12 Μαΐου 2009

Ανάλυση ΙΙ: Φυλλάδιο 3

(Παράδοση: 10 Ιουνίου 2009)

1. Έστω X τοπικά κυρτός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to 0$. Δείξτε ότι

$$y_n := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0.$$

2. Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Δείξτε ότι η S_X είναι πυκνό G_δ υποσύνολο της (B_X, w). Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $\|\cdot\| : (X, w) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του X.

3. (α) Στον ℓ_1 θεωρούμε τη συνήθη βασική ακολουθία $\{e_n\}$. Δείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (y_k) κυρτών συνδυασμών των e_n με $\|y_k\|_1 \to 0$.

(β) Έστω (e_n) η συνήθης βάση του ℓ_2. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{e_m + m e_n : 1 \leq m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι το 0 ανήκει στην w–κλειστή θήκη του A αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (a_k) στο A με $a_k \xrightarrow{w} 0$.

4. Έστω X χώρος με νόρμα και (x_n) μια $\|\cdot\|$-βασική ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι $\|x_n\| \to 0$.

5. (α) Έστω H χώρος Hilbert και $x_n \in H$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε

$$\left\| \frac{x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}}{n} \right\| \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

(β) Έστω $x_n \in c_0$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε

$$\left\| \frac{x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}}{n} \right\| \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

6. (α) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Δείξτε ότι ο (X^*, w^*) είναι διαχωρίσιμος.

(β) Έστω X χώρος Banach. Αν ο (X, w) είναι διαχωρίσιμος δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

7. Έστω X, Y χώροι Banach και $S : Y^* \to X^*$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι: αν ο $S : (Y^*, w^*) \to (X^*, w^*)$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ ώστε $S = T^*$.

8. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν ο X είναι αυτοπαθής, δείξτε ότι η $T(B_X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

9. (α) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι ο X/Y είναι αυτοπαθής.

(β) Έστω X χώρος Banach. Δείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.

10. Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach, (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στον X και $x_0 \in X$. Ορίζουμε

$$K_n = \overline{\mathrm{conv}\{x_m : m \geq n\}}^{\|\cdot\|}.$$

Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} x_0$ αν και μόνο αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x_0\}$.

11. Έστω K, C ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα ενός χώρου Banach. Αν το K είναι w-συμπαγές δείξτε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ με την ιδιότητα

$$\sup_{x\in K} x^*(x) < \inf_{y\in C} x^*(y).$$

12. Έστω X χώρος με νόρμα, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ και $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \ldots, n$.

(β) Υπάρχει $M \geq 0$ ώστε

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| \leq M \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\|$$

για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

13. Δείξτε ότι $B_{\ell_\infty} = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(B_{\ell_\infty}))}^{\|\cdot\|}$.

14. Έστω X ένας πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Αν $E \subseteq K$, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) $K = \overline{\mathrm{co}(E)}$.
(β) Για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\sup_{x\in K} f(x) = \sup_{x\in E} f(x).$$

15. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον X. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) $x_n \xrightarrow{w} x$.
(β) $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in \overline{\mathrm{ex}(B_{X^*})}^{w^*}$.

16. Έστω X χώρος Banach και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι:
(α) Για κάθε $y^* \in Y^*$, το σύνολο

$$\{x^* \in X^* : \|x^*\| = \|y^*\| \text{ και } x^*|_Y = y^*\}$$

είναι w^*-συμπαγές και κυρτό.
(β) Για κάθε $y^* \in \mathrm{ex}(B_{Y^*})$ υπάρχει $x^* \in \mathrm{ex}(B_{X^*})$ ώστε $x^*|_Y = y^*$.

17. Έστω (f_n) ακολουθία στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ με $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{w} 0$ αν και μόνο αν $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

18. Έστω $1 \leq p < \infty$ και X κλειστός υπόχωρος του $L^p[0,1]$ με την ιδιότητα: $X \subseteq L^\infty[0,1]$ (κάθε $f \in X$ είναι φραγμένη). Δείξτε ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

Παραδίδετε έντεκα από τις Ασκήσεις.