9 Μαρτίου 2009

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 1

(Παράδοση: 30 Μαρτίου 2009)

1. Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε ένα χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

2. Έστω $x_1, \ldots, x_n$ μοναδιαία διανύσματα σε ένα χώρο με νόρμα. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \leq (1+\varepsilon) \max_{i \leq n} |\lambda_i|,$$

για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \geq (1-\varepsilon) \max_{i \leq n} |\lambda_i|,$$

για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

3. Έστω c_0 ο γραμμικός χώρος των ακολουθιών $x = (\xi_k)$ που συγκλίνουν στο 0. Αν $x = (\xi_k) \in c_0$, υπάρχει μετάθεση των φυσικών $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε η $(|\xi_{\pi(n)}|)$ να είναι φθίνουσα, και η ακολουθία (ξ'_n) με $\xi'_n = |\xi_{\pi(n)}|$ ορίζεται μονοσήμαντα από την (ξ_n).

Για κάθε $x \in c_0$, ορίζουμε

$$\|x\| = \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{m} \xi'_n : m \in \mathbb{N} \right\},$$

και θέτουμε $d_0 = \{x \in c_0 : \|x\| < +\infty\}$. Δείξτε ότι ο $(d_0, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Είναι χώρος Banach;

4. Ξέρουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Δείξτε ότι αν $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, τότε $d(x, c_0) = \limsup_k |\xi_k|$. Είναι πάντα σωστό ότι υπάρχει $y_x \in c_0$ ώστε $d(x, c_0) = \|x - y_x\|$;

5. Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και έστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ μια σειρά στο χώρο X.

(α) Έστω $x \in X$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $F \subset \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{i \in G} x_i \right\| < \varepsilon$$

   για κάθε πεπερασμένο σύνολο $G \subset \mathbb{N}$ με $G \supseteq F$.

2. Για κάθε μετάθεση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$.

Τότε, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει *χωρίς περιορισμό* στο x.

(β) Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει χωρίς περιορισμό. Ισχύει το αντίστροφο;

(γ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό αν και μόνο αν είναι *Cauchy χωρίς περιορισμό*. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $F \subset \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i \right\| < \varepsilon$$

για κάθε πεπερασμένο σύνολο $G \subset \mathbb{N}$ με $G \cap F = \emptyset$.

(δ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό αν και μόνο αν για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ συγκλίνει.

6. Έστω X χώρος Banach και έστω Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι: αν ο Y είναι G_δ υποσύνολο του X τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

[*Υπόδειξη*. Παρατηρήστε πρώτα ότι ο Y είναι G_δ υποσύνολο του $\overline{Y}$. Δείξτε ότι το $A = \overline{Y} \setminus Y$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\overline{Y}$. Με την υπόθεση ότι $A \neq \emptyset$ θεωρήστε το σύνολο $B = x_0 + Y$ όπου x_0 τυχόν σημείο του A και δείξτε ότι $B \subseteq A$. Κατόπιν, εφαρμόστε το θεώρημα Baire στον $\overline{Y}$.]

7. Έστω $1 \leq p < +\infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Δείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

8. Έστω $0 < \alpha \leq 1$. Συμβολίζουμε με $\Lambda_\alpha([0,1])$ τον χώρο των Hölder συνεχών συναρτήσεων με εκθέτη α: δηλαδή, $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ αν και μόνο αν

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := |f(0)| + \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} : x, y \in [0,1],\, x \neq y \right\} < +\infty.$$

(α) Δείξτε ότι ο $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι χώρος Banach.

(β) Έστω $\lambda_\alpha([0,1])$ το σύνολο των $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ που ικανοποιούν την

$$\lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \text{ για κάθε } y \in [0,1].$$

Δείξτε ότι: αν $0 < \alpha < 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ είναι απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του $\Lambda_\alpha([0,1])$ ενώ αν $\alpha = 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ περιέχει μόνο τις σταθερές συναρτήσεις.

9. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα: αν (x_n) ακολουθία στον X με $\|x_n\| \to 0$, τότε η $(T(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

10. (α) Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $\mathrm{int}(Y) \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

(β) Έστω X χώρος Banach και έστω (f_n) μια ακολουθία μη μηδενικών συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f_n : X \to \mathbb{K}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $f_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11. (α) Έστω X χώρος Banach και έστω $T \in B(X,X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με

$$S_y(x) = y + T(x).$$

Δείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

(β) Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds$$

για κάθε $t \in [0,1]$.

12. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται *θ-δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, δείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

13. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon > 0$.

(α) Έστω $x_1, \ldots, x_k \in B_X$ με την ιδιότητα: $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$. Δείξτε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ε-δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

[*Υπόδειξη για το* (α): Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1+\varepsilon/2)$ και έχουν ξένα εσωτερικά.]

14. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in B_X$ ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ να είναι ξένα.

(β) Δείξτε ότι *δεν* υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:

1. Το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x + A) = \mu(A)$ για κάθε Borel A και κάθε $x \in X$.
2. $\mu(A) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό $A \subseteq X$.
3. Υπάρχει μη κενό ανοιχτό $A_0 \subset X$ με $\mu(A_0) < +\infty$.

15. Έστω X γραμμικός χώρος και έστω Y υπόχωρος του X. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \to Y$. Θέτουμε $Z = \mathrm{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y, z) \in Y \times Z$.

(α) Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφος με τον X.

(β) Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z και ο X/Z είναι ισόμορφος με τον Y.

16. Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Ο $X/\mathrm{Ker}(T)$ είναι ισόμορφος με τον $\mathrm{Im}(T)$.

(β) Ο $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

(γ) Υπάρχει σταθερά $0 < C < \infty$ ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\inf\{\|x - y\| : y \in \mathrm{Ker}(T)\} \leq C\|T(x)\|.$$

Παραδίδετε δέκα από τις Ασκήσεις.