22 Μαΐου 2008

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 4

(Παράδοση: 10 Ιουνίου 2008)

1. Έστω X ένας τοπικά κυρτός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to 0$. Δείξτε ότι
$$y_n := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0.$$

2. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω A, B μη κενά, ξένα κυρτά υποσύνολα του X ώστε $0 \notin \overline{A - B}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε
$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

3. Έστω L_0 ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν είναι σχεδόν παντού ίσες). Ορίζουμε μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στον L_0 παίρνοντας σαν βάση περιοχών του 0 την ακολουθία των συνόλων
$$B_n = \left\{ f \in L_0 : \lambda(\{x : |f(x)| > 1/n\}) < \frac{1}{n} \right\}$$
και την $\{f + B_n : n \in \mathbb{N}\}$ σαν βάση περιοχών της $f \in L_0$. Δείξτε ότι:

(α) Ο $(L_0, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

(β) Ο $(L_0, \mathcal{T})$ δεν είναι τοπικά κυρτός (υπόδειξη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{co}(B_n) = L_0$).

(γ) $L_0^* = \{0\}$.

4. Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach.

(α) Δείξτε ότι $\overline{S_X}^w = B_X$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\| : (X, w) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του X.

5. Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία στον ℓ_p, $1 \le p < \infty$. Γράφουμε $x_n = (x_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$.

(α) Αν $1 < p < \infty$, δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$ αν και μόνο αν (i) υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\|_p \le M$ για κάθε n, και (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk} = 0$ για κάθε k.

(β) Αν $p = 1$, δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w^*} 0$ αν και μόνο αν (i) υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\|_1 \le M$ για κάθε n, και (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk} = 0$ για κάθε k.

6. Έστω (e_n) η συνήθης βάση του ℓ_2. Θεωρούμε το σύνολο
$$A = \{e_m + m e_n : 1 \le m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\}.$$
Δείξτε ότι το 0 ανήκει στην w–κλειστή θήκη του A αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (a_k) στο A με $a_k \xrightarrow{w} 0$.

7. Έστω X ένας χώρος Banach. Δείξτε ότι ο X^* είναι w^*–*ακολουθιακά πλήρης*: αν $x_n^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(x_n^*(x))$ είναι ακολουθία Cauchy, τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$ ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

8. Έστω X ένας αυτοπαθής χώρος Banach, έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον X και $x_0 \in X$. Ορίζουμε

$$K_n = \overline{\mathrm{co}\{x_m : m \geq n\}}^{\|\cdot\|}.$$

Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} x_0$ αν και μόνο αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x_0\}$.

9. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_k^*) στον X^* με $X^* = \overline{\mathrm{span}}\{x_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ και $\lim_{n\to\infty} x_k^*(x_n) = 0$ για κάθε k. Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$.

10. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy σε έναν χώρο X με νόρμα. Αν $x_n \xrightarrow{w} 0$ τότε $\|x_n\| \to 0$.

11. Έστω X ένας χώρος Banach και έστω $A \subseteq X^*$. Δείξτε ότι το A διαχωρίζει τα σημεία του X αν και μόνο αν $\overline{\mathrm{span}(A)}^{w^*} = X^*$.

12. Θεωρούμε τον $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Βρείτε το $\mathrm{ex}(B_X)$. Δείξτε ότι ο X δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με δυϊκό χώρο.

13. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Αν $E \subseteq K$, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $K = \overline{\mathrm{co}(E)}$.

(β) Για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\sup_{x\in K} f(x) = \sup_{x\in E} f(x).$$

14. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον X. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $x_n \xrightarrow{w} x$.

(β) $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in \overline{\mathrm{ex}(B_{X^*})}^{w^*}$.

15. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X. Έχουμε δει ότι ο Y^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $X^*/N(Y)$ (δείτε τις ασκήσεις της παραγράφου 2.3). Δείξτε ότι για κάθε $[x] \in \mathrm{ex}(B_{X^*/N(Y)})$ υπάρχει $x_1 \in [x]$ με $x_1 \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$.

Παραδίδετε οκτώ από τις Ασκήσεις.