18 Απριλίου 2008

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 3

(Παράδοση: 8 Μαΐου 2008)

1. Έστω X χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.

2. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα

$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και

$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in X.$$

3. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και έστω W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι $|\cdot|$ είναι μία άλλη νόρμα στον W που είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της $\|\cdot\|$ στον W. Δείξτε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X που είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ στον X και ο περιορισμός της στον W είναι η $|\cdot|$.

4. Θεωρούμε τον χώρο $\ell_\infty(\mathbb{R})$ των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$,

$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n.$$

5. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Ο μηδενιστής του Y είναι το

$$N(Y) = \{f \in X^* : \forall y \in Y \; f(y) = 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/N(Y)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y^*. Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/N(Y) \to Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$.

(β) Δείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $N(Y)$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \to N(Y)$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \to X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.

6. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης. Αν $f : X \to \mathbb{K}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, δείξτε ότι $f \in X^*$.

7. Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι ο Y είναι αυτοπαθής.

8. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $y \in Y$ ο $T_y : X \to Z$ με $T_y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \qquad x \in X, \ y \in Y.$$

9. Έστω X κλειστός υπόχωρος του $L_1[0, 2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1[0, 1]$ υπάρχει $\tilde{f} \in X$ ώστε $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in L_1[0, 1]$, υπάρχει $\tilde{f} \in X$ με $\tilde{f}|_{[0,1]} = f$ και $\|\tilde{f}\|_1 \leq M\|f\|_1$.

10. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X, με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

11. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$ στον Y, δείξτε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.

12. Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Ορίζουμε

$$d(Y, Z) = \mathrm{dist}(S_Y, S_Z) = \inf\{\|y - z\| : y \in Y, z \in Z, \|y\| = \|z\| = 1\}.$$

Δείξτε ότι ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X αν και μόνο αν $d(Y, Z) > 0$.

Παραδίδετε επτά από τις Ασκήσεις.