, αυτή η επιμονή και η εξάσκηση στη συγκέντρωση συνιστούν το πιό σημαντικό προαπαιτούμενο για την αυθεντική και δημιουργική μαθηματική δουλειά.»

Ο Steinhaus παραδεχόταν ότι το τραπέζι στο ο οποίο κάθονταν ο Banach με τον Mazur (αργότερα, και με τον Ulam), ήταν το κέντρο του Scottish Café. Μία συνάντηση κράτησε 17 ώρες. Το αποτέλεσμά της ήταν ένα θεώρημα για τους χώρους Banach, το οποίο κανένας δεν έγραψε στο χαρτί. Σήμερα, κανείς δεν ξέρει πώς να το αποδείξει, γιατί, όπως έγραψε ο Steinhaus, όταν έκλεισε το καφενείο, ο ιδιοκτήτης καθάρισε επιμελώς το τραπέζι. Αυτή ήταν η μοίρα πολλών από τα θεωρήματα που απέδειξαν ο Banach και οι φίλοι του. Ο Steinhaus θυμάται τον τρόπο δουλειάς του Banach:

«Ο Banach είχε εκείνη την καθαρότητα σκέψης που ο Kazimierz Bartel κάποτε απεκάλεσε «σχεδόν δυσάρεστη». Ποτέ δεν εμπιστευόταν την τύχη: συχνά έλεγε ότι η «ελπίδα είναι η μητέρα των ηλιθίων». Χρησιμοποιούσε αυτόν τον αφορισμό εναντίον της αισιοδοξίας, τόσο στα μαθηματικά όσο και στην πολιτική. Έμοιαζε με τον Hilbert σ' αυτό το θέμα: αφού απέκλειε με παραδείγματα όλα τα μονοπάτια που δεν θα οδηγούσαν στη λύση, έριχνε όλο το βάρος στον μοναδικό δρόμο που απέμενε. Πίστευε ότι η λογική ανάλυση ενός προβλήματος, τελείως αντίστοιχη με την ανάλυση που κάνει ένας σκακιστής για μία δύσκολη θέση, πρέπει να οδηγεί είτε στην απόδειξη ενός θεωρήματος ή σε ένα αντιπαράδειγμα.

Πρέπει πάντως να πώ ότι πολλά αξιόλογα αποτελέσματα του Banach και της σχολής του χάθηκαν, λόγω της έλλειψης σχολαστικότητας που χαρακτήριζε τα μέλη της σχολής, και, πρώτον απ' όλους, τον ίδιο τον Banach. Αυτό ήταν μεγάλη ζημιά για την Πολωνική επιστήμη.»

Ο Andrzej Turowicz συμπληρώνει:

«Δυστυχώς, αυτό δεν είναι υπερβολή. Πιστεύω ότι χάθηκαν περισσότερα απ' όσα σώθηκαν. Φυσικά, ο Banach δημοσίευσε τα σημαντικότερα αποτελέσματά του, όχι όμως όλα. Μπορώ να εξηγήσω τους λόγους. Παρήγαγε με τέτοιο ρυθμό, που ήταν ανίκανος να γράψει και να δημοσιεύσει τα θεωρήματά του. Κάθε πρόβλημα που έλυνε τον οδηγούσε σε νέα προβλήματα. Κατέληξε να μεταβιβάζει προφορικά τις ανακαλύψεις του στην κοινότητα της Lvov. Αν δύο ή τρείς άνθρωποι κάθονταν να γράψουν όσα τους έλεγε, τότε όλο το έργο του θα είχε σωθεί. Όμως, τελείως φυσικά, όλοι ήταν απορροφημένοι με τη δική τους δουλειά: δεν θα χαράμιζαν το χρόνο τους για να αντιγράψουν τα θεωρήματα κάποιου άλλου. Αν το μαγνητόφωνο είχε ανακαλυφθεί στην εποχή του, θα υπήρχε ένας απλός τρόπος για να περάσει στην ιστορία όλη η δουλειά του. Όμως ο Banach έζησε πριν από αυτήν την χρυσή εποχή.»

Έχει ειπωθεί και γραφτεί, στην Πολωνία και αλλού, ότι η κουλτούρα της δουλειάς στο καφενείο είναι «ο Πολωνικός δρόμος για την μαθηματική έρευνα». Με αυτόν τον όρο περιγράφεται η ομαδική εργασία σε ανορθόδοξα μέρη που οδηγεί στη λύση ερευνητικών προβλημάτων. Ο Banach δικαιούται τον τίτλο του δημιουργού αυτού του στύλ δουλειάς.

Το Scottish Book: τι ήταν και πώς προέκυψε; Σήμερα, είναι ένα από τα πλέον αξιοσέβαστα κειμήλια του μαθηματικού κόσμου. Όπως συμβαίνει με κάθε θρύλο, μερικές από τις λεπτομέρειες της ιστορίας του διαφέρουν ανάλογα με το πρόσωπο που τις αφηγείται. Ξεκίνησε πολύ απλά, σαν ένα κανονικό σχολικό τετράδιο με χοντρό, ζωγραφιστό εξώφυλλο, το οποίο αγόρασε η σύζυγος του Banach από ένα κατάστημα ψιλικών, στην τιμή των δυόμιση zlotys. Προφανώς ήταν αηδιασμένη από την αγαπημένη ασχολία του συζύγου της και των φίλων του να λερώνουν τα τραπέζια του Café με τους λογαριασμούς και τα μαθηματικά τους προβλήματα. Είχε συμφωνηθεί να φυλάσσουν το τετράδιο στο βεστιάριο και να το παραδίδουν στους μαθηματικούς όταν το ζητούσαν, αν και ο Steinhaus ισχυριζόταν ότι φρουρός του Scottish Book δεν ήταν ούτε ο υπάλληλος του βεστιαρίου, ούτε ο σερβιτόρος, ούτε καν ο ιδιοκτήτης, αλλά ο ταμίας του Café. Γράφει ακόμα:

«Τα προβλήματα του βιβλίου γράφονταν στις περιττές σελίδες διαδοχικών φύλλων, και οι πίσω σελίδες έμεναν κενές περιμένοντας τις απαντήσεις που ίσως δίνονταν στο μέλλον.»

Οποιοσδήποτε ενδιαφερόταν, μπορούσε να θέσει προβλήματα στο βιβλίο, και οποιοσδήποτε μπορούσε να γράψει τις λύσεις του. Με μία έννοια, το βιβλίο ήταν μία ανεπίσημη κοινή επιστημονική έκδοση. Ο Kuratowski περιγράφει κι αυτός τη γέννηση του Scottish Book:

«Στη διάρκεια των πολυάριθμων συναντήσεων που γίνονταν στο Scottish Café (το αγαπημένο café των μαθηματικών της Lvov), το πλήθος των νέων προβλημάτων που διατυπώνονταν αυξανόταν με τέτοιους ρυθμούς που κάποια στιγμή αποφασίστηκε ότι ήταν σκόπιμο να γράφονται σε ένα ειδικό σημειωματάριο, το οποίο θα φυλαγόταν μόνιμα στο Café. Έτσι, γεννήθηκε το θρυλικό Scottish Book. Απέκτησε σημαντική επιστημονική, συναισθηματική, και ιστορική αξία, λόγω των ονομάτων που συνεισέφεραν σ' αυτό: ανάμεσά τους βρίσκονταν και πολλοί διακεκριμένοι ξένοι.»

Το πρώτο πρόβλημα που μπήκε στο Βιβλίο, τέθηκε από τον Banach στις 17 Ιουλίου του 1935. Μέχρι το 1941, που το Βιβλίο έκλεισε, 193 προβλήματα είχαν καταγραφεί από δεκάδες Πολωνούς και ξένους μαθηματικούς. Δεν ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένα ανάμεσα στους πιστούς θαμώνες της ιεροτελεστίας του Scottish Café. Ο Banach προσέφερε 14 μόνος του (και άλλα 11 από κοινού με τους Mazur και Ulam), ο Ulam 40 (κι άλλα 15 μαζί με άλλους), ο Mazur 24 (κι άλλα 19 μαζί με άλλους). Αυτοί οι τρείς σαφώς κυριαρχούσαν στη συγκομιδή. Ο Steinhaus προσέφερε 10 προβλήματα, και οι άλλοι τακτικοί θαμώνες (Ruziewicz, Auerbach, Kac, Eilenberg, Orlicz, Nikliborc και Schreier) από 5-6 ο καθένας. Σε διάφορα σημεία εμφανίζονται προβλήματα που έθεταν διακεκριμένοι προσκεκλημένοι επισκέπτες: Frechet, Zygmund, Offord, Kampe, de Feriet, von Neumann, Sobolev, και Lyusternik.

Οι συμμετοχές δεν ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένες στο χρόνο. Από τα 193 προβλήματα του Βιβλίου, τα 122 μπήκαν σ' αυτό στους πρώτους έξη μήνες της ζωής του. Κατόπιν άρχισε η φθίνουσα πορεία: 32 το 1936, 13 το 1937, 9 το 1938, 4 το 1939, 7 το 1940, και 4 το 1941. Όπως γράφει ο Ulam, «πολλά από τα προβλήματα υπήρχαν πριν το 1935. Γινόταν λεπτομερής ανάλυση για την πατρότητά τους πριν αποδοθούν σε κάποιο συγκεκριμένο άτομο. Η πλειοψηφία των προβλημάτων που προτείνονταν συζητούνταν σε βάθος πριν θεωρηθούν άξια για να καταχωρηθούν επισήμως στο βιβλίο. Μερικές όμως φορές τα προβλήματα λύνονταν επί τόπου, και τότε οι απαντήσεις έμπαιναν αμέσως στο πίσω φύλλο.»

Στα λίγα χρόνια της πραγματικής του ζωής, το Scottish Book αντανακλούσε την ίδια τη ζωή της Lvov. Αμέσως μετά την αρχή του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου, την 1η Σεπτεμβρίου του 1939, η πόλη προσαρτήθηκε από τη Σοβιετική Ένωση, και ονόματα Σοβιετικών μαθηματικών όπως οι Bogolubov, Aleksandrov, Sobolev και Lyusternik άρχισαν να εμφανίζονται στο βιβλίο, σημάδι του ενδιαφέροντος των νέων δυνάμεων για τη δουλειά της μαθηματικής σχολής της Lvov. Το τελευταίο πρόβλημα που μπήκε στο βιβλίο ήταν του Steinhaus στις 31 Μαίου του 1941, και περιείχε μία μάλλον παράξενη συλλογή από αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούσαν διαμερίσεις σπίρτων σε ένα σπιρτόκουτο! Μετά το ξεκίνημα των εχθροπραξιών ανάμεσα στο Ράιχ και τη Σοβιετική Ένωση, και την κατάληψη της πόλης από τα Γερμανικά στρατεύματα το καλοκαίρι του 1941, το βιβλίο σταμάτησε να δέχεται προβλήματα.

Πριν ξεσπάσει ο πόλεμος, κάποιοι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να κάνουν σχέδια για τη φύλαξη του Βιβλίου. Σύμφωνα με τον Ulam,

«...το καλοκαίρι του 1939, στην τελευταία μου επίσκεψη στη Lvov και λίγες μέρες πριν την επιστροφή μου στις Ηνωμένες Πολιτείες, συζητούσα με τον Mazur το ενδεχόμενο του πολέμου (Σημ: από το 1935 και μετά, ο Ulam μετακόμισε στο Princeton, και μετά στο Harvard, περνούσε όμως τα καλοκαίρια του στην Πολωνία). Γενικά, οι άνθρωποι περίμεναν άλλη μία κρίση τύπου Μονάχου, και δεν ήταν προετοιμασμένοι για έναν Παγκόσμιο Πόλεμο. Ο Mazur είπε:

«Το ενδεχόμενο παγκοσμίου πολέμου δεν αποκλείεται. Τι θα κάνουμε με το Scottish Book και τις ανέκδοτες συνεργασίες μας; Πηγαίνεις στις Ηνωμένες Πολιτείες, και εκεί θα είσαι ασφαλής. Αν βομβαρδιστεί η πόλη, θα μαζέψω τα χειρόγραφα και το Βιβλίο, θα τα βάλω σε ένα κιβώτιο και θα το θάψω.»

Αποφασίσαμε ακόμα και την τοποθεσία: δίπλα στο τέρμα, σε ένα γήπεδο ποδοσφαίρου στα προάστια της πόλης. Δεν ξέρω αν έγινε ακριβώς έτσι. Πάντως, το Scottish Book επέζησε στον πόλεμο, χωρίς να πάθει το παραμικρό. Μετά τον πόλεμο, ο Steinhaus μου έστειλε ένα αντίγραφο. Το 1957, το μετέφρασα στα Αγγλικά και το έστειλα σε διάφορους φίλους-μαθηματικούς, στις Ηνωμένες Πολιτείες και αλλού.»

Στο International Congress του Εδιμβούργου, το 1958, ο Ulam ετοίμασε φωτοτυπημένα αντίγραφα του Scottish Book για τους συνέδρους. Εξαιτίας του ονόματός του, αρχικά προκάλεσε μεγάλη αίσθηση ανάμεσα στους οικοδεσπότες Σκωτσέζους, οι οποίοι απογοητεύτηκαν όταν έμαθαν ότι η σχέση του με τη Σκωτία ήταν μία απλή συνωνυμία.

Πολλά από τα προβλήματα του Scottish Book έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της συναρτησιακής ανάλυσης και άλλων κλάδων των μαθηματικών. Το πρόβλημα του Mazur (υπ' αριθμόν 153, με ημερομηνία 6 Νοεμβρίου 1936) για την ύπαρξη βάσης Schauder στους διαχωρίσιμους χώρους Banach έμεινε ένα από τα κεντρικά ανοικτά προβλήματα της συναρτησιακής ανάλυσης μέχρι το 1972, οπότε ο

Σουηδός μαθηματικός Per Enflo (τώρα στο Πανεπιστήμιο Kent του Ohio) έδωσε αρνητική απάντηση. Ο Mazur είχε υποσχεθεί ένα έπαθλο -μία ζωντανή χήνα- για όποιον έλυνε το πρόβλημα, και το βραβείο δόθηκε πραγματικά από τον ίδιο το Mazur στον Enflo, ο οποίος επισκέφτηκε τη Βαρσοβία και έδωσε διαλέξεις για τη λύση του. Ήταν ένα γεγονός που προβλήθηκε πολύ από τα μέσα. Ήταν συνηθισμένο τα προβλήματα του Βιβλίου να συνοδεύονται από βραβεία. Ο Mazur ήταν ο πιό δραστήριος σ' αυτόν τον τομέα, αλλά με την εξαίρεση της χήνας, τα βραβεία του ήταν μάλλον πεζά: δυό-τρία μπουκάλια μπύρα ή ένα μπουκάλι κρασί. Ο ευπατρίδης Steinhaus προσέφερε μόνο δύο βραβεία: το ένα ήταν 100 γραμμάρια χαβιάρι, και το άλλο ένα δείπνο στο σικ εστιατόριο του George. Ο Banach υποσχέθηκε βραβείο μόνο μία φορά: ένα μπουκάλι κρασί.

Οι ξένοι εμφανίζονται στις σελίδες του Βιβλίου με πιό εξωτικά βραβεία. Ο von Neumann με ένα μπουκάλι ουίσκυ μέτρου $> 0$, ο Ward με ένα γεύμα στο Cambridge, και ο Wavre με φοντύ στη Γενεύη. Δεν είναι σαφές αν κάλυπταν και τα έξοδα του ταξιδιού. Οι Σοβιετικοί κατακτητές προσέφεραν εορταστικά οινοπνευματώδη: μπράντυ από τον Bogolubov, σαμπάνια από τον Lyusternik. Εκείνη την εποχή, ο τοπικός πληθυσμός, εξαντλημένος από την πείνα και την κατοχή της πόλης, δεν είχε καμμία διάθεση για γιορτές, και στράφηκε σε πιό πρακτικά βραβεία. Την παγωμένη 8η Φεβρουαρίου του 1940, ο Stanislaw Saks προσέφερε ένα κιλό μπέικον για ένα πρόβλημα σχετικό με υφαρμονικές συναρτήσεις.

Μετά τον πόλεμο, το πρωτότυπο του Scottish Book ήρθε στην κατοχή της γυναίκας του Banach, η οποία το έφερε στην Wroclaw. Μετά το θάνατο της Lucja Banach το 1954 -στον τάφο της γράφτηκε «σύζυγος μαθηματικού»- το Scottish Book πέρασε στα χέρια του γιού του Banach, νευροχειρουργού στη Βαρσοβία, που το έχει ως τώρα. Στη δεκαετία του 1980, εκτέθηκε στο Banach Center του Ινστιτούτου Μαθηματικών της Πολωνικής Ακαδημίας Επιστημών στην Βαρσοβία. Το 1981, το Βιβλίο εκδόθηκε από την Birkhäuser, με μαθηματικά και ιστορικά σχόλια από τον Daniel Mauldin.

Ο Steinhaus, ο οποίος εγκαταστάθηκε στην Wroclaw, παρήγγειλε να του αγοράσουν ένα νέο τετράδιο. Το ονόμασε New Scottish Book. Χρησιμοποιείται από το 1946, και τα περιεχόμενά του εκδίδονται τακτικά στο *Colloquium Mathematicum*, ένα μαθηματικό περιοδικό που ίδρυσε ο Edward Marczewski. Έπαιξε ρόλο ανάλογο με αυτόν του Scottish Book, αν βέβαια αφαιρέσουμε τον Banach και το Scottish Café. Αρχικά φυλαγόταν στην κοινή βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου της Wroclaw και του Τομέα Μαθηματικών του Πολυτεχνείου, και, μετά το 1970, μετακινήθηκε στο νέο κτίριο του Ινστιτούτου Μαθηματικών. Έτσι, συνεχίστηκε η παράδοση του Scottish Book.

## 10.7 Τα τελευταία χρόνια

Στις 17 Σεπτεμβρίου του 1939, μετά το σύμφωνο Ribbentrop-Molotov, η Σοβιετική Ένωση μπήκε στον πόλεμο, και, πολύ σύντομα, τα Σοβιετικά στρατεύματα κατέλαβαν την Lvov. Η Σοβιετική κατοχή συνοδεύτηκε από μαζικούς διωγμούς και ταλαιπωρία του Πολωνικού πληθυσμού.

Αμέσως ζητήθηκαν πληροφορίες για τον Banach. Οι Σοβιετικοί μαθηματικοί εκτιμούσαν πολύ τη συνεισφορά του στην επιστήμη, και είχαν δείξει πολλές φορές αυτήν τους την εκτίμηση. Έτσι, ο Banach διατηρούσε καλές σχέσεις με τους Ρώσους και τους Ουκρανούς. Το νέο καθεστώς του προσέφερε μία θέση καθηγητή στο Jan Kazimierz -το οποίο μετονομάστηκε σε Ivan Franko προς τιμήν ενός Ουκρανού ποιητή- την ίδια στιγμή που πλήθος Ουκρανοί έρχονταν να αναλάβουν θέσεις από το Κίεβο και το Χάρκοβο. Ο Banach έγινε κοσμήτορας της φυσικομαθηματικής σχολής και διευθυντής του τομέα μαθηματικής ανάλυσης. Στο ίδιο τμήμα, βρήκαν δουλειά οι Orlicz, Saks και Knaster. Μετά από πρόσκληση, ταξίδεψε στη Μόσχα. Το βιβλίο του *Theory of Linear Operations* μεταφράστηκε αμέσως στα Ουκρανικά. Σοβιετικοί μαθηματικοί όπως οι Bermant και Lyusternik ταξίδεψαν από τη Μόσχα στη Lvov. Όταν ο Bermant ρωτήθηκε ποιά ήταν τα πιό σπουδαία μαθηματικά κέντρα της Σοβιετικής Ένωσης, απάντησε: «η Μόσχα είναι στην πρώτη θέση. Για τη δεύτερη δεν είμαι βέβαιος. Ίσως το Leningrad, ίσως η Lvov».

Εκείνη την εποχή, η ζωή του Banach δεν άλλαξε πολύ. Δίδασκε, συνέχιζε την έρευνά του, είχε τις διοικητικές του ασχολίες, επισκεπτόταν το Scottish Café, και έγραφε σχολικά βιβλία. Στα τέλη του 1940, η «Κόκκινη Σημαία», επίσημη Σοβιετική εφημερίδα της Lvov εκείνη την περίοδο, αναφέρει με το αμίμητο στύλ της:

«...Στο Πανεπιστήμιο της Lvov, το καμίνι της γνώσης των Δυτικών επαρχιών της Δημοκρατίας μας, δουλεύουν πολλοί διακεκριμένοι επιστήμονες που - κάτω από τις εξαιρετικά ευνοϊκές συνθήκες που δημιουργεί η Σοβιετική δύναμη - προωθούν τα πλατιά τους προγράμματα. Στο Πανεπιστήμιο της Lvov υπάρχουν 65 επιστημονικά τμήματα και τομείς, και τα μέλη τους εργάζονται σε 477 διαφορετικά επιστημονικά προγράμματα.»

Παρακάτω, υπάρχουν συγκεκριμένες πληροφορίες για τον Banach:

«...Οι Καθηγητές Banach και Schauder γράφουν ένα εκπαιδευτικό βιβλίο θεωρητικής μηχανικής.»

Η ίδια εφημερίδα μάς πληροφορεί ότι το 1940 ο Banach εκλέχθηκε δημοτικόε σύμβουλος στην Lvov. Είναι γνωστό ότι χρησιμοποίησε την επιρροή του για να βοηθήσει την διωκόμενη Πολωνική κοινότητα. Οι πολύ στενοί δεσμοί του με τους Σοβιετικούς επιστήμονες συνεχίστηκαν. Ο Pavel Aleksandrov, σπουδαίος Σοβιετικός τοπολόγος, έγραψε αργότερα στον Kuratowski: «εκείνα τα χρόνια, γνωριστήκαμε καλά με τον Banach, τον οποίο είχα γνωρίσει στην Lvov. Μάς επισκέφτηκε πολλές φορές στη Μόσχα όπου είχα την τιμή να τον φιλοξενήσω και στο σπίτι μου». Την ίδια εποχή, ο Banach εκλέχτηκε αντεπιστέλλον μέλος της Ουκρανικής Ακαδημίας Επιστημών στο Κίεβο.

Η κατάργηση του συμφώνου Ribbentrop-Molotov και η Γερμανική εισβολή στην Σοβιετική Ένωση βρήκαν τον Banach στο Κίεβο, όπου παρακολουθούσε ένα μαθηματικό συνέδριο. Αμέσως επιβιβάστηκε σε ένα τραίνο -το τελευταίο που έφευγε από το Κίεβο προς την Lvov- και, αγνοώντας τον κίνδυνο, επέστρεψε στην οικογένειά του. Τον Ιούνιο του 1941, όταν τα στρατεύματα του Χίτλερ μπήκαν στην Lvov, οι Banach βρέθηκαν σε πολύ δύσκολη θέση. Ο Banach φοβόταν ότι οι Γερμανοί θα του ζητούσαν να λογοδοτήσει για τις εγκάρδιες σχέσεις του με τους Σοβιετικούς.

Αλλά και το γεγονός ότι ανήκε στην Πολωνική πνευματική ελίτ τον έθετε σε κίνδυνο. Συνελήφθη από την Gestapo με την κατηγορία ότι εμπορευόταν με γερμανικό συνάλλαγμα, αλλά αφέθηκε ελεύθερος μετά από λίγες εβδομάδες. Κάποιοι από τους νοικάρηδές του ήταν όπως φαίνεται μπλεγμένοι σε τέτοιες δραστηριότητες. Ακόμα και μέσα στη φυλακή, κατάφερε να αποδείξει μερικά θεωρήματα.

Ο Jósef Sieradzki, κάτοικος της Lvov στη διάρκεια της Σοβιετικής κατοχής, περιγράφει την ατμόσφαιρα που βασίλευε στην πόλη:

«Μπορώ να πώ χωρίς υπερβολή ότι πεθαίναμε κάθε φορά που ξημέρωνε. Ο ύπνος ήταν η μόνη μας ανακούφιση. Όμως, ακόμα κι αυτές οι σπάνιες ώρες που ο καθένας από μάς - κατάκοπος και εκνευρισμένος από την απαίσια καταναγκαστική εργασία που μάς επέβαλαν - έβρισκε καταφύγιο στον μακρινό και χαμένο κόσμο των παλαιών επιστημονικών του ενασχολήσεων, έπαψαν να υπάρχουν με τον ερχομό των Γερμανών.»

Ήταν μία τραγική εποχή. Με εντολή του Himmler, η πνευματική ελίτ της Lvov εξαφανίστηκε ολοκληρωτικά. Στην Κρακοβία, οι καθηγητές είχαν συλληφθεί με συνοπτικές διαδικασίες και είχαν σταλεί σε στρατόπεδα συγκέντρωσης δύο χρόνια νωρίτερα. Η εξολόθρευση των διανοουμένων της Lvov είχε σχεδιαστεί ήδη από το 1939. Είχαν καταρτιστεί δύο λίστες ανθρώπων που θα εκτελούνταν. Η πρώτη περιείχε ονόματα επιστημόνων που δούλευαν στην Πολυτεχνική και την Εμπορική Σχολή. Η δεύτερη, ονόματα καθηγητών του Πανεπιστημίου. Οι προετοιμασίες είχαν γίνει σχολαστικά: ακόμα και ο τόπος των εκτελέσεων είχε προεπιλεγεί. Τα δολοφονικά αυτά σχέδια εφαρμόστηκαν με πλήρη μυστικότητα, σε αντίθεση με τις προκλητικά δημόσιες εκτελέσεις της Κρακοβίας που είχαν φοβερό αντίκτυπο στην Δυτική κοινή γνώμη. Ειδικά εκπαιδευμένοι «εκκαθαριστές» εμφανίστηκαν, ανέλαβαν δράση ακριβώς πίσω από τα στρατεύματα που πήγαιναν μπροστά, έκαναν τη δουλειά, και εξαφανίστηκαν. Όλη αυτή η δραστηριότητα εμφανίστηκε ως ανεξάρτητη από την καθοδήγηση της Wehrmacht.

Τη νύχτα της 3ης Ιουλίου του 1941, 40 Πολωνοί επιστήμονες, καθηγητές, συγγραφείς και διανοούμενοι εκτελέστηκαν από τους Ναζί και τους Ουκρανούς εθνικιστές της «Nachtigall». Ανάμεσά τους ήταν οι φίλοι και συνάδελφοι του Banach, Wlodzimierz Stozek, Antoni Lomnicki, και Stanislaw Ruziewicz.

Αυτές οι εκτελέσεις ήταν μόνο η αρχή μιάς εκτεταμένης επίθεσης που είχε σκοπό την καταστροφή της πνευματικής ζωής της Lvov. Μετά τον πόλεμο, ο Jósef Sieradzki προσπάθησε να βρεί κάποια λογική εξήγηση για το μακελειό:

«...Τα Γερμανικά εγκλήματα είχαν τη θεωρία και τη μεθοδολογία τους. Αν κανείς μελετήσει την προέλευση και την ψυχολογία αυτών των εγκλημάτων, οδηγείται σε ένα πολύπλοκο και σκοτεινό τοπίο, ο στόχος όμως των εκτελέσεων της Lvov, την ίδια μέρα που ο Himmler επισκεπτόταν την πόλη, είναι τελείως προφανής. Τα πάντα έγιναν με αστραπιαία ταχύτητα, χωρίς προφάσεις και νομικές διαδικασίες. Η καταστροφή ολοκληρώθηκε τόσο γρήγορα που ακόμα και κάποιες Γερμανικές αρχές πιάστηκαν στον ύπνο. Λίγες μέρες μετά τις εκτελέσεις, απεσταλμένοι εταιριών πετρελαίου από το Βερολίνο, προσπάθησαν να πλησιάσουν τον Καθηγητή Pilat - διεθνούς κύρους ειδικό στην τεχνολογία του πετρελαίου - ο οποίος είχε μόλις δολοφονηθεί.

Υπάρχουν αποδείξεις για το ότι οι λίστες των θυμάτων είχαν καταρτιστεί από το 1938-39: Την ημέρα της επίθεσης, άνθρωποι της Gestapo έψαχναν δύο επιστήμονες που είχαν ήδη πεθάνει στην περίοδο 1939-41. Τον δερματολόγο Leszczynski και τον οφθαλμολόγο Bednarski. Πείστηκαν για το θάνατό τους μόνο όταν οι χήρες τους παρουσίασαν τα πιστοποιητικά θανάτου.

Σχεδόν όλα τα ονόματα της λίστας είχαν πλήθος δημοσιεύσεων, σημαντικές ανακαλύψεις, διεθνή βραβεία, διακρίσεις και μετάλλια. Οι Γερμανοί τους εξαφάνισαν, ακριβώς όπως είχαν κάνει μερικούς αιώνες νωρίτερα στο Gdansk, μόνο και μόνο γιατί ήταν Σλάβοι και Πολωνοί.»

Ο Banach επέζησε από αυτήν την επιδρομή. Οι συνθήκες όμως κάτω από τις οποίες αναγκάστηκε να ζήσει στη διάρκεια της Ναζιστικής κατοχής, ήταν πολύ σκληρές. Η Jadwiga Hallaunbrenner, μαθηματικός από την Lvov, που ο άντρας της Michal ήταν φυσικός, θυμάται:

«Ο Banach μάς επισκεπτόταν συχνά. Ο άντρας μου είχε καταφέρει να βρεί δουλειά στην Viehverband, μία επιχείρηση που παρασκεύαζε λουκάνικα δευτέρας διαλογής. Έφερνε στο σπίτι ένα κιλό κρέας τη βδομάδα, το χειρότερο είδος λουκάνικου. Κατέβαζα τα ρολλά της κουζίνας και έφτιαχνα ένα καζάνι φασόλια με κρέας. Το βράδυ μάς επισκέπτονταν ο Stefan Banach, ο Tadeusz Riedl, ο καθηγητής φιλολογίας Kazimierz Branczyk, και μερικοί άλλοι που δεν θυμάμαι. Ο Banach ήταν εξουθενωμένος, λιμοκτονούσε και έσβηνε, ενώ πριν τον πόλεμο ήταν πολύ δυνατός και τετράγωνος. Μετά το δείπνο, άρχιζαν τη συζήτηση: για την κατάσταση στο μέτωπο, την αναμονή των συμμάχων, το Ανατολικό μέτωπο, τα νέα στην Πολωνία, την Lvov, τις πιθανότητες επιβίωσης.»

Η άσχημη φυσική κατάσταση του Banach δεν ήταν μόνο αποτέλεσμα της γενικής πείνας, αλλά και της δουλειάς του: ήταν «εκτροφεύς ψειρών» στο Βακτηριολογικό Ινστιτούτο του Rudolf Weigl. Άρχισε να δουλεύει εκεί το φθινόπωρο του 1941. Το επάγγελμα αυτό είχε και τα καλά του. Μία ειδική κάρτα του Ινστιτούτου, η οποία του επέτρεπε να επιβιώσει με σχετική ασφάλεια στην κατοχή. Ο γιός του Ruziewicz θυμάται αυτήν την περίοδο:

«... Το Ινστιτούτο προσέλαβε σχεδόν όλους όσους είχαν άμεση ή έμμεση σχέση με την επιστήμη, δηλαδή την πλειοψηφία της διανόησης στην Lvov. Δούλευα κι εγώ στο Ινστιτούτο του Weigl. Καθόμασταν σε ένα μακρύ ξύλινο τραπέζι και ταΐζαμε τις ψείρες. Θυμάμαι ότι σχεδόν αυτόματα άρχισαν να σχηματίζονται κοινωνικές ομάδες. Υπήρχε ένα τραπέζι στο οποίο όλοι οι εκτροφείς ήταν καθηγητές των ανθρωπιστικών επιστημών. Ο Banach και ο Knaster κάθονταν στο ίδιο τραπέζι, και έδιναν την εντύπωση ότι ήταν απορροφημένοι σε μαθηματικές συζητήσεις. Γνωρίζω ότι στη διάρκεια του πολέμου ο Banach παρέδιδε μαθήματα στο γιό του Tadeusz Riedl.»

Ο Banach δούλεψε «στις ψείρες» μέχρι τον Ιούλιο του 1944, οπότε έληξε η Ναζιστική κατοχή. Στις 27 Ιουλίου, τα Σοβιετικά στρατεύματα ξαναμπήκαν στην Lvov. Ο Banach ανανέωσε τις Ρωσικές επαφές του και συμμετείχε ενεργά στην Πανσλαβική Αντιφασιστική Επιτροπή, μία οργάνωση που υποστήριζαν οι Σοβιετικοί. Η επιτροπή «...δημιουργήθηκε τον Αύγουστο του 1941, προωθούσε την αντίσταση των Σλάβων κατά του γερμανικού φασισμού, και ενημέρωνε την κοινή γνώμη για τα ναζιστικά εγκλήματα στη Σοβιετική Ένωση, την Πολωνία, τη Γιουγκοσλαβία, και άλλες χώρες». Εκείνη την εποχή, ο Sobolev συναντούσε συχνά τον Banach στο Uzkov, ένα θέρετρο λίγο έξω από τη Μόσχα:

«Παρά τα ίχνη που είχε αφήσει πάνω του ο πόλεμος, και παρά την αρρώστια που τον είχε εξασθενίσει, ο Banach διατηρούσε τη ζωντάνια στα μάτια του. Ήταν ο ίδιος κοινωνικός, ευχάριστος και γοητευτικός Stefan Banach που είχα δεί στην Lvov πριν τον πόλεμο. Έτσι τον θυμάμαι: σπάνια αίσθηση του χιούμορ, ενέργεια, όμορφη ψυχή, μεγάλο ταλέντο.»

Αμέσως προσφέρθηκε μία έδρα του Jagiellonian στον Banach. Την δέχτηκε με χαρά, αφού θα διευκόλυνε και τον επαναπατρισμό του από την Ουκρανική πλέον Lvov στην Πολωνία. Ο Banach παρέμενε πρόεδρος της Πολωνικής Μαθηματικής Εταιρίας, και η νέα - επιβεβλημένη από τους Σοβιετικούς- κυβέρνηση της Πολωνίας του προσέφερε τη θέση του Υπουργού Παιδείας. Όμως, παρά τις προσπάθειες των γιατρών, το διαλυμένο σηκώτι του και ο καρκίνος του φάρυγγα τον κατέβαλαν.

Ο Banach πέθανε στις 31 Αυγούστου του 1945, στην Lvov. Ήταν μόλις 53 ετών, γεμάτος σχέδια για το μέλλον. Τα νέα για τις επιτυχίες των πρώην μαθητών του στις Ηνωμένες Πολιτείες είχαν αρχίσει να φτάνουν. Οι τοπικές εφημερίδες της περιόδου δείχνουν το θρήνο της επιστημονικής κοινότητας της Lvov. Πέντε εργασίες και ένα βιβλίο του Banach κυκλοφόρησαν μετά το θάνατό του. Είχε δουλέψει γι' αυτά στα χρόνια του πολέμου.

## 10.8 Επίλογος

Πολλές μαρτυρίες βεβαιώνουν ότι ο Banach δεν ενδιαφερόταν για τίποτα έξω από τα μαθηματικά. Όπως γράφει ο Steinhaus,

«Ο Banach ήταν πρώτα απ' όλα μαθηματικός. Η πολιτική δεν τον ενδιέφερε και πολύ, η ομορφιά της φύσης δεν τον εντυπωσίαζε, η τέχνη και η λογοτεχνία ήταν γι' αυτόν δευτερεύουσες απολαύσεις, σύντομα διαλείματα από τη δουλειά.»

Όπως και νά είναι, πλήθος ιστορίες ανατρέπουν την εικόνα της μονόπλευρης και αδιάφορης για όλα μαθηματικής διάνοιας. Πιό χαρακτηριστική είναι η θρυλική συνάντηση του Banach με τον von Neumann:

Ο von Neumann επισκέφτηκε την Πολωνία τρείς φορές πριν τον πόλεμο. Κάθε φορά, με προσωπικές οδηγίες του Wiener, του πατέρα της κυβερνητικής, προσπάθησε να πείσει τον Banach να μεταναστεύσει στις Ηνωμένες Πολιτείες. Η τελευταία του επίσκεψη στην Lvov ήταν το 1937. Απαντώντας στην προσφορά του, ο Banach ρώτησε:

«Και πόσα είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο Wiener;»

«Αυτό το έχουμε ήδη φροντίσει» απάντησε γεμάτος αυτοπεποίθηση ο Αμερικανός, βάζοντας το χέρι στην τσέπη. «Αυτό είναι ένα τσεκ με την υπογραφή του Wiener. Έχει σημειώσει μόνο το ψηφίο 1, μπορείς να προσθέσεις δίπλα όσα μηδενικά νομίζεις ότι απαιτούνται».

Ο Banach σκέφτηκε την πρόταση για μιά στιγμή, και απάντησε: «αυτό το ποσό είναι πολύ μικρό για να αφήσω την Πολωνία».