6 Μαρτίου 2008

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 1

(Παράδοση: 20 Μαρτίου 2008)

1. Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$, δείξτε ότι υπάρχουν $C, R > 0$ τέτοιες ώστε $Hf(x) \geq C|x|^{-n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $|x| > R$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι υπάρχουν $C' > 0$ και $\alpha_0 > 0$ τέτοια ώστε $m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \geq C'/\alpha$ για κάθε $0 < \alpha < \alpha_0$.

2. Έστω $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\phi(x) = 0$ αν $|x| \geq 1$ και $\int \phi = 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$. Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

για κάθε x στο σύνολο Lebesgue της f.

3. Έστω $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |F'(t)|\, dt \leq V(f).$$

4. Αν οι F και G είναι απολύτως συνεχείς στο $[a,b]$, τότε η FG είναι απολύτως συνεχής στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b (FG' + GF')(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

5. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η F είναι απολύτως συνεχής και $|F'| \leq M$ σχεδόν παντού.

6. Έστω $\{F_j\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών αυξουσών συναρτήσεων στο $[a,b]$, με την ιδιότητα $F(x) = \sum_1^\infty F_j(x) < \infty$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $F'(x) = \sum_1^\infty F_j'(x)$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

7. Επεκτείνουμε τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue στο $\mathbb{R}$, θέτοντας $F(x) = 0$ αν $x < 0$ και $F(x) = 1$ αν $x > 1$. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{[a_n, b_n]\}$ των κλειστών υποδιαστημάτων του $[0,1]$ που έχουν ρητά άκρα, και ορίζουμε

$$F_n(x) = F\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right).$$

Δείξτε ότι η $G = \sum_1^\infty 2^{-n} F_n$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, και ότι $G' = 0$ σχεδόν παντού.

8. Θεωρούμε ένα Borel υποσύνολο A του $[0,1]$ που ικανοποιεί την $0 < m(A \cap I) < m(I)$ για κάθε υποδιάστημα I του $[0,1]$. Δείξτε ότι:

1. Η $F(x) = m([0,x]\cap A)$ είναι απολύτως συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, αλλά $F' = 0$ σε ένα σύνολο θετικού μέτρου.
2. Η συνάρτηση $G(x) = m([0,x]\cap A) - m([0,x]\setminus A)$ είναι απολύτως συνεχής στο $[0,1]$, αλλά δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

9. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $m(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$m\big(\mathbb{R}\setminus (A+\mathbb{Q})\big) = 0.$$

Υπόδειξη: Αν όχι, τα σύνολα A και $\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})$ έχουν και τα δύο σημεία πυκνότητας.

Παραδίδετε πέντε από τις Ασκήσεις.