27 Μαρτίου 2008

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 2

(Παράδοση: 11 Απριλίου 2008)

1. Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε ένα χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$ για κάθε n.]

2. Έστω X χώρος Banach και έστω Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι: αν ο Y είναι G_δ υποσύνολο του X τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

3. Έστω $1 \leq p < +\infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Δείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

4. Έστω $0 < \alpha \leq 1$. Συμβολίζουμε με $\Lambda_\alpha([0,1])$ τον χώρο των Hölder συνεχών συναρτήσεων με εκθέτη α: δηλαδή, $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ αν και μόνο αν

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := |f(0)| + \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} : x, y \in [0,1],\, x \neq y \right\} < +\infty.$$

(α) Δείξτε ότι ο $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι χώρος Banach.

(β) Έστω $\lambda_\alpha([0,1])$ το σύνολο των $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ που ικανοποιούν την

$$\lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \ \text{ για κάθε } y \in [0,1].$$

Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha < 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ είναι απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του $\Lambda_\alpha([0,1])$ ενώ αν $\alpha = 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ περιέχει μόνο τις σταθερές συναρτήσεις.

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα: αν (x_n) ακολουθία στον X με $\|x_n\| \to 0$, τότε η $(T(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

6. (α) Έστω X χώρος Banach και $T \in B(X, X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με

$$S_y(x) = y + T(x).$$

Δείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

(β) Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds$$

για κάθε $t \in [0,1]$. [*Υπόδειξη:* Αν $M = \max\{|K(s,t)| : 0 \leq s, t \leq 1\}$ και $T : C[0,1] \to C[0,1]$ ο τελεστής που ορίζεται από την

$$(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds,$$

δείξτε ότι $\|T^n\| \leq M^n / n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.]

7. Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με την ιδιότητα ο υπόχωρος $\mathrm{span}(A)$ να είναι πυκνός στον X. Δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

8. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται *θ-δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, δείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

9. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon > 0$.

(α) Έστω $x_1, \ldots, x_k \in B_X$ με την ιδιότητα: $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$. Δείξτε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ε-δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

[*Υπόδειξη για το (α):* Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1+\varepsilon/2)$ και έχουν ξένα εσωτερικά.]

10. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in B_X$ ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ να είναι ξένα.

(β) Δείξτε ότι *δεν* υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:

1. Το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x + A) = \mu(A)$ για κάθε Borel A και κάθε $x \in X$.
2. $\mu(A) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό $A \subseteq X$.
3. Υπάρχει μη κενό ανοιχτό $A_0 \subset X$ με $\mu(A_0) < +\infty$.

11. Έστω X γραμμικός χώρος και έστω Y υπόχωρος του X. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \to Y$. Θέτουμε $Z = \mathrm{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y, z) \in Y \times Z$.

(α) Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφος με τον X.

(β) Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z και ο X/Z είναι ισόμορφος με τον Y.

12. Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Ο $X/\mathrm{Ker}(T)$ είναι ισόμορφος με τον $\mathrm{Im}(T)$.

(β) Ο $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

(γ) Υπάρχει σταθερά $0 < C < \infty$ ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\inf\{\|x - y\| : y \in \mathrm{Ker}(T)\} \leq C\|T(x)\|.$$

Παραδίδετε επτά από τις Ασκήσεις.