Συναρτησιακές ανισότητες
και
συγκέντρωση του μέτρου

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ισοπεριμετρικές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου

1.1 Μετρικοί χώροι πιθανότητας

1.1α΄ Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 1.1.1 (μετρικός χώρος πιθανότητας)**.** Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του (X,d), τότε η τριάδα (X,d,μ) λέγεται μετρικός χώρος πιθανότητας.

Παραδείγματα 1.1.2. 1. *Η σφαίρα* S^{n-1}. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2=1\} \tag{1.1.1}$$

στον $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με την γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x,y\in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x,y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A):=\frac{|C(A)|}{|B_2^n|}, \tag{1.1.2}$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα,

$$C(A):=\{sx:x\in A \text{ και } 0\leqslant s\leqslant 1\}, \tag{1.1.3}$$

και $|Q|$ είναι το n-διάστατο μέτρο Lebesgue του Q. Η ρ είναι όντως μετρική στην S^{n-1} (άσκηση). Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y)=\theta$ τότε

$$\|x-y\|_2=2\sin\frac{\theta}{2}, \tag{1.1.4}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_2 \leqslant \rho(x,y). \tag{1.1.5}$$

2. *Ο χώρος του Gauss.* Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $\|\cdot\|_2$ και το μέτρο πιθανότητας γ_n που έχει πυκνότητα την συνάρτηση

$$g_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}. \tag{1.1.6}$$

Δηλαδή, αν A είναι ένα σύνολο Borel στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx. \tag{1.1.7}$$

Το γ_n είναι το n-διάστατο *μέτρο του Gauss* και ο χώρος πιθανότητας $\Gamma_n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ είναι ο n-διάστατος *χώρος του Gauss.*

Το μέτρο του Gauss έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες: από την μία πλευρά είναι μέτρο γινόμενο, πιό συγκεκριμένα $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_1$. Από την άλλη πλευρά είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: αν $U \in O(n)$ και A είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \gamma_n(U(A)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{U(A)} e^{-\|x\|_2^2/2} dx = \frac{|\det U|}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|Uy\|_2^2/2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|y\|_2^2/2} dy = \gamma_n(A). \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

3. *Ο διακριτός κύβος.* Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1,1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στον E_2^n ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Δηλαδή, αν A είναι ένα υποσύνολο του E_2^n, τότε

$$\mu_n(A) = \frac{|A|}{2^n}, \tag{1.1.9}$$

όπου με $|A|$ (αλλά και με $\mathrm{card}(A)$) συμβολίζουμε τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου.

Ο E_2^n γίνεται μετρικός χώρος με απόσταση την

$$d_n(x,y) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i \leqslant n : x_i \neq y_i\} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \tag{1.1.10}$$

1.1β′ Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Ορισμός 1.1.3 (t-περιοχή)**.** Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Για κάθε μη κενό $A \in \mathcal{B}(X)$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε την t-*περιοχή* του A ως εξής:

$$A_t = \{x \in X : d(x,A) \leqslant t\}. \tag{1.1.11}$$

Ορισμός 1.1.4 (επιφάνεια κατά Minkowski)**.** *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω μ ένα (όχι αναγκαστικά πεπερασμένο) μέτρο στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$. Η επιφάνεια ενός Borel υποσυνόλου A του X ορίζεται ως εξής:*

$$\partial(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A_t \setminus A)}{t}, \tag{1.1.12}$$

όπου A_t είναι η t-περιοχή του A. Αν $\mu(A) < \infty$ (το οποίο φυσικά ισχύει αν ο (X,d,μ) είναι μετρικός χώρος πιθανότητας) τότε

$$\partial(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}. \tag{1.1.13}$$

Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας μπορούμε να διατυπώσουμε το **ισοπεριμετρικό πρόβλημα**:

> Για δοσμένο $0 < \alpha < 1$, να βρεθεί το
>
> $$\inf\{\partial(A) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geqslant \alpha\} \tag{1.1.14}$$
>
> και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε αντίστοιχο πρόβλημα για το μέτρο των t-περιοχών, σταθεροποιώντας $t > 0$:

> Για δοσμένα $0 < \alpha < 1$ και $t > 0$, να βρεθεί το
>
> $$\inf\{\mu(A_t) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geqslant \alpha\} \tag{1.1.15}$$
>
> και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα $A \in \mathcal{B}(X)$ για τα οποία $\mu(A) \geqslant \alpha$ (και όχι $\mu(A) = \alpha$) για καθαρά τεχνικούς λόγους: στο γενικό πλαίσιο που συζητάμε, μπορεί, για κάποια τιμή του α, να μην υπάρχουν σύνολα $A \in \mathcal{B}(X)$ ώστε $\mu(A) = \alpha$.

Οι λύσεις του δεύτερου προβλήματος μπορεί να είναι διαφορετικές για διαφορετικές τιμές του t. Στα κλασικά όμως παραδείγματα δεν εξαρτώνται από το t και αυτό σημαίνει ότι είναι και λύσεις του πρώτου προβλήματος. Είναι μάλιστα, όπως θα δούμε, πολύ «συμμετρικά υποσύνολα» του X, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε το μέτρο της t-περιοχής τους και την επιφάνειά τους.

1.2 Κλασικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

Σε αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τα κλασικά παραδείγματα μετρικών χώρων πιθανότητας που ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο: την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}, τον χώρο του Gauss Γ_n και τον διακριτό κύβο E_2^n. Πριν όμως από αυτό, αποδεικνύουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski και μέσω αυτής την κλασική ισοπεριμετρική ανισότητα στον $\mathbb{R}^n$.

1.2α′ Ανισότητα Brunn-Minkowski και η ισοπεριμετρική ανισότητα

Ορισμός 1.2.1 (άθροισμα Minkowski)**.** Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\} \tag{1.2.1}$$

και για κάθε $t \geqslant 0$,

$$tA = \{ta \mid a \in A\}. \tag{1.2.2}$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 1.2.2 (ανισότητα Brunn-Minkowski)**.** *Έστω K και T δύο μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1.2.3}$$

Παρατηρήσεις 1.2.3. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα (κυρτά συμπαγή σύνολα με μη κενό εσωτερικό), ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά (δηλαδή, αν $K = aT + x$ για κάποιον $a \geqslant 0$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$).

Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι **κοίλη** συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για τον λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geqslant \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{1.2.4}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα σε συνδυασμό με την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geqslant |K|^{\lambda} |T|^{1-\lambda}. \tag{1.2.5}$$

Η απόδειξη που θα δώσουμε εδώ θα βασιστεί στην συναρτησιακή ανισότητα των Prékopa και Leindler, η οποία είναι η γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski στο πλαίσιο των μετρήσιμων θετικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.2.4 (ανισότητα Prékopa-Leindler). *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{1.2.6}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}. \tag{1.2.7}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση n.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνησίως θετικές. Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \qquad \text{και} \qquad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g. \tag{1.2.8}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, οι x, y είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \qquad \text{και} \qquad y'(t) g(y(t)) = \int g. \tag{1.2.9}$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t). \tag{1.2.10}$$

Οι x και y είναι γνησίως αύξουσες. Συνεπώς, η z είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geqslant (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda}. \tag{1.2.11}$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned} \int h(s)ds &= \int_0^1 h(z(t)) z'(t) dt \\ &\geqslant \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda} dt \\ &\geqslant \int_0^1 [f(x(t))]^{\lambda} [g(y(t))]^{1-\lambda} \left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\ &= \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 2$ και ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Έστω f, g, h όπως στο θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$ και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Επίσης, ορίζουμε $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ με $H(s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_s$ και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Από την υπόθεση του θεωρήματος για τις f, g και h έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f_{s_1}(x)^\lambda g_{s_0}(y)^{1-\lambda}, \tag{1.2.13}$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned} H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\ &\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1} \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0} \right)^{1-\lambda} =: F^\lambda(s_1) G^{1-\lambda}(s_0). \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}} H \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} F \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} G \right)^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \right)^{1-\lambda}. \tag{1.2.15}$$

□

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa–Leindler μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Brunn–Minkowski:

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.2. Έστω K, T μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και έστω $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.4. Πράγματι, αν $x \notin K$ ή $y \notin T$ τότε

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant 0 = [f(x)]^\lambda [g(y)]^{1-\lambda}, \tag{1.2.16}$$

ενώ αν $x \in K$ και $y \in T$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda K + (1-\lambda)T$, άρα

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = [f(x)]^\lambda [g(y)]^{1-\lambda}. \tag{1.2.17}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geqslant \left(\int f \right)^\lambda \left(\int g \right)^{1-\lambda} = |K|^\lambda |T|^{1-\lambda}. \tag{1.2.18}$$

Θεωρούμε τώρα K και T όπως στο Θεώρημα 1.2.2 (με $|K| > 0$ και $|T| > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n} K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n} T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}. \tag{1.2.19}$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (1.2.18) παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geqslant 1. \tag{1.2.20}$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}, \tag{1.2.21}$$

επομένως η (1.2.20) παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geqslant \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n \tag{1.2.22}$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn–Minkowski μπορούμε να δώσουμε την απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$:

> Ανάμεσα σε όλα τα μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που έχουν δεδομένο όγκο α, η μπάλα όγκου α έχει ελάχιστη επιφάνεια.

Ο ορισμός της επιφάνειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός του Minkowski, ο οποίος βασίζεται στην έννοια της *t-περιοχής*: θυμηθείτε ότι αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $t>0$, η t-περιοχή του A είναι το σύνολο $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leqslant t\}$, όπου $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|_2 : a \in A\}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του x από το σύνολο A. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $t>0$,

$$A_t = A + tB_2^n. \tag{1.2.23}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της επιφάνειας κατά Minkowski, αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο, η *επιφάνεια* $\partial(A)$ του A ορίζεται από την

$$\partial(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t}. \tag{1.2.24}$$

Μπορεί να ελέγξει κανείς ότι αν το A είναι κυρτό σώμα, τότε το $\liminf$ στο δεξιό μέλος είναι όριο.

Η απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.5. *Αν A είναι μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο, τότε*

$$\partial(A) \geqslant n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.2.25}$$

Πράγματι, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.5 είναι το εξής.

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο και έστω $r > 0$ τέτοιος ώστε $|A| = |rB_2^n|$. Τότε,*

$$\partial(A) \geqslant \partial(rB_2^n). \tag{1.2.26}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\omega_n = |B_2^n|$. Αφού $|A| = \omega_n r^n$, από το Θεώρημα 1.2.5 έχουμε

$$\partial(A) \geqslant n\omega_n^{(n-1)/n} r^{n-1}\omega_n^{1/n} = n\omega_n r^{n-1}. \tag{1.2.27}$$

Όμως, έχουμε $(rB_2^n)_t = rB_2^n + tB_2^n = (r+t)B_2^n$, και από τον ορισμό της επιφάνειας έπεται ότι

$$\partial(rB_2^n) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|(r+t)B_2^n| - |rB_2^n|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\omega_n(r+t)^n - \omega_n r^n}{t} = n\omega_n r^{n-1}. \tag{1.2.28}$$

Άρα, $\partial(A) \geqslant \partial(rB_2^n)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.5. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn–Minkowski γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{|A_t| - |A|}{t} &= \frac{|A + tB_2^n| - |A|}{t}\\ &\geqslant \frac{\left(|A|^{1/n} + |tB_2^n|^{1/n}\right)^n - |A|}{t}\\ &= \frac{|A| + nt|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t^2) - |A|}{t}\\ &= n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n} + O(t),\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t} \geqslant n|A|^{(n-1)/n}|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.2.30}$$

Από τον ορισμό της επιφάνειας προκύπτει το συμπέρασμα. □

Παρατηρήστε ότι αυτό που δείξαμε είναι ακόμα ισχυρότερο: για κάθε $t > 0$, ανάμεσα σε όλα τα μη κενά Borel υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει την «μικρότερη t-επέκταση».

Πρόταση 1.2.7. *Έστω B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $|A| = |B|$, τότε $|A_t| \geqslant |B_t|$ για κάθε $t > 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}|A + tB|^{1/n} &\geqslant |A|^{1/n} + |tB|^{1/n} = |A|^{1/n} + t|B|^{1/n}\\ &= (1+t)|B|^{1/n} = |B + tB|^{1/n},\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

1.2β′ Ισοπεριμετρική ανισότητα στην σφαίρα

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στην σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.8 (ισοπεριμετρική ανισότητα στην σφαίρα). *Έστω $\alpha \in (0,1)$ και έστω*

$$B(x,r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leqslant r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x,r+t)\big). \tag{1.2.32}$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι γεωδαισιακές μπάλες μέτρου α δίνουν την λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς την διάσταση (μια περιγραφή του επιχειρήματος δίνεται στο παράρτημα). Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν $\sigma(A) = 1/2$ και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\left(B\big(x, \frac{\pi}{2} + t\big)\right) \tag{1.2.33}$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας οδηγούμαστε στο εξής:

Θεώρημα 1.2.9. *Εστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geqslant 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2). \tag{1.2.34}$$

Απόδειξη. Λόγω της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας, αρκεί να φράξουμε από κάτω το $\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t))$. Παρατηρήστε ότι

$$\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t)) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+t} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta}, \tag{1.2.35}$$

οπότε θέτοντας $h(t,n) = 1 - \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t))$, ζητάμε άνω φράγμα γιά την

$$h(t,n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+t}^{\pi} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta} = \frac{\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \phi d\phi}{2I_n}, \tag{1.2.36}$$

όπου

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \phi d\phi. \tag{1.2.37}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \phi\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$h(t,n) = \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(s/\sqrt{n})ds. \tag{1.2.38}$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos s$ και $\exp(-s^2/2)$ βλέπουμε οτι

$$\cos s \leqslant \exp(-s^2/2) \tag{1.2.39}$$

στο $[0,\pi/2]$, επομένως

$$\begin{aligned} h(t,n) &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-t)\sqrt{n}} \exp(-(s+t\sqrt{n})^2/2)ds \\ &\leqslant \frac{\exp(-t^2n/2)}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{\infty} \exp(-s^2/2)ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n}I_n} \exp(-t^2n/2). \end{aligned} \tag{1.2.40}$$

Γιά την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι $\sqrt{n}I_n \geqslant 1$ γιά κάθε $n \geqslant 1$. Γιά τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι από την αναδρομική σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ έπεται ότι

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2}\frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}}I_n \geqslant \sqrt{n}I_n, \tag{1.2.41}$$

το οποίο σημαίνει οτι αρκεί να ελέγξουμε τις

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi = 1 \geqslant 1 \tag{1.2.42}$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \, d\phi = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geqslant 1. \tag{1.2.43}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση του θεωρήματος 1.2.9 είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$ και μάλιστα με πολύ γρήγορο ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Συνεπώς, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = 1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

1.2γ′ Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss είναι η εξής.

Θεώρημα 1.2.10. *Έστω $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leqslant \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ και για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$ ισχύει*

$$\gamma_n(A_t) \geqslant \gamma_n(H_t). \tag{1.2.44}$$

Στο παράρτημα περιγράφεται μια απόδειξη που βασίζεται στην «παρατήρηση του Poincaré» και ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για την σφαίρα. Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι η παρακάτω ανισότητα, η οποία είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.10.

Θεώρημα 1.2.11. *Αν $\gamma_n(A) \geqslant 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$*

$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-t^2/2). \tag{1.2.45}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.2.10 γνωρίζουμε ότι

$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant 1 - \gamma_n(H_t) \tag{1.2.46}$$

όπου H ημίχωρος μέτρου $1/2$. Αφού το γ_n είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leqslant 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς $x_2, \ldots, x_n$ βλέπουμε ότι

$$1 - \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-s^2/2}ds. \tag{1.2.47}$$

Παραγωγίζοντας δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = e^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-s^2/2}ds \tag{1.2.48}$$

είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Από την $F(t) \leqslant F(0)$ προκύπτει το συμπέρασμα. □

1.2δ′ Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον E_2^n

Η t-περιοχή ενός $A \subseteq E_2^n$ είναι ως συνήθως το σύνολο $A_t = \{x \in E_2^n : d_n(x, A) \leqslant t\}$. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η d_n είναι πεπερασμένες το πλήθος: $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$. Επομένως, αυτές είναι οι τιμές του t γιά τις οποίες η t-περιοχή του A παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την έννοια ότι το A_t παραμένει αμετάβλητο όταν το t παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής $[k/n, (k+1)/n)$.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι λοιπόν το εξής. Μας δίνουν έναν φυσικό $m = 1, 2, \dots, 2^n$ και κάποιο $t = k/n$, $k = 1, \dots, n$. Γιά ποιό σύνολο A με πλήθος στοιχείων m είναι η k/n-περιοχή του A η μικρότερη δυνατή; Η απάντηση είναι ότι το A θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν «λιγότερα κενά». Αν περιέχει μιά n-άδα $x = (x_1, \dots, x_n)$, τότε θα πρέπει να περιέχει κατά σειρά προτεραιότητας και τις «γειτονικές» της n-άδες, αυτές δηλαδή που διαφέρουν από την x σε μία συντεταγμένη, δύο συντεταγμένες, κ.ο.κ. (εφόσον το πλήθος των στοιχείων του A επαρκεί). Αυτό, γιατί η παραμικρή επέκταση του A θα τις συμπεριλάβει ούτως ή άλλως. Τα πιό οικονομικά σύνολα είναι οι d_n-μπάλες (οι λεγόμενες Hamming μπάλες του E_2^n). Αποδεικνύεται η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n.

Θεώρημα 1.2.12. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $m = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}$ στοιχεία. Τότε, γιά κάθε $s = 1, \dots, n-l$, έχουμε*

$$\mu_n(A_{s/n}) \geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{l+s} \binom{n}{k} = \mu_n(B(x, l/n)_{s/n}) = \mu_n(B(x, (l+s)/n)), \tag{1.2.49}$$

όπου x τυχόν στοιχείο του E_2^n. □

Η ισοπεριμετρική αυτή ανισότητα οδηγεί σε μια προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n.

Θεώρημα 1.2.13. *Αν $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ και $t > 0$, τότε*

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \frac{1}{2} \exp(-2t^2 n).$$

Το Θεώρημα 1.2.13 ερμηνεύεται ως εξής: για να εκτιμήσουμε το $\mu_n(A_t)$ αρκεί να θέσουμε $l = n/2$ και $s = tn$ στο θεώρημα 1.2.12. Τότε βλέπουμε ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{j=(\frac{1}{2}+t)n}^{n} \binom{n}{j}, \tag{1.2.50}$$

το οποίο φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \to \infty$, γιατί οι «ακραίοι» διωνυμικοί συντελεστές είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους «μεσαίους» όταν το n είναι μεγάλο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.12 είναι συνδυαστική και γίνεται με επαγωγή ως προς n (περιγράφεται στο παράρτημα).

1.3 Συνάρτηση συγκέντρωσης

Ορισμός 1.3.1 (συνάρτηση συγκέντρωσης)**.** *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Η συνάρτηση συγκέντρωσης του (X, d, μ) ορίζεται στο $(0, \infty)$ από την*

$$\alpha_\mu(t) := \sup\{1 - \mu(A_t) : \mu(A) \geqslant 1/2\}. \tag{1.3.1}$$

Η συνάρτηση α_μ είναι προφανώς φθίνουσα και, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση, $\lim_{t\to\infty}\alpha_\mu(t) = 0$.

Πρόταση 1.3.2. *Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας (X, d, μ) ισχύει*

$$\lim_{t\to\infty}\alpha_\mu(t) = 0. \tag{1.3.2}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x \in X$ και $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. Από το γεγονός ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x, n)$ έπεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(B(x, r)) > 1 - \varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(A) \geqslant 1/2$ έχουμε $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$, απ' όπου έπεται ότι $B(x, r) \subseteq A_{2r}$. [Πράγματι, υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(x, a) \leqslant r$ και τότε, για κάθε $y \in B(x, r)$ έχουμε $d(y, a) \leqslant d(y, x) + d(x, a) \leqslant 2r$, δηλαδή $y \in A_{2r}$]. Τότε, για κάθε $t \geqslant 2r$ έχουμε

$$1 - \mu(A_t) \leqslant 1 - \mu(A_{2r}) \leqslant 1 - \mu(B(x, r)) < \varepsilon, \tag{1.3.4}$$

άρα $\alpha_\mu(t) \leqslant \varepsilon$. □

Ορισμός 1.3.3 (συγκέντρωση του μέτρου)**.** Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση του μέτρου» στον μετρικό χώρο πιθανότητας (X, d, μ) αν η $\alpha_\mu(t)$ φθίνει γρήγορα καθώς το $t \to \infty$. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Λέμε ότι το μ έχει *κανονική συγκέντρωση* στον (X, d) αν υπάρχουν σταθερές $C, c > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant Ce^{-ct^2}. \tag{1.3.5}$$

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου (πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από τις λύσεις των αντίστοιχων ισοπεριμετρικών προβλημάτων) δείχνουν ότι αυτό ισχύει για την σφαίρα, για τον διακριτό κύβο και για τον χώρο του Gauss. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.1 της συνάρτησης συγκέντρωσης, σε αυτούς τους χώρους έχουμε:

(i) Για την σφαίρα (S^{n-1}, ρ, σ) ισχύει

$$\alpha_\sigma(t) \leqslant \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2).$$

(ii) Για τον χώρο του Gauss $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ ισχύει

$$\alpha_{\gamma_n}(t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-t^2/2).$$

(iii) Για τον διακριτό κύβο (E_2^m, d_n, μ_n) ισχύει

$$\alpha_{\mu_n}(t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-2t^2 n).$$

(α) Λέμε ότι το μ έχει *εκθετική συγκέντρωση* στον (X,d) αν υπάρχουν σταθερές $C,c>0$ ώστε, για κάθε $t>0$,

$$\alpha_\mu(t)\leqslant Ce^{-ct}. \tag{1.3.6}$$

Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f:X\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x)-f(y)|\leqslant d(x,y)$ για κάθε $x,y\in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x\in X:|f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leqslant 2\alpha_\mu(t), \tag{1.3.7}$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι ο μέσος Lévy της f.

Σημείωση. Μέσος Lévy $\mathrm{med}(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f\geqslant \mathrm{med}(f)\})\geqslant 1/2 \text{ και } \mu(\{f\leqslant \mathrm{med}(f)\})\geqslant 1/2. \tag{1.3.8}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.4. Θέτουμε $A=\{x:f(x)\geqslant \mathrm{med}(f)\}$ και $B=\{x:f(x)\leqslant \mathrm{med}(f)\}$. Αν $y\in A_t$ τότε υπάρχει $x\in A$ με $d(x,y)\leqslant t$, οπότε

$$f(y)=f(y)-f(x)+f(x)\geqslant -d(y,x)+\mathrm{med}(f)\geqslant \mathrm{med}(f)-t \tag{1.3.9}$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y\in B_t$ τότε υπάρχει $x\in B$ με $d(x,y)\leqslant t$, οπότε

$$f(y)=f(y)-f(x)+f(x)\leqslant d(y,x)+\mathrm{med}(f)\leqslant \mathrm{med}(f)+t. \tag{1.3.10}$$

Δηλαδή, αν $y\in A_t\cap B_t$ τότε $|f(x)-\mathrm{med}(f)|\leqslant t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x\in X:|f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\subseteq (A_t\cap B_t)^c=A_t^c\cup B_t^c. \tag{1.3.11}$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε $\mu(A_t)\geqslant 1-\alpha_\mu(t)$ και $\mu(B_t)\geqslant 1-\alpha_\mu(t)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\{|f-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leqslant (1-\mu(A_t))+(1-\mu(B_t))\leqslant 2\alpha_\mu(t). \tag{1.3.12}$$

Πόρισμα 1.3.5. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f:X\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$, δηλαδή αν $|f(x)-f(y)|\leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}}d(x,y)$ για κάθε $x,y\in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x\in X:|f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leqslant 2\alpha_\mu(t/\|f\|_{\mathrm{Lip}}), \tag{1.3.13}$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι μέσος Lévy της f.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 1.3.4 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $\eta>0$ και κάποιο $t>0$ ισχύει*

$$\mu\left(\{x\in X:|f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leqslant\eta \tag{1.3.14}$$

για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$, τότε $\alpha_\mu(t)\leqslant\eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A)\geqslant 1/2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=d(x,A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\mathrm{med}(f)=0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x:f(x)=0\})\geqslant 1/2$. Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\mu(\{x\in X:d(x,A)>t\})\leqslant\eta, \tag{1.3.15}$$

δηλαδή $1-\mu(A_t)\leqslant\eta$. Έπεται ότι $\alpha_\mu(t)\leqslant\eta$. □

1.4 Προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

1.4α΄ Η συνάρτηση συγκέντρωσης της σφαίρας

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.9 βασίζεται πολύ ισχυρά στην σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μια ανισότητα της μορφής

$$\sigma(A_t)\geqslant 1-c_1\exp(-c_2t^2n) \tag{1.4.1}$$

και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη εκτίμησης «αυτού του τύπου» χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Λήμμα 1.4.1. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A)=|A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq B_2^n$. Αν $A,C\subseteq B_2^n$ είναι Borel σύνολα και*

$$d(A,C):=\min\{\|a-c\|_2:a\in A,c\in C\}=\rho>0, \tag{1.4.2}$$

τότε

$$\min\{\mu(A),\mu(C)\}\leqslant\exp(-\rho^2n/8). \tag{1.4.3}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε $\left|\frac{A+C}{2}\right|\geqslant\min\{|A|,|C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right)\geqslant\min\{\mu(A),\mu(C)\}. \tag{1.4.4}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leqslant 4 - \rho^2, \tag{1.4.5}$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}\,B_2^n. \tag{1.4.6}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\min\{\mu(A),\mu(C)\} \leqslant \mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \leqslant \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leqslant \exp(-\rho^2 n/8). \tag{1.4.7}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.9: Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, 1/2 \leqslant \rho \leqslant 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, 1/2 \leqslant \rho \leqslant 1\} \tag{1.4.8}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geqslant \sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}. \tag{1.4.9}$$

Από το Λήμμα 1.4.1 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leqslant \exp(-d^2 n/8)|B_2^n| \leqslant \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|. \tag{1.4.10}$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1-2^{-n})|\tilde{C}|$. Έπεται ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leqslant \frac{1}{1-2^{-n}}\exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right). \tag{1.4.11}$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geqslant 1 - c_1\exp(-c_2 t^2 n) \tag{1.4.12}$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Αυτή είναι η ανισότητα του Θεωρήματος 1.2.9 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. □

1.4β′ Η συνάρτηση συγκέντρωσης του χώρου του Gauss

Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας, η απόδειξη της προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας του πορίσματος 1.2.11 χρησιμοποιεί ισχυρά την ισοπεριμετρική ανισότητα του θεωρήματος 1.2.10. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε απευθείας την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά το χώρο του Gauss.

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n(x) \leqslant \frac{1}{\gamma_n(A)}, \tag{1.4.13}$$

όπου $d(x,A) = \inf\{\|x-y\|_2 : y \in A\}$. Επομένως, αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant 2\exp(-t^2/4) \tag{1.4.14}$$

γιά κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $g_n(x)$ την συνάρτηση $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$, και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^{d(x,A)^2/4} g_n(x) \ \ , \ \ g(x) = \chi_A(x) g_n(x) \ \ , \ \ m(x) = g_n(x). \tag{1.4.15}$$

Γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}(2\pi)^n f(x)g(y) &= e^{d(x,A)^2/4} e^{-\|x\|_2^2/2} e^{-\|y\|_2^2/2} \\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|x-y\|_2^2}{4} - \frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|y\|_2^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\|x+y\|_2^2}{4}\right) \\ &= \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2\right)\right)^2 \\ &= (2\pi)^n \left(m\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2,\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την $d(x,A) \leqslant \|x-y\|_2$. Παρατηρώντας ότι $g(y) = 0$ αν $y \notin A$, βλέπουμε ότι οι f, g, m ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa-Leindler με $\lambda = 1/2$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα 1.2.4 και έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} g_n(dx)\right)\gamma_n(A) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\gamma_n(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)d\gamma_n(x)\right) \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} m(x)d\gamma_n(x)\right)^2 = 1.\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος. Γιά τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$e^{t^2/4}\gamma_n(x : d(x,A) > t) \leqslant \int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx) \leqslant \frac{1}{\gamma_n(A)} = 2. \tag{1.4.18}$$

Δηλαδή, $\gamma_n(A_t^c) \leqslant 2\exp(-t^2/4)$. □

1.4γ΄ Η συνάρτηση συγκέντρωσης του διακριτού κύβου

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1,1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο E_2^n ορίζουμε το κανονικό μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ θέτουμε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{1.4.19}$$

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 1.4.3. *Για κάθε $A \subseteq E_2^n$,*

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \tag{1.4.20}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των σημείων του A. Αν $\mathrm{card}(A) = 1$ δηλαδή $A = \{y\}$, τότε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A) = \{y\}\} = \|x-y\|_2. \tag{1.4.21}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) &= \mathbb{E}\left(e^{\|x-y\|_2^2/8}\right)\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x\in E_2^n} e^{\|x-y\|_2^2/8}.\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

Κάθε $x \in E_2^n$ διαφέρει από το y σε i θέσεις, $i = 0,1,\ldots,n$. Το πλήθος των $x \in E_2^n$ που διαφέρουν σε i θέσεις από το y είναι $\binom{n}{i}$. Παρατηρούμε ότι $\|x-y\|_2^2 = 4i$ όταν το x διαφέρει απο το y σε i θέσεις. Άρα,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\|x-y\|_2^2/8} &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^{i/2}\\ &= \frac{1}{2^n}\left(1+e^{1/2}\right)^n = \left(\frac{1+e^{1/2}}{2}\right)^n\\ &\leqslant 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)},\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

αφού $e^{1/2} \leqslant e \leqslant 3$.

Έστω τώρα ότι $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Αναγκαστικά έχουμε $A = E_1$, επομένως $\phi_A(x) = 0$ για κάθε $x \in E_1$. Άρα,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}e^0 = 1 = 1/\mu_1(A). \tag{1.4.24}$$

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε $A \subseteq E_{n+1}$ με $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$A = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_{-1} \times \{-1\}) \tag{1.4.25}$$

όπου $A_1, A_{-1} \neq \emptyset$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$.

Λήμμα 1.4.4. *Για κάθε $x \in E_2^n$,*

$$\phi_A((x,1)) \leqslant \phi_{A_1}(x). \tag{1.4.26}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A_1)\} \subseteq \{\|(x,1)-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{1.4.27}$$

Έστω $y \in \mathrm{conv}(A_1)$. Τότε, $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ όπου $t_i \geqslant 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ και $x_i \in A_1$. Τότε όμως $(x_i, 1) \in A$ και

$$\sum_{i=1}^m t_i(x_i,1) = \Big(\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i\Big) = (y,1), \tag{1.4.28}$$

δηλαδή $(y,1) \in \mathrm{conv}(A)$. Αφού $\|x-y\|_2 = \|(x,1)-(y,1)\|_2$ και

$$\|(x,1)-(y,1)\|_2 \in \{\|(x,1)-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}, \tag{1.4.29}$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.4.5. *Για κάθε $x \in E_2^n$ και για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$,*

$$\phi_A^2((x,-1)) \leqslant 4a^2 + a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x). \tag{1.4.30}$$

Απόδειξη. Έστω $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ $(i = 1, -1)$. Τότε, όπως προηγουμένως, $(z_i, i) \in \mathrm{conv}(A)$. Το $\mathrm{conv}(A)$ είναι κυρτό, άρα

$$z := a(z_1, 1) + (1-a)(z_{-1}, -1) = (az_1 + (1-a)z_{-1}, 2a-1) \in \mathrm{conv}(A). \tag{1.4.31}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|(x,-1)-z\|_2^2 &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, -2a)\|_2^2 \\ &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, 0)\|_2^2 + \|(0,-2a)\|_2^2 \\ &\leqslant (a\|x-z_1\|_2 + (1-a)\|x-z_{-1}\|_2)^2 + 4a^2 \\ &\leqslant a\|x-z_1\|_2^2 + (1-a)\|x-z_{-1}\|_2^2 + 4a^2. \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

Αφού τα $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ ήταν τυχόντα, έπεται ότι

$$\phi_A^2(x,-1) \leqslant a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x) + 4a^2. \quad \square \tag{1.4.33}$$

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα, γράφουμε

$$
\begin{aligned}
(1.4.34)\qquad \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{x\in E_{n+1}} e^{\phi_A^2(x)/8}\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{x\in E_n} e^{\phi_A^2((x,1))/8} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{x\in E_n} e^{\phi_A^2((x,-1))/8}\\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} + \frac{1}{2^{n+1}}e^{a^2/2}\sum_{x\in E_n} e^{a\phi_{A_1}^2(x)/8+(1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x)/8}\\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8}\\
&+ \frac{1}{2^{n+1}}e^{a^2/2}\left(\sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8}\right)^a\left(\sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_{-1}}^2(x)/8}\right)^{1-a}\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8}) + \frac{1}{2}e^{a^2/2}\left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8})\right)^a\left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8})\right)^{1-a}.
\end{aligned}
$$

Θέτουμε

$$(1.4.35)\qquad u_1 = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_1}^2/8}\right)\quad,\quad v_1 = \frac{1}{\mu_n(A_1)}$$

και

$$(1.4.36)\qquad u_{-1} = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8}\right)\quad,\quad v_{-1} = \frac{1}{\mu_n(A_{-1})}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $u_1 \leqslant v_1$ και $u_{-1} \leqslant v_{-1}$. (επίσης, η $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$ γράφεται $v_1 \leqslant v_{-1}$). Άρα η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
(1.4.37)\qquad \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(u_1)^a(u_{-1})^{1-a}\\
&\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(v_1)^a(v_{-1})^{1-a}\\
&\leqslant \frac{v_1}{2}[1+e^{a^2/2}(v_1/v_{-1})^{a-1}].
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ποσότητα γίνεται ελάχιστη για $a = -\ln(v_1/v_{-1})$. Η τιμή $-\ln(v_1/v_{-1})$ είναι περίπου ίση με $1-v_1/v_{-1}$. Επιλέγουμε $a_0 = 1-v_1/v_{-1}$. Αφού $v_1 \leqslant v_{-1}$ έχουμε $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$(1.4.38)\qquad \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{v_1}{2}[1+e^{a_0^2/2}(1-a_0)^{a_0-1}].$$

Λήμμα 1.4.6. *Για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$ έχουμε*

$$1 + e^{a^2/2}(1-a)^{a-1} \leqslant \frac{4}{2-a}. \tag{1.4.39}$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις δείχνουν ότι η ανισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$g(a) = \ln(2+a) - \ln(2-a) - a^2/2 - (a-1)\ln(1-a) \geqslant 0. \tag{1.4.40}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $g'' \geqslant 0$ και $g'(0) = 0$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $g(0) = 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.4.6 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) &\leqslant \frac{v_1}{2}\frac{4}{2-a_0} = \frac{2v_1}{1+v_1/v_{-1}} \\ &= \frac{2}{1/v_1 + 1/v_{-1}} = \frac{2}{\mu_n(A_1)+\mu_n(A_{-1})} \\ &= \frac{1}{\mu_{n+1}(A)}. \end{aligned} \tag{1.4.41}$$

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού $\mu_{n+1}(A_i \times \{i\}) = \mu_n(A_i)/2$, $i = \pm 1$. Έτσι ολοκληρώνονται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.3. □

Πόρισμα 1.4.7. *Για όλα τα $t > 0$, έχουμε*

$$\mu_n(\phi_A \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8}. \tag{1.4.42}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4.3 έχουμε $\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}$. Άρα,

$$\begin{aligned} e^{t^2/8}\mu_n(\phi_A \geqslant t) &\leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{t^2/8} \leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{\phi_A^2/8} \\ &\leqslant \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \end{aligned} \tag{1.4.43}$$

Έστω A μη κενό υποσύνολο του E_2^n. Η συνάρτηση ϕ_A του Θεωρήματος 1.4.3 και η συνάρτηση απόστασης από το A

$$d_n(x,A) = \min\left\{ \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A \right\} \tag{1.4.44}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.4.8. *Γιά κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε*

$$2\sqrt{n} d_n(x, A) \leqslant \phi_A(x) \quad , \quad x \in E_2^n. \tag{1.4.45}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in E_2^n$. Γιά κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\langle x - y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - y_i) = 2nd_n(x, y) \geqslant 2nd_n(x, A). \tag{1.4.46}$$

Από την (1.4.46) έπεται ότι γιά κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$

$$\sqrt{n}\|x - y\|_2 \geqslant \langle x - y, x \rangle \geqslant 2nd_n(x, A). \tag{1.4.47}$$

Αυτό αποδεικνύει την (1.4.45). □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n:

Θεώρημα 1.4.9. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_t) \geqslant 1 - 2\exp(-t^2 n/2). \tag{1.4.48}$$

Απόδειξη. Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x, A) \geqslant t$ και το Λήμμα 1.4.8 δείχνει ότι $\phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}$.

Ομως, από το Θεώρημα 1.4.3 έχουμε

$$e^{t^2 n/2} \mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant \int_{E_2^n} \exp(\phi_A^2(x)/8) d\mu_n(x) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} = 2, \tag{1.4.49}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant 2\exp(-t^2 n/2). \qquad \square \tag{1.4.50}$$

Το Θεώρημα 1.4.9 έχει σαν συνέπεια την συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

Θεώρημα 1.4.10. *Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ. Έστω M ένας μέσος Lévy της f στον E_2^n. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{|f - M| \geqslant t\}) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{1.4.51}$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geqslant M\}) \geqslant 1/2$ και $\mu_n(\{f \leqslant M\}) \geqslant 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leqslant M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in \mathrm{conv}A$ έχουμε $f(y) \leqslant M$. Αν λοιπόν $f(x) \geqslant M + t$ για κάποιο $x \in E_2^n$, τότε

$$f(x) \geqslant M + t \geqslant f(y) + t \tag{1.4.52}$$

για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x-y\|_2 \geqslant |f(x)-f(y)| \geqslant t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x) \geqslant t/\sigma. \tag{1.4.53}$$

Από το Πόρισμα 1.4.7 και από την $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) &\leqslant \mu_n(\{\phi_A \geqslant t/\sigma\}) \\ &\leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8\sigma^2} \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{1.4.54}$$

Έστω $t>0$ και $B=\{f \leqslant M-t\}$. Αν $u<t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x) \geqslant M-t+u \implies \phi_B(x) \geqslant u/\sigma \tag{1.4.55}$$

και με χρήση του Πορίσματος 1.4.7 έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f(x) \geqslant M\}) &\leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M-t+u\}) \\ &\leqslant \mu_n(\{\phi_B \geqslant u/\sigma\}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(B)} e^{-u^2/8\sigma^2} \end{aligned} \tag{1.4.56}$$

Όμως $1/2 \leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M\})$, άρα

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-u^2/8\sigma^2}. \tag{1.4.57}$$

Αφήνοντας το u να τείνει στο t παίρνουμε

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{1.4.58}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{|f-M|>t\}) &= \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) + \mu_n(\{f \leqslant M-t\}) \\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} \\ &= 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{1.4.59}$$

1.5 Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss

Σαν μια πρώτη εφαρμογή του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου στην σφαίρα, αποδεικνύουμε εδώ το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss, το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στην θεωρία των εμφυτεύσεων μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα.

Ορισμός 1.5.1 (παραμόρφωση)**.** Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ από τον μετρικό χώρο (X,d) στον μετρικό χώρο (Y,σ) λέγεται ισομετρική εμφύτευση αν διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, αν $\sigma(f(x),f(y)) = d(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$. Για πολλές εφαρμογές θα μας αρκούσε να πετύχουμε μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d) στον μετρικό χώρο (Y, d) (για παράδειγμα, στον Ευκλείδειο χώρο) η οποία να μην παραμορφώνει πολύ τις αποστάσεις. Ένας τρόπος να ορίσουμε την έννοια της *κατά προσέγγιση ισομετρικής εμφύτευσης* είναι ο εξής. Έστω $f : X \to Y$ μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d_X) στο μετρικό χώρο (Y, d_Y). Η *παραμόρφωση* της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{d_X(x, y)}{d_Y(f(x), f(y))}. \tag{1.5.1}$$

Ειδικότερα, αν $f : X \to Y$ είναι μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d) στο χώρο με νόρμα $(Y, \|\cdot\|)$ τότε η **παραμόρφωση** της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{d(x, y)}{\|f(x) - f(y)\|}. \tag{1.5.2}$$

Συμβολίζουμε με $c_Y(X)$ την ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση με την οποία ο X μπορεί να εμφυτευτεί στον Y. Αν $c_Y(X) \leqslant \alpha$ τότε λέμε ότι ο X είναι α-εμφυτεύσιμος στον Y.

Σχετικά με το πρόβλημα της εμφύτευσης ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου στον Ευκλείδειο χώρο, ο Bourgain απέδειξε το 1985 ότι κάθε μετρικός χώρος (X, d) με n σημεία εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log n)$. Δηλαδή,

$$\sup_{|X| = n} c_2(X) \leqslant c \log n, \tag{1.5.3}$$

όπου $c_2(X) = c_{\ell_2}(X)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα των Johnson-Lindenstrauss θα δούμε ότι η εμφύτευση μπορεί πάντα να γίνει σε Ευκλείδειο χώρο διάστασης $d = O(\log n)$.

Θεώρημα 1.5.2 (Johnson-Lindenstrauss). *Έστω X ένα σύνολο n-σημείων σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο. Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1]$ υπάρχει $(1+\varepsilon)$-εμφύτευση του X στον ℓ_2^k για κάποιον $k = O(\varepsilon^{-2} \log n)$.*

Η απόδειξη θα βασιστεί στο Λήμμα του Lévy.

Λήμμα 1.5.3. *Αν $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση τότε, για κάθε $t > 0$,*

$$\sigma(f < \mathrm{med}(f) - t) \leqslant e^{-t^2 n/2} \quad \textit{και} \quad \sigma(f > \mathrm{med}(f) + t) \leqslant e^{-t^2 n/2}. \tag{1.5.4}$$

Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ που απεικονίζει κάθε $x \in S^{n-1}$ στο μήκος $f_k(x)$ της προβολής του πάνω στον υπόχωρο H_k που παράγεται από τα πρώτα k διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$f_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2} \tag{1.5.5}$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Λήμμα 1.5.4. *Υπάρχει πραγματικός αριθμός $m = m(n,k)$ ώστε*

$$\sigma(f_k < m - t) \leqslant e^{-t^2 n/2} \quad \text{και} \quad \sigma(f_k > m + t) \leqslant e^{-t^2 n/2} \tag{1.5.6}$$

για κάθε $t > 0$. Αν το n είναι μεγαλύτερο από κατάλληλη απόλυτη σταθερά και αν $k \geqslant 10 \log n$, τότε $m \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Απόδειξη. Η (1.5.6) ισχύει με $m = \text{med}(f)$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 1.5.3, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f_k είναι 1-Lipschitz.

Μένει να δούμε το κάτω φράγμα για το m. Παρατηρήστε ότι

$$\int_{S^{n-1}} f_k^2 d\sigma = k \int_{S^{n-1}} x_1^2 d\sigma(x) = \frac{k}{n} \int_{S^{n-1}} \|x\|_2^2 d\sigma(x) = \frac{k}{n}. \tag{1.5.7}$$

Για κάθε $t > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} = \int_{S^{n-1}} f_k^2 d\sigma &\leqslant \sigma(f \leqslant m+t) \cdot (m+t)^2 + \sigma(f > m+t) \cdot \|f_k\|_\infty^2 \\ &\leqslant (m+t)^2 + e^{-t^2 n/2}. \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Επιλέγουμε $t = \sqrt{k/5n}$. Έχουμε υποθέσει ότι $k \geqslant 10 \log n$, απ' όπου έπεται ότι $\exp(-t^2 n/2) \leqslant \frac{1}{n}$. Άρα,

$$\frac{k}{n} \leqslant (m+t)^2 + \frac{1}{n}, \tag{1.5.9}$$

δηλαδή,

$$m \geqslant \sqrt{\frac{k-1}{n}} - t \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}} \tag{1.5.10}$$

αν το n (οπότε και το k) είναι αρκετά μεγάλο. Ακριβέστερος υπολογισμός δείχνει ότι $m = \sqrt{k/n} + O(1/\sqrt{n})$ για κάθε k. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο. Έστω X ένα σύνολο n σημείων στον ℓ_2. Θέτουμε $k = 200\varepsilon^{-2} \log n$. Αν $k \geqslant n$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, οπότε υποθέτουμε ότι $k < n$.

Έστω L ο τυχαίος k-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του ℓ_2^n. Έστω $p_L : \ell_2^n \to L$ η ορθογώνια προβολή επί του L και έστω $m = m(n,k)$.

Έστω x και y στο X. Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα (ως προς L) να μην ισχύει η

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|x-y\|_2 \leqslant \|p_L(x) - p_L(y)\|_2 \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|x-y\|_2 \tag{1.5.11}$$

είναι μικρότερη από $\frac{1}{n^2}$.

Θέτουμε $u = x - y$. Αφού κάθε p_L είναι γραμμική απεικόνιση, η (1.5.11) γράφεται

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|u\|_2 \leqslant \|p_L(u)\|_2 \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|u\|_2, \tag{1.5.12}$$

και, επειδή όλοι οι όροι της ανισότητας είναι θετικά ομογενείς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|u\|_2 = 1$. Δηλαδή, για σταθερό $u \in S^{n-1}$ ζητάμε να ισχύει η

$$\mathbb{P}\left(L : \left| \|p_L(u)\|_2 - m \right| > \frac{\varepsilon m}{3}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}. \tag{1.5.13}$$

Όμως, η πιθανότητα αυτή είναι ακριβώς ίση με το

$$\sigma\left(x \in S^{n-1} : \left| f_k(x) - m \right| > \frac{\varepsilon m}{3}\right). \tag{1.5.14}$$

Από το Λήμμα 1.5.4, αυτό είναι μικρότερο από

$$2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m^2 n}{18}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k}{72}\right) < n^{-2}. \tag{1.5.15}$$

Αφού υπάρχουν λιγότερα από n^2 ζευγάρια σημείων $x, y \in X$, υπάρχει κάποιος L ώστε η (1.5.11) να ισχύει για κάθε $x, y \in X$. Τότε, η απεικόνιση $p_L : X \to L$ ορίζει μια εμφύτευση του X στον ℓ_2^k με παραμόρφωση $D \leqslant (1 + \varepsilon/3)/(1 - \varepsilon/3) < 1 + \varepsilon$ (αν $0 < \varepsilon < 1$). $\square$

Η εφαρμογή: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει μια εμφύτευση $f : X \to \ell_2$ με παραμόρφωση $\mathrm{dist}(f) = \alpha$. Θεωρώντας τον υπόχωρο του ℓ_2 που παράγουν τα $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι η f εμφυτεύει τον X στον ℓ_2^n. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.5.2 με $\varepsilon = 1/2$ για το σύνολο $f(X)$ στον ℓ_2^n βρίσκουμε $k \leqslant C \log n$ και εμφύτευση $h : f(X) \to \ell_2^k$ με παραμόρφωση $\mathrm{dist}(h) < 2$. Τότε, η $f_1 = h \circ f : X \to \ell_2^k$ είναι μια (2α)–εμφύτευση του X στον ℓ_2^k. Με άλλα λόγια, ισχύει η εξής «αρχή αναγωγής της διάστασης»:

> Αν ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος X εμφυτεύεται με παραμόρφωση α σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, τότε εμφυτεύεται με παραμόρφωση 2α στον $\ell_2^{C \log |X|}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Ειδικότερα, η συζήτηση που έγινε στην αρχή της παραγράφου δείχνει ότι υπάρχει $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 2$ μπορούμε να βρούμε $d \leqslant c \log n$ ώστε

$$\sup_{|X|=n} c_{\ell_2^d}(X) \leqslant c \log n. \tag{1.5.16}$$

1.6 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε «απόσταση» $\rho(x, y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ να είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y.

(α) Δείξτε ότι: αν $\rho(x,y)=\theta$ τότε

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_2 \leqslant \rho(x,y), \qquad x,y\in S^{n-1}.$$

(β) Δείξτε ότι η ρ είναι μετρική στην S^{n-1}.

2. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω

$$\|x\| = \min\{t\geqslant 0 : x\in tK\}$$

η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K (ελέγξτε ότι $K=\{x : \|x\|\leqslant 1\}$ δηλαδή το K είναι η μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$). Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}dx = |K|\cdot\int_0^\infty t^n e^{-t}dt.$$

Γενικότερα, δείξτε ότι για κάθε $p>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = |K|\cdot\int_0^\infty pt^{n+p-1}e^{-t^p}dt.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να γράψετε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\|x\|}^\infty pt^{p-1}e^{-t^p}dt\right)dx.$$

3. Η συνάρτηση $\Gamma:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Δείξτε ότι:

(α) $\Gamma(1)=1$.

(β) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x>0$.

(γ) $\Gamma(n+1)=n!$ *για κάθε* $n=0,1,2,\ldots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση Γ είναι *λογαριθμικά κυρτή*: η $\log\Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση.

4. Για κάθε $p\geqslant 1$, η συνάρτηση

$$\|x\|_p = (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leqslant 1\}.$$

Δείξτε ότι ο όγκος της B_p^n είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}.$$

5. (*το Λήμμα του Borell*) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leqslant a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2}\gamma_n(A) \leqslant \gamma_n(A+x) \leqslant \gamma_n(A).$$

7. Έστω $f, g, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h(\sqrt{rs}) \geqslant \sqrt{f(r)} \cdot \sqrt{g(s)}$$

για κάθε $r, s > 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty h(x)dx \geqslant \left(\int_0^\infty f(x)dx \cdot \int_0^\infty g(x)dx\right)^{1/2}.$$

8*. Έστω $f, g, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τρείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h\left(\frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right) \geqslant f(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}}$$

για κάθε $r, s > 0$. Θεωρούμε $p > 0$ και θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^\infty f(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}, \\ B &= \left(\int_0^\infty g(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}, \\ C &= \left(\int_0^\infty h(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$C \geqslant \frac{2}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}.$$

9. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$ και κάποιο $t > 0$ ισχύει $\alpha_\mu(t) < \varepsilon$. Δείξτε ότι: αν $A \in \mathcal{B}(X)$ και $\mu(A) \geqslant \varepsilon$, τότε

$$1 - \mu(A_{t+r}) \leqslant \alpha_\mu(r)$$

για κάθε $r > 0$.

10. Έστω (X, d), (Y, σ) μετρικοί χώροι και έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ Lipsichtz συνεχής συνάρτηση με νόρμα $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}} d(x, y).$$

Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X και έστω ν το Borel μέτρο πιθανότητας $f(\mu)$ το οποίο ορίζεται μέσω της

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{B}(Y).$$

Δείξτε ότι

$$\alpha_\nu(t) \leqslant \alpha_\mu(t/\|f\|_{\mathrm{Lip}})$$

για κάθε $t > 0$.

11. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Δείξτε ότι:

(α) Αν $F : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση, τότε

$$(\mu \otimes \mu)\left(\{(x, y) \in X \times X : |F(x) - F(y)| \geqslant t\}\right) \leqslant 2\alpha_\mu(t/2)$$

για κάθε $t > 0$.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(X)$ και $\mathrm{dist}(A, B) = \delta > 0$, τότε

$$\mu(A)\mu(B) \leqslant 4\alpha_\mu(\delta/2).$$

12. Έστω $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \leqslant n$, πεπερασμένη ακολουθία χώρων με νόρμα. Για κάθε $i \leqslant n$ θεωρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο Ω_i του X_i με διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1. Έστω P_i μέτρο πιθανότητας στο Ω_i. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X^{(n)} = \left(\sum_{i \leqslant n} \oplus X_i\right)_2$ και θέτουμε

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

και
$$P = P^n = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n.$$
(το μέτρο γινόμενο στο Ω). Για κάθε $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε
$$\phi_A(t) = d(t, \mathrm{conv}(A)),$$
την απόσταση του t από την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του A στον $X^{(n)}$. Δείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq \Omega$,
$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2}/4\right) \leqslant \frac{1}{P(A)}.$$

Κεφάλαιο 2

Το θεώρημα του Dvoretzky

2.1 Απόσταση Banach-Mazur

Σε αυτό το Κεφάλαιο, κυρτό σώμα λέμε ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Η ακτινική συνάρτηση $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ του K ορίζεται από την

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}. \tag{2.1.1}$$

Η συνάρτηση στήριξης $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}. \tag{2.1.2}$$

Παρατηρήστε ότι, γιά δοσμένη διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$, έχουμε $\rho_K(\theta) \leqslant h_K(\theta)$.

Το πολικό σώμα K° του K είναι το

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \text{ για κάθε } \ x \in K\}. \tag{2.1.3}$$

Οι βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι εξής:

(i) Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, $\rho_{K^\circ}(\theta) = 1/h_K(\theta)$.

(ii) Αν $K \subseteq L$, τότε $L^\circ \subseteq K^\circ$.

(iii) Αν $T \in GL(n)$, τότε $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

(iv) $(K^\circ)^\circ = K$.

(v) $|TK| \cdot |(TK)^\circ| = |K| \cdot |K^\circ|$.

Έστω K συμμετρικό (ως προς την αρχή των αξόνων) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|x\|_K = \min\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda K\}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία του μπάλα $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η δυϊκή νόρμα $\|\cdot\|_*$ της $\|\cdot\|$ ορίζεται από την

$$\|y\|_* = \max\{|\langle x, y\rangle| : \|x\| \leqslant 1\}. \tag{2.1.4}$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|y\|_*\|x\|$ γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν $X^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ είναι ο δυϊκός χώρος του X, τότε $K_{X^*} = K_X^\circ$. Θα γράφουμε $\|\cdot\|_{K^\circ}$ ή $\|\cdot\|_*$, και $\|\cdot\|_K$ ή $\|\cdot\|$ χωρίς αυτό να δημιουργεί σύγχυση.

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $\|T(x)\| \leqslant c\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη *νόρμα* $\|T\|$ του T σαν την μικρότερη σταθερά c για την οποία η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x \in X$. Τότε,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|. \tag{2.1.5}$$

Αν συμβολίσουμε με $B(X, Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$ τότε ο $B(X, Y)$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\| : B(X, Y) \to \mathbb{R}$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα. Ο *δυϊκός χώρος* του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $x^* : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, $X^* = B(X, \mathbb{R})$.

Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές. Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|T(x)\| = \|x\|$. Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισόμορφοι* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι μπορούμε πάντα να ταυτίζουμε έναν n-διάστατο χώρο με νόρμα με έναν χώρο της μορφής $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Λήμμα 2.1.1. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Μπορούμε να ορίσουμε νόρμα $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε ο X να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.*

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X, και έστω $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μια βάση του. Ορίζουμε $T : X \to \mathbb{R}^n$, με

$$T(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n, \tag{2.1.6}$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ορίζουμε $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\|t_1e_1 + \cdots + t_ne_n\|' = \|t_1x_1 + \cdots + t_nx_n\|. \tag{2.1.7}$$

Η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και

$$\|T(x)\|' = \|x\| \quad \text{για κάθε} \quad x \in X. \tag{2.1.8}$$

Άρα, ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των X και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$. □

Η έννοια της απόστασης Banach-Mazur εμφανίζεται στο βιβλίο του Banach «Théorie des opérations linéaires» (1932). Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα, άπειρης ενδεχομένως διάστασης, και ας υποθέσουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y (γράφουμε $X \sim Y$). Ορίζουμε την *απόσταση Banach-Mazur* των X και Y ως εξής:

$$d(X,Y) := \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \;\big|\; T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{2.1.9}$$

Αν οι X και Y δεν είναι ισόμορφοι ($X \not\sim Y$), θέτουμε $d(X,Y) = +\infty$. Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur περιγράφονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα. Τότε,*

(i) $d(X,Y) \geq 1$.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(iii) $d(X,Y) \leqslant d(X,Z)\, d(Z,Y)$.

(iv) *Αν οι X και Y είναι αυτοπαθείς, τότε $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την ιδιότητα (iv) (η απόδειξη των υπόλοιπων ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση). Έστω $T : X \to Y$ ισομορφισμός. Τότε, ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ του T, που ορίζεται από την $T^*(y^*) = y^* \circ T$ για κάθε $y^* \in Y^*$, είναι ισομορφισμός και ικανοποιεί τις $\|T^*\| = \|T\|$, και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Άρα,

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| = \|T^*\|\,\|(T^*)^{-1}\| \geqslant d(X^*,Y^*). \tag{2.1.10}$$

Αφού ο T ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι

$$d(X,Y) \geqslant d(X^*,Y^*). \tag{2.1.11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι X και Y είναι αυτοπαθείς. Από το προηγούμενο κομμάτι της απόδειξης έχουμε $d(X^*,Y^*) \geqslant d(X^{**},Y^{**})$. Όμως, ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, δηλαδή $d(X,X^{**}) = 1$. Όμοια, $d(Y,Y^{**}) = 1$. Έπεται ότι

$$d(X,Y) \leqslant d(X,X^{**})d(X^{**},Y^{**})d(Y^{**},Y) = d(X^{**},Y^{**}) \leqslant d(X^*,Y^*), \tag{2.1.12}$$

και συνδυάζοντας με την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$. □

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur δίνεται στην επόμενη Πρόταση: η απόσταση δύο χώρων X και Y είναι μικρή αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του X που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του Y (περιέχει την B_Y και περιέχεται σε «μικρό» πολλαπλάσιο της B_Y).

Πρόταση 2.1.3. *Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Τότε,*

$$d(X,Y) = \inf\{d > 0 \mid \exists T : X \to Y \;:\; B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq d\,B_Y\}. \tag{2.1.13}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $d(X,Y) < d < +\infty$. Από τον ορισμό της απόστασης, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με $\|T\|\,\|T^{-1}\| < d$. Από τον ορισμό της νόρμας τελεστή βλέπουμε ότι:

(α) Για κάθε $x \in B_X$ έχουμε $\|T(x)\|_Y \leqslant \|T\|\,\|x\|_X \leqslant \|T\|$, άρα

$$T(B_X) \subseteq \|T\|\, B_Y. \tag{2.1.14}$$

(β) Για κάθε $y \in B_Y$ έχουμε $\|T^{-1}(y)\|_X \leqslant \|T^{-1}\|\,\|y\|_Y \leqslant \|T^{-1}\|$, άρα

$$T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\|\, B_X, \tag{2.1.15}$$

ή, ισοδύναμα,

$$B_Y \subseteq \|T^{-1}\|\, T(B_X). \tag{2.1.16}$$

Αν θέσουμε $S = \|T^{-1}\|\, T$, τότε, από το (α) έχουμε $S(B_X) \subseteq \|T\|\,\|T^{-1}\|\, B_Y$, και από το (β) έχουμε $B_Y \subseteq S(B_X)$. Δηλαδή, υπάρχει $S : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq d\, B_Y. \tag{2.1.17}$$

Αντίστροφα, αν $B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq dB_Y$ για κάποιον $S : X \to Y$, τότε $\|S\| \leqslant d$ και $\|S^{-1}\| \leqslant 1$. Άρα, $d(X,Y) \leqslant \|S\|\,\|S^{-1}\| \leqslant d$. □

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim X = \dim Y = n$. Ξέρουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα απλό επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ ώστε $d(X,Y) = \|T\|\,\|T^{-1}\|$. Ειδικότερα, $d(X,Y) = 1$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y.

2.2 Το θεώρημα του John και το λήμμα των Dvoretzky και Rogers

Το θεώρημα του F. John (1948) δίνει ακριβές άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur τυχόντος n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον ℓ_2^n.

Θεώρημα 2.2.1. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε $d(X,\ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$.*

Ακριβέστερα, ο John έδειξε ότι αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$. Με τον όρο *ελλειψοειδές* στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε κάθε κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leqslant 1 \right\}, \tag{2.2.1}$$

όπου $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα). Μια χρήσιμη ισοδύναμη περιγραφή των ελλειψοειδών δίνεται από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2.2.2. *Ένα κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε $E = T(B_2^n)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ελλειψοειδές, δηλαδή ορίζεται από την (2.2.1) για κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ και κάποιους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ο T είναι προφανώς αντιστρέψιμος, και $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν υπάρχει $y = \sum_{j=1}^n t_j v_j \in B_2^n$ με $x = T(y)$. Τότε όμως, η ισότητα

$$\sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \sum_{j=1}^n t_j\alpha_j v_j, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n t_i^2 \tag{2.2.2}$$

δείχνει ότι $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν $x \in E$, δηλαδή $E = T(B_2^n)$.

Αντίστροφα, έστω $T \in GL(n)$ και $E = T(B_2^n)$. Αν γράψουμε $S = T^{-1}$, έχουμε

$$\|x\|_E^2 = \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^2 = \|Sx\|_2^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle. \tag{2.2.3}$$

Ο S^*S είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα γράφεται στη μορφή U^*DU όπου D διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\alpha_1^{-2}, \ldots, \alpha_n^{-2}$ (όπου α_i θετικοί πραγματικοί αριθμοί) και ο U είναι ορθογώνιος πίνακας. Θεωρούμε τον διαγώνιο πίνακα $D_1 = \sqrt{D}$ με διαγώνια στοιχεία τα $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος, έχουμε $S^*S = A^2$, όπου $A = U^*D_1U$. Δηλαδή,

$$\|x\|_E^2 = \langle A^2x, x\rangle = \|Ax\|_2^2 = \|D_1Ux\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle Ux, e_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2}, \tag{2.2.4}$$

όπου τα $v_i = U^*e_i$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $x \in E$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η (2.2.1) για τα συγκεκριμένα v_i και α_i, δηλαδή το E είναι ελλειψοειδές. □

Παρατήρηση 2.2.3. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης είναι φανερό ότι αν το E ορίζεται από την (2.2.1) τότε ο όγκος του E ισούται με

$$|E| = |B_2^n| \prod_{i=1}^n \alpha_i. \tag{2.2.5}$$

Θεωρούμε τώρα ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ο F. John (1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Θα λέμε ότι το E είναι το **ελλειψοειδές μέγιστου όγκου** του K. Θα δούμε ταυτόχρονα ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχει το K και έχει ελάχιστο όγκο:

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \supseteq K$ με ελάχιστο όγκο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F}(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχουν το K και ορίζουμε

$$V = \inf\{|E| : E \in \mathcal{F}(K)\} > 0. \tag{2.2.6}$$

Υπάρχει ακολουθία $T_m \in GL(n)$ για την οποία έχουμε $E_m = T_m^{-1}(B_2^n) \supseteq K$ και

$$|E_m| = \frac{|B_2^n|}{|\det(T_m)|} \to V. \tag{2.2.7}$$

Αφού $\|T_m : X_K \to \ell_2^n\| \leqslant 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{k_m}\}$ και $S \in L(\mathbb{R}^n)$ με $T_{k_m} \to S$. Τότε,

$$|\det(S)| = |B_2^n|/V > 0, \tag{2.2.8}$$

άρα $S \in GL(n)$. Ορίζουμε $E = S^{-1}(B_2^n)$. Τότε,

$$\|S : X_K \to \ell_2^n\| = \lim_{m\to\infty} \|T_{k_m} : X_K \to \ell_2^n\| \leqslant 1, \tag{2.2.9}$$

άρα $E \supseteq K$. Αφού $|E| = V$, το E είναι ένα ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει τον ελάχιστο δυνατό όγκο.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μόνο ελλειψοειδές με αυτήν την ιδιότητα. Έστω ότι τα E_1 και E_2 περιέχουν το K και έχουν ελάχιστο όγκο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_1 = B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle^2/\alpha_i^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{2.2.10}$$

Θεωρούμε ένα τρίτο ελλειψοειδές, το

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1+\alpha_i^{-2})\langle x, v_i\rangle^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{2.2.11}$$

Παρατηρήστε ότι $F \supseteq E_1 \cap E_2 \supseteq K$. Συνεπώς,

$$|F| \geqslant |E_1| = |E_2| = |B_2^n|, \tag{2.2.12}$$

και από την (2.2.12) έχουμε $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Παίρνοντας και πάλι υπόψιν την (2.2.5), γράφουμε την (2.2.12) στην μορφή

$$\begin{aligned} 1 = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 &\leqslant \prod_{i=1}^n \frac{2}{1+\alpha_i^{-2}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i^2}. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Όμως, $2\alpha_i \leqslant 1 + \alpha_i^2$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ με ισότητα μόνο αν $\alpha_i = 1$. Άρα, $\alpha_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Έπεται ότι $E_1 = E_2$. □

Το Θεώρημα 2.2.4 και ένα απλό επιχείρημα δυϊσμού εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του K.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \in \mathcal{E}(K)$ με μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.4 υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές F ελάχιστου όγκου του K°. Θεωρούμε το $E = F^\circ$. Τότε $E \subseteq K$, το E είναι ελλειψοειδές (άσκηση) και αν E_1 είναι ένα άλλο ελλειψοειδές με $E_1 \subseteq K$, τότε $E_1^\circ \supseteq K^\circ$, άρα $|E_1^\circ| \geqslant |F|$. Τότε,

$$|E_1| = \frac{|B_2^n|^2}{|E_1^\circ|} \leqslant \frac{|B_2^n|^2}{|F|} = |E|. \tag{2.2.14}$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $E_1^\circ = F$, δηλαδή $E_1 = E$. Άρα, το E είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. □

Δίνουμε τώρα μια στοιχειώδη απόδειξη του Θεωρήματος του John. Στην Παράγραφο §2.4 αποδεικνύεται η πλήρης μορφή του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Τότε,*

$$B_2^n \subseteq \sqrt{n} K. \tag{2.2.15}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει x στο σύνορο του K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο της $(1/\sqrt{n})B_2^n$. Αλλάζοντας συντεταγμένες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του K στο x είναι παράλληλο με το $\{x : x_1 = 0\}$. Δηλαδή,

$$K \subset P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leqslant \frac{1}{c} \right\}, \tag{2.2.16}$$

όπου $c > \sqrt{n}$. Για κάθε $a, b > 0$ ορίζουμε το ελλειψοειδές

$$E_{a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^2 x_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^n x_i^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{2.2.17}$$

Ισχυρισμός. Αν $\frac{a^2 - b^2}{c^2} + b^2 \leqslant 1$, τότε $K \subseteq E_{a,b}$.

Πράγματι: αν $y \in K$, τότε $y \in P \cap B_2^n$. Άρα,

$$|y_1| \leqslant \frac{1}{c} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 \leqslant 1. \tag{2.2.18}$$

Έπεται ότι

$$a^2y_1^2 + b^2\sum_{i=2}^n y_i^2 = (a^2-b^2)y_1^2 + b^2\sum_{i=1}^n y_i^2 \leqslant \frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leqslant 1. \tag{2.2.19}$$

Δηλαδή, $y \in E_{a,b}$. □

Ο όγκος του $E_{a,b}$ ισούται με $|E_{a,b}| = |B_2^n|/(ab^{n-1})$. Αν λοιπόν $ab^{n-1} > 1$, τότε $|E_{a,b}| < |B_2^n|$. Με την υπόθεση ότι $c > \sqrt{n}$, θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$ab^{n-1} > 1 \quad \text{και} \quad \frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leqslant 1. \tag{2.2.20}$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έχουμε βρεί ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει όγκο γνήσια μικρότερο από τον όγκο της B_2^n.

Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1/2)$, θέτουμε $b_\varepsilon = 1-\varepsilon$ και $a_\varepsilon = (1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{n-1}$. Τότε,

$$a_\varepsilon b_\varepsilon^{n-1} = [(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)]^{n-1} = (1+\varepsilon^2-2\varepsilon^3)^{n-1} > 1. \tag{2.2.21}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{a_\varepsilon^2-b_\varepsilon^2}{c^2} + b_\varepsilon^2 &= \frac{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{2(n-1)}}{c^2} + \left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-\varepsilon)^2 \\ &= \frac{1}{c^2}[1+2(n-1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)] + \left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-2\varepsilon+\varepsilon^2) \\ &= 1 + 2\varepsilon\left(\frac{n}{c^2}-1\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Αφού $(n/c^2)-1 < 0$, είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 1 αν αφήσουμε το $\varepsilon \to 0^+$. Για μικρό λοιπόν $\varepsilon > 0$, το ελλειψοειδές $E_{a_\varepsilon, b_\varepsilon}$ μας οδηγεί σε άτοπο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Θεωρούμε την μοναδιαία μπάλα B_X του X και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου E της B_X. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε $E = T^{-1}(B_2^n)$. Τότε, $T(B_X) \subseteq B_2^n$ και η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του $T(B_X)$. Από το θεώρημα του John,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq T(B_X) \subseteq B_2^n. \tag{2.2.23}$$

Έπεται ότι

$$\|T : X \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to X\| \leqslant 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}, \tag{2.2.24}$$

άρα, $d(X,\ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. □

Το Θεώρημα 2.2.1 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d μας δίνουν ένα άνω φράγμα για την «διάμετρο του n-διάστατου Banach-Mazur compactum».

Θεώρημα 2.2.7. *Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X,Y) \leqslant n$.* □

Στην επόμενη παράγραφο θα χρειαστούμε ένα ακόμα αποτέλεσμα για την σχέση ενός συμμετρικού κυρτού σώματος με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του. Αποτελέσματα αυτού του είδους αποδείχθηκαν από τους Dvoretzky και Rogers (1950). Το συγκεκριμένο μας λέει χοντρικά ότι αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K τότε υπάρχουν «πολλές» κάθετες ανά δύο διευθύνσεις στις οποίες οι $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_K$ συγκρίνονται καλά.

Θεώρημα 2.2.8 (Dvoretzky-Rogers)**.** *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που περιέχεται στο K. Τότε, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{x_1,\dots,x_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ ώστε*

$$1 = \|x_i\|_2 \geqslant \|x\|_K \geqslant 2^{-\frac{n}{n-i+1}} \tag{2.2.25}$$

για κάθε $i=1,\dots,n$.

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η B_2^n είναι το ελειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι φανερό ότι υπάρχει $x_1 \in S^{n-1}$ το οποίο ανήκει στο σύνορο του K (αλλιώς, θα υπήρχε $r>1$ ώστε $rB_2^n \subseteq K$ και θα οδηγούμασταν σε άτοπο). Δηλαδή,

$$\|x\|_2 = \|x\|_K = 1. \tag{2.2.26}$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά, ως εξής: αν $i \geqslant 2$ και αν έχουμε επιλέξει τα $x_1,\dots,x_{i-1}$, επιλέγουμε $x_i \in [\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_{i-1}\}]^{\perp}$ έτσι ώστε $\|x_i\|_2 = 1$ και η $\|x_i\|_K$ να είναι η μέγιστη δυνατή. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\text{αν } x \in \mathrm{span}\{x_i,\dots,x_n\} \text{ και } \|x\|_2 \leqslant 1 \text{ τότε } \|x\|_K \leqslant \|x_i\|_K.$$

Σταθεροποιούμε $2 \leqslant i \leqslant n$ και ορίζουμε

$$E = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j x_j : \sum_{j=1}^{i-1} \frac{t_j^2}{a^2} + \sum_{j=i}^n \frac{t_j^2}{b^2} \right\}, \tag{2.2.27}$$

όπου

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad b = \frac{1}{2\|x_i\|_K}. \tag{2.2.28}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $x = \sum_{j=1}^n t_j x_j \in E$, τότε

(i) $\sum_{j=1}^{i-1} t_j x_j \in aB_2^n$, άρα

$$\left\| \sum_{j=1}^{i-1} t_j x_j \right\|_K \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{i-1} t_j x_j \right\|_2 \leqslant a = \frac{1}{2}.$$

(ii) $\frac{1}{b}\sum_{j=i}^{n} t_j x_j \in B_2^n \cap [\mathrm{span}\{x_i,\dots,x_n\}]$, άρα

$$\left\| \sum_{j=i}^{n} t_j x_j \right\|_K \leqslant b\|x_i\|_K = \frac{1}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \right\|_K \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{i-1} t_j x_j \right\|_K + \left\| \sum_{j=i}^{n} t_j x_j \right\|_K \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \tag{2.2.29}$$

δηλαδή $x \in K$. Αφού $E \subseteq K$, έχουμε $|E| \leqslant |B_2^n|$. Συνεπώς,

$$a^{i-1}b^{n-i+1} = \frac{1}{2^n \|x_i\|_K^{n-i+1}} \leqslant 1. \tag{2.2.30}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|x_i\|_K \geqslant 2^{-\frac{n}{n-i+1}}$. □

Σημείωση. Αφού $\frac{n}{n-i+1} \leqslant 2$ για κάθε $i \leqslant \frac{n}{2}+1$, για τα $x_1,\dots,x_n$ του Θεωρήματος 2.2.8 έχουμε $\|x_i\|_K \geqslant \frac{1}{4}$ για κάθε $i = 1,\dots,\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2.3 Το θεώρημα του Dvoretzky

Αφετηρία για το θεώρημα του Dvoretzky είναι ένα άλλο λήμμα των Dvoretzky και Rogers (1950).

Πρόταση 2.3.1. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K. Υπάρχουν $k \simeq \sqrt{n}$ και $y_1,\dots,y_k$ ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ώστε, για κάθε $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \max_{1\leqslant i\leqslant k} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \right\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{2.3.1}$$

Με αφορμή αυτό το αποτέλεσμα, ο Grothendieck έθεσε το ερώτημα αν είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε το $\max_{i\leqslant k}|a_i|$ με το $\left(\sum_{i\leqslant k} a_i^2\right)^{1/2}$ στην παραπάνω Πρόταση, και ταυτόχρονα να έχουμε $k = k(n) \to \infty$ καθώς το $n \to \infty$. Ισοδύναμα, αν υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ (με το k να «μεγαλώνει» με το n) ώστε

$$B_2^n \cap F \subseteq K \cap F \subseteq cB_2^n \cap F, \tag{2.3.2}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ο Dvoretzky (1960) έδωσε καταφατική απάντηση στο ερώτημα.

Θεώρημα 2.3.2 (Dvoretzky). *Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω k φυσικός αριθμός. Υπάρχει $N = N(k,\varepsilon)$ με την εξής ιδιότητα: Αν X είναι χώρος με νόρμα διάστασης $n \geqslant N$, μπορούμε να βρούμε k-διάστατο υπόχωρο F του X με $d(F,\ell_2^k) \leqslant 1+\varepsilon$.*

Σε γεωμετρική γλώσσα, το θεώρημα του Dvoretzky μας λέει ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα αρκετά μεγάλης διάστασης έχει κεντρικές τομές διάστασης k που είναι σχεδόν ελλειψοειδή. Η ακριβής εξάρτηση του $N(k,\varepsilon)$ από τα k και ε μελετήθηκε συστηματικά, και το θεώρημα του Dvoretzky πήρε πολύ πιο συγκεκριμένη ποσοτική μορφή.

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν ακέραιος $k \geqslant c\varepsilon^2(\log 1/\varepsilon)^{-1}\log n$ και k-διάστατος υπόχωρος F του X ο οποίος ικανοποιεί την $d(F,\ell_2^k) \leqslant 1+\varepsilon$.*

Δηλαδή, το Θεώρημα 2.3.2 ισχύει με $N(k,\varepsilon) = \exp(c\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|k)$.Η αρχική απόδειξη του Dvoretzky έδινε την εκτίμηση $N(k,\varepsilon) = \exp(c\varepsilon^{-2}k^2\log k)$. Η (βέλτιστη ως προς n) εκτίμηση του Θεωρήματος 2.3.3 αποδείχτηκε από τον Milman (1971).

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.3. Ένα από τα βασικότερα στοιχεία της απόδειξης είναι το *φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου* στην S^{n-1}, το οποίο συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο χώρος X είναι ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με μια νόρμα $\|\cdot\|$. Η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$, δηλαδή υπάρχουν $a,b > 0$ ώστε

$$\frac{1}{a}\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_2 \tag{2.3.3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Στην συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι a,b είναι οι μικρότεροι θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει η (2.3.3).

Η συνάρτηση $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ με $r(x) = \|x\|$, είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Γράφουμε L_r για τον μέσο Lévy της r.

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει το εξής: αν $m \leqslant \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$ και $y_1,\dots,y_m \in S^{n-1}$, τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε, για κάθε $i = 1,\dots,m$,*

$$L_r - b\varepsilon \leqslant \|Uy_i\| \leqslant L_r + b\varepsilon. \tag{2.3.4}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι υπάρχει φυσιολογικό μέτρο πιθανότητας ν στην $O(n)$ (το μέτρο Haar) το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: αν $x_0 \in S^{n-1}$ και $A \subseteq S^{n-1}$, τότε

$$\sigma(A) = \nu\{U \in O(n) \,:\, Ux_0 \in A\}. \tag{2.3.5}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in S^{n-1} \,:\, L_r - b\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant L_r + b\varepsilon\}. \tag{2.3.6}$$

Τότε, από το λήμμα του Lévy (π.χ. Λήμμα 1.5.4) έχουμε

$$\sigma(A) \geqslant 1 - 2e^{-c_2\varepsilon^2 n}, \tag{2.3.7}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ θέτουμε

$$B_i = \{U \in O(n) \,:\, L_r - b\varepsilon \leqslant \|Uy_i\| \leqslant L_r + b\varepsilon\}. \tag{2.3.8}$$

Οι (2.3.5) και (2.3.7) δείχνουν ότι

$$\nu(B_i) > 1 - 2e^{-c_2\varepsilon^2 n}. \tag{2.3.9}$$

Αφού $m \leqslant \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, το $B = \bigcap B_i$ έχει μέτρο

$$\nu(B) \geqslant 1 - \sum \nu(B_i^c) \geqslant 1 - 2\exp(-c_2\varepsilon^2 n/2). \tag{2.3.10}$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε $\nu(B) > 0$ δηλαδή $B \neq \emptyset$. Τότε, αν $U \in B$ παίρνουμε

$$L_r - b\varepsilon \leqslant \|Uy_i\| \leqslant L_r + b\varepsilon \tag{2.3.11}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Λήμμα 2.3.5 (δ-δίκτυο)**.** *Έστω $\delta \in (0,1)$. Υπάρχει $\mathcal{N} \subset S^{k-1}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε $y \in S^{k-1}$ υπάρχει $x \in \mathcal{N}$ ώστε $\|x - y\|_2 < \delta$.*

(ii) $|\mathcal{N}| \leqslant \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{N} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ένα υποσύνολο της S^{k-1} του οποίου τα σημεία έχουν ανά δύο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του δ και έχει τον μέγιστο δυνατό πληθάριθμο. Τέτοιο υποσύνολο υπάρχει λόγω της συμπάγειας της S^{k-1}.

Τότε, το $\mathcal{N}$ ικανοποιεί το (i): αν όχι, υπάρχει $y \in S^{k-1}$ ώστε $\|x_i - y\|_2 \geqslant \delta$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$. Όμως τότε, το $\mathcal{N}' = \{x_1, \ldots, x_m, y\}$ είναι ένα σύνολο του οποίου τα σημεία ανήκουν στην S^{k-1} και οι αποστάσεις τους ανά δύο είναι μεγαλύτερες ή ίσες του δ. Αυτό είναι άτοπο αφού το $\mathcal{N}'$ έχει περισσότερα στοιχεία από το $\mathcal{N}$.

Για το (ii) θεωρούμε τα σύνολα $x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k$, $i \leqslant m$. Αυτά έχουν ανά δύο ξένα εσωτερικά, και

$$x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k \subset B_2^k + \frac{\delta}{2}B_2^k \tag{2.3.12}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Συνεπώς,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m}\left(x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k\right)\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{\delta}{2}\right)B_2^k\right|. \tag{2.3.13}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\delta}{2}B_2^k\right| \leqslant \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k|, \tag{2.3.14}$$

δηλαδή,

$$m\left(\frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k| \leqslant \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^k |B_2^k|. \tag{2.3.15}$$

Άρα, $m \leqslant (1+\frac{2}{\delta})^k$. □

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείχνουμε το εξής.

Πρόταση 2.3.6. *Έστω $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Αν $(1+2/\delta)^k \leqslant \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, τότε υπάρχουν k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ και δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_F : S^{n-1} \cap F$ με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant L_r + b\varepsilon \tag{2.3.16}$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε υπόχωρο F_0 του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $\dim(F_0) = k$. Από το Λήμμα 2.3.5, υπάρχει δ-δίκτυο $\{y_1, \ldots, y_m\}$ της μοναδιαίας σφαίρας S_{F_0} του F_0, με $m \leqslant (1+2/\delta)^k$.

Αφού $(1+2/\delta)^k \leqslant \exp(c_2\varepsilon^2 n/2)$, το Λήμμα 2.3.4 δείχνει ότι υπάρχει $U \in O(n)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i \leqslant m$,

$$L_r - b\varepsilon \leqslant \|Uy_i\| \leqslant L_r + b\varepsilon. \tag{2.3.17}$$

Θέτουμε $F := U(F_0)$ και $x_i := Uy_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, το $\{x_1, \ldots, x_m\}$ είναι δ-δίκτυο της S_F, για το οποίο ισχύει

$$L_r - b\varepsilon \leqslant \|x_i\| \leqslant L_r - b\varepsilon. \tag{2.3.18}$$

Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα, θα περάσουμε από το δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F σε ολόκληρη την S_F.

Πρόταση 2.3.7. *Έστω F ένας k-διάστατος υπόχωρος του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ για τον οποίο υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_F με την ιδιότητα*

$$L_r - b\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant L_r + b\varepsilon \tag{2.3.19}$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}$. Τότε, για κάθε $y \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leqslant \|y\| \leqslant \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \tag{2.3.20}$$

Απόδειξη. Έστω $y \in S_F$. Υπάρχει $x_0 \in \mathcal{N}$ ώστε $\|y - x_0\|_2 = \delta_1 < \delta$. Τότε, $\frac{y-x_0}{\delta_1} \in S_F$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\left\| \frac{y - x_0}{\delta_1} - x_1 \right\|_2 = \delta_2 < \delta. \tag{2.3.21}$$

Τότε,

$$\|y - x_0 - \delta_1 x_1\|_2 = \delta_1 \delta_2 < \delta^2. \tag{2.3.22}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{N}$ ώστε

$$\left\| y - \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\|_2 \leqslant \delta^{n+1}, \tag{2.3.23}$$

όπου $\delta_0 = 1$. Αφού $\delta < 1$,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i. \tag{2.3.24}$$

Όμως, $\prod_{j=0}^{i} \delta_j \leqslant \delta^i$, άρα

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \|x_i\| \leqslant (L_r + b\varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \\ &= \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta}. \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \|y\| &\geqslant \|x_0\| - \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\| \geqslant L_r - b\varepsilon - \frac{\delta}{1-\delta}(L_r + b\varepsilon) \\ &= \frac{1-2\delta}{1-\delta} L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta}. \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Άρα,

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\varepsilon}{1-\delta} \leqslant \|y\| \leqslant \frac{L_r + b\varepsilon}{1-\delta} \tag{2.3.27}$$

για κάθε $y \in S_F$. □

Επιλέγοντας κατάλληλα τα δ, ε, παίρνουμε μια πρώτη εκτίμηση για τη διάσταση των σχεδόν Ευκλείδειων υποχώρων του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα $r(x) = \|x\|$ που ικανοποιεί την $\|x\| \leqslant b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Αν*

$$k \leqslant k_X(\varepsilon) := c_3\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]n\left(\frac{L_r}{b}\right)^2, \tag{2.3.28}$$

όπου $c_3 > 0$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά, τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1}L_r \leqslant \|x\| \leqslant L_r(1+\varepsilon). \tag{2.3.29}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.3.7, αν $\zeta, \delta \in (0,1)$ και ο $k \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την $(1+2/\delta)^k \leqslant \exp(c_2\zeta^2 n/2)$, τότε για τον τυχαίο k-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in S_F$ έχουμε

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta} \leqslant \|x\| \leqslant \frac{L_r + b\zeta}{1-\delta}. \tag{2.3.30}$$

Για την (2.3.29) αρκεί να επιλέξουμε τα $\delta, \zeta \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$\frac{L_r + b\zeta}{1-\delta} \leqslant L_r(1+\varepsilon) \tag{2.3.31}$$

και

$$\frac{L_r}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{1-2\delta}{1-\delta}L_r - \frac{b\zeta}{1-\delta}. \tag{2.3.32}$$

Αν επιλέξουμε $\zeta = \frac{L_r\delta}{b}$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, παρατηρούμε ότι οι δύο ανισότητες επαληθεύονται.

Μένει να προσδιορίσουμε την ελάχιστη τιμή του k η οποία ικανοποιεί την

$$\left(1+\frac{6}{\varepsilon}\right)^k \leqslant \exp\left(\frac{c_2}{18}\varepsilon^2 n\left(\frac{L_r}{b}\right)^2\right). \tag{2.3.33}$$

Ζητάμε

$$k\log\frac{6}{\varepsilon} \leqslant c_2'\varepsilon^2 n\left(\frac{L_r}{b}\right)^2, \tag{2.3.34}$$

οπότε αρκεί να ικανοποιείται η $k \leqslant k_X(\varepsilon)$. □

Το Θεώρημα 2.3.8 μας λέει ότι η διάσταση των σχεδόν Ευκλείδειων υποχώρων του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ εξαρτάται απο την τάξη της ποσότητας $\frac{L_r}{b}$. Θεωρούμε τη *μέση τιμή* της $r(x) = \|x\|$

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x). \tag{2.3.35}$$

Τότε, οι L_r και M συγκρίνονται αν το γινόμενο ab δεν είναι «πολύ μεγάλο».

Λήμμα 2.3.9. *Υποθέτουμε ότι η $r(x) = \|x\|$ ικανοποιεί την $\frac{1}{a}|x| \leqslant \|x\| \leqslant b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και ότι $ab \leqslant \sqrt{n}$. Τότε,*

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{M}{L_r} \leqslant c, \tag{2.3.36}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_2$, όπου $b \leqslant \sqrt{n}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma\{x : |r(x) - L_r| \geqslant b\varepsilon\} \leqslant 2\exp(-c_2\varepsilon^2 n). \tag{2.3.37}$$

Γράφουμε

$$|M - L_r| \leqslant \int_{S^{n-1}} |r(x) - L_r|\, d\sigma(x) = \int_0^\infty \sigma\{x : |r(x) - L_r| \geqslant t\}dt. \tag{2.3.38}$$

Θέτουμε $b\varepsilon = t$. Χρησιμοποιώντας την $b \leqslant \sqrt{n}$, παίρνουμε

$$|M - L_r| \leqslant \int_0^\infty 2\exp(-c_2 t^2)dt = c_4. \tag{2.3.39}$$

Συνεπώς,

$$\left|\frac{M}{L_r} - 1\right| \leqslant \frac{c_4}{L_r}. \tag{2.3.40}$$

Όμως, αν $x \in S^{n-1}$ τότε $\|x\| \geqslant \|x\|_2 \geqslant 1$. Άρα, $L_r \geqslant 1$. Έπεται ότι

$$\frac{M}{L_r} \leqslant c = 1 + c_4. \tag{2.3.41}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, παρατηρούμε ότι

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x) \geqslant \int_{\{x:\, \|x\| \geqslant L_r\}} \|x\|\, d\sigma(x) \geqslant \frac{1}{2}L_r. \tag{2.3.42}$$

Άρα, $M/L_r \geqslant 1/2$. □

Λήμμα 2.3.10. *Για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$ ισχύει*

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j\leqslant m} |x_j|\, d\sigma(x) \geqslant c_5 \sqrt{\frac{\log m}{n}}, \tag{2.3.43}$$

όπου $c_5 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$. Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \max_{j\leqslant m} |t_j| d\gamma_m(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \max_{j\leqslant m} |t_j| d\gamma_n(t) \\ &= \lambda_n \int_{S^{n-1}} \max_{j\leqslant m} |x_j| \sigma(dx),\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

όπου $\lambda_n \simeq \sqrt{n}$. Όμως,

$$\begin{aligned}\gamma_m\left(t : \max_{j\leqslant m} |t_j| < s\right) &= (2\pi)^{-m/2} \int_{-s}^{s} \cdots \int_{-s}^{s} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} t_j^2\right) dt_1 \cdots dt_m \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} e^{-t^2/2} dt\right)^m \leqslant (1 - ce^{-s^2/2})^m.\end{aligned} \tag{2.3.45}$$

Άρα, αν επιλέξουμε $s \simeq c_1\sqrt{\log m}$, καταλήγουμε στην

$$\gamma_m\left(t : \max_{j\leqslant m} |t_j| \geqslant c_1\sqrt{\log m}\right) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.3.46}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \max_{j\leqslant m} |x_j| \sigma(dx) &\simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^m} \max_{j\leqslant m} |t_j| d\gamma_m(t) \\ &\geqslant \frac{c_1\sqrt{\log m}}{\sqrt{n}} \gamma_m\left(t : \max_{j\leqslant m} |t_j| \geqslant c_1\sqrt{\log m}\right) \\ &\geqslant \frac{c_1}{2}\sqrt{\frac{\log m}{n}}.\end{aligned} \tag{2.3.47}$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα του Dvoretzky. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 2.3.3 (αρκεί να θυμηθείτε τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur).

Θεώρημα 2.3.11. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, διάστασης n, ώστε η B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της B_X. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει υπόχωρος F του X διάστασης $k \geqslant c\varepsilon^2[\log^{-1}(1/\varepsilon)]\log n$, με την ιδιότητα: για κάθε $x \in S_F$,*

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leqslant \|x\| \leqslant L_r(1+\varepsilon). \tag{2.3.48}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του John, έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_2 \tag{2.3.49}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, το Λήμμα 2.3.9 δείχνει ότι

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{M}{L_r} \leqslant c, \tag{2.3.50}$$

όπου $M = \int_{S^{n-1}} \|x\| \, d\sigma(x)$. Από το λήμμα Dvoretzky-Rogers υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$, με $\|x_i\| \geqslant \frac{1}{4}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in E_2^n$, ο τελεστής $T_\varepsilon : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με

$$T_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i \tag{2.3.51}$$

είναι ορθογώνιος. Το σ είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, άρα

$$M = \int_{S^{n-1}} \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \, d\sigma(a) = \int_{S^{n-1}} \int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i\| d\mu_n(\varepsilon) \, d\sigma(a). \tag{2.3.52}$$

Ισχυρισμός. *Έστω $y_1, \ldots, y_n$ διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα. Για κάθε $j = 1, \ldots n$,*

$$\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i \right\| d\mu_n(\varepsilon) \geqslant \|y_j\|. \tag{2.3.53}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές, οπότε υποθέτουμε ότι

$$\int_{E_2^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i z_i \right\| d\mu_{n-1}(\varepsilon) \geqslant \|z_j\| \tag{2.3.54}$$

για κάθε $z_1, \ldots, z_{n-1}$ και για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$.

Έστω $y_1, \ldots, y_n$. Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $\varepsilon \in E_2^{n-1}$ έχουμε

$$2 \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i + y_n \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i - y_n \right\|, \tag{2.3.55}$$

οπότε, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_{E_2^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i \right\| d\mu_{n-1}(\varepsilon) \leqslant \int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i \right\| d\mu_n(\varepsilon). \tag{2.3.56}$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\int_{E_2^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i \right\| d\mu_{n-1}(\varepsilon) \geqslant \|y_j\| \tag{2.3.57}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$, και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώνεται με κυκλική εναλλαγή των y_j. □

Παίρνοντας $y_i = a_i x_i$, έχουμε

$$\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i x_i \right\| d\mu_n(\varepsilon) \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|a_i x_i\|. \tag{2.3.58}$$

Επιστρέφοντας στην (2.3.52) παίρνουμε

$$M \geqslant \int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|a_i x_i\|\, d\sigma(a) \geqslant \int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant [\frac{n}{2}]} \|a_i x_i\|\, d\sigma(a). \tag{2.3.59}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το λήμμα Dvoretzky-Rogers (Θεώρημα 2.2.8) έχουμε

$$M \geqslant \frac{1}{4} \int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant [\frac{n}{2}]} |a_i|\, d\sigma(a), \tag{2.3.60}$$

και από το Λήμμα 2.3.10 έπεται ότι

$$M \geqslant c\sqrt{\frac{\log\,[\frac{n}{2}]}{n}} \geqslant c'\sqrt{\frac{\log n}{n}}. \tag{2.3.61}$$

Αφού $L_r \geqslant cM$, από το Θεώρημα 2.3.8 συμπεραίνουμε ότι, αν

$$\begin{aligned} k = [k_X(\varepsilon)] &= \left[c_3 \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{L_r}{b} \right)^2 \right] \\ &\geqslant c_3' \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] n \left(\frac{M}{b} \right)^2 \\ &\geqslant c_3'' \varepsilon^2 [\log^{-1}(1/\varepsilon)] \log n, \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ με $\dim F = k$ ώστε: για κάθε $x \in S_F$,

$$(1+\varepsilon)^{-1} L_r \leqslant \|x\| \leqslant L_r(1+\varepsilon). \tag{2.3.63}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.3. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/4$, οπότε $(1+\delta)^2 \leqslant 1+\varepsilon$.

Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του $T(B_X)$ να είναι η B_2^n. Ορίζουμε $r(x) = \|x\|_{T(B_X)}$ και θεωρούμε τον μέσο L_r της r. Από το Θεώρημα 2.3.11, υπάρχουν $k \geqslant c(\delta)\log n = c(\varepsilon)\log n$ και k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$\frac{L_r}{(1+\delta)}\,(B_2^n \cap F) \subseteq T(B_X)\cap F \subset (1+\delta)L_r\,(B_2^n \cap F)\,. \tag{2.3.64}$$

Αν ορίσουμε $F_1 = T^{-1}(F)$, έχουμε $d(F_1, \ell_2^k) \leqslant (1+\delta)^2 \leqslant 1+\varepsilon$. □

Η γεωμετρική διατύπωση του Θεωρήματος 2.3.3 είναι η εξής: Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $k \geqslant c\varepsilon^2\big(\log(1/\varepsilon)\big)^{-1}\log n$, υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, και ελλειψοειδές E στον F ώστε

$$E \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)E. \tag{2.3.65}$$

2.4 Παράρτημα: το «πλήρες θεώρημα του John»

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η B_2^n. Το $u \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *σημείο επαφής* των K και B_2^n αν $\|u\|_2 = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν $x \in \mathrm{bd}(K)\cap \mathrm{bd}(B_2^n)$. Η «πλήρης έκδοση» του θεωρήματος του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ των K και B_2^n ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j \tag{2.4.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 2.4.2. Το Θεώρημα 2.4.1 μας λέει ότι η ταυτοτική απεικόνιση I του $\mathbb{R}^n$ αναπαρίσταται στην μορφή

$$I = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \otimes u_j, \tag{2.4.2}$$

όπου $u_j \otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j\rangle u_j$.

Από την (2.4.1) έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2. \tag{2.4.3}$$

Επίσης, παίρνοντας $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned}(2.4.4)\qquad \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle e_i, u_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(2.4.5)\qquad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Από την (2.4.5), αν υπάρχει η ζητούμενη αναπαράσταση θα πρέπει να ισχύει $\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j/n) = 1$. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι ο I/n γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός προβολών της μορφής $u \otimes u$, όπου u σημείο επαφής των K και B_2^n. Ορίζουμε

$$(2.4.6)\qquad T = \{u \otimes u : \|u\|_2 = \|u\|_K = 1\},$$

και θα δείξουμε ότι $I/n \in \mathrm{conv}(T)$. Παρατηρήστε ότι το $\mathrm{conv}(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και ότι $T \neq \emptyset$: αν η B_2^n δεν ακουμπούσε το σύνορο του K, θα μπορούσαμε να βρούμε $r > 1$ ώστε $rB_2^n \subseteq K$, οπότε η B_2^n δεν θα ήταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Έστω ότι $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$. Από διαχωριστικό θεώρημα, μπορούμε να βρούμε $\phi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $r \in \mathbb{R}$ ώστε

$$(2.4.7)\qquad \langle \phi, I/n\rangle < r \leqslant \langle \phi, A\rangle$$

για κάθε $A \in \mathrm{conv}(T)$. Ειδικότερα, για κάθε σημείο επαφής u των K και B_2^n έχουμε

$$(2.4.8)\qquad \langle \phi, I/n\rangle < r \leqslant \langle \phi, u \otimes u\rangle.$$

Οι πίνακες I/n και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί, οπότε παίρνοντας τον $\psi = (\phi + \phi^*)/2$ αντί του ϕ έχουμε ότι ο ψ είναι συμμετρικός και εξακολουθεί να ικανοποιεί την

$$(2.4.9)\qquad \langle \psi, I/n\rangle < r \leqslant \langle \psi, u \otimes u\rangle$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Έστω $\beta = \mathrm{tr}(\psi)/n$. Αφού $\mathrm{tr}(I/n) = 1$ και $\mathrm{tr}(u \otimes u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(2.4.10)\qquad \langle \psi - \beta I, I/n\rangle &= \langle \psi, I/n\rangle - \beta \\ &= 0 < r - \beta \\ &\leqslant \langle \psi - \beta I, u \otimes u\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Παίρνοντας $B = \psi - \beta I$ και $s = r - \beta$, έχουμε:

Λήμμα 2.4.3. *Αν $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$, τότε υπάρχουν $s > 0$ και B συμμετρικός με $\mathrm{tr}(B) = 0$ με την ιδιότητα*

$$\langle B, u \otimes u\rangle \geqslant s \tag{2.4.11}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. □

Για $\delta > 0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (I + \delta B)x, x\rangle \leqslant 1\}. \tag{2.4.12}$$

[Παρατηρήστε ότι αν $M = \max\{|\langle Bx, y\rangle| : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$ και $0 < \delta < 1/M$, τότε ο $I + \delta B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει συμμετρική θετική τετραγωνική ρίζα S_δ. Αφού $E_\delta = S_\delta^{-1}(B_2^n)$, το E_δ είναι ελλειψοειδές.]

Θα δείξουμε ότι $E_\delta \subseteq K$ αν το δ είναι μικρό, δείχνοντας ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leqslant \rho_K(v)$ για κάθε $v \in S^{n-1}$:

1η Περίπτωση: Έστω U το σύνολο των σημείων επαφής των K και B_2^n. Αν $u \in U$ και $v \in S^{n-1}$ με $\|u - v\|_2 < s/2M$, τότε από το Λήμμα 2.4.3,

$$\langle (I + \delta B)u, u\rangle \geqslant 1 + \delta s, \tag{2.4.13}$$

ενώ

$$\begin{aligned} |\langle v + \delta Bv, v\rangle - \langle u + \delta Bu, u\rangle| &= \delta|\langle Bv, v\rangle - \langle Bu, u\rangle| \\ &\leqslant \delta|\langle Bv, v - u\rangle| + \delta|\langle Bu, u - v\rangle| \\ &\leqslant 2M\delta\|u - v\|_2 < \delta s. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Άρα, αν η απόσταση του $v \in S^{n-1}$ από το U είναι μικρότερη από $s/2M$, τότε

$$\langle (I + \delta B)v, v\rangle > 1 + \delta s - \delta s = 1, \tag{2.4.15}$$

δηλαδή $v \notin E_\delta$. Όμως, $v \in B_2^n \subseteq K$ για κάθε $v \in S^{n-1}$. Άρα, σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\rho_{E_\delta}(v) < 1 \leqslant \rho_K(v). \tag{2.4.16}$$

2η Περίπτωση: Έστω V το σύνολο των $v \in S^{n-1}$ για τα οποία $d(v, U) \geqslant s/2M$. Τότε, το V είναι συμπαγές και $r = \max\{\|v\|_K : v \in V\} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \min\{\langle Bv, v\rangle : v \in V\}$. Αν $0 < \delta < (1 - r^2)/|\lambda|$, τότε

$$\langle (I + \delta B)(v/\|v\|_K), v/\|v\|_K\rangle = \frac{1 + \delta\langle Bv, v\rangle}{\|v\|_K^2} \geqslant \frac{1 + \delta\lambda}{r^2} > 1, \tag{2.4.17}$$

δηλαδή $v/\|v\|_K \notin E_\delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leqslant \frac{1}{\|v\|_K} = \rho_K(v)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

Λήμμα 2.4.4. *Υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $E_\delta \subseteq K$ για κάθε $0 < \delta < \delta_0$.* □

Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε άτοπο: Παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο $I + \delta B$ να είναι θετικά ορισμένος και το ελλειψοειδές E_δ να περιέχεται στο K. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, έχουμε $|E_\delta| \leqslant |B_2^n|$. Όμως,

$$|E_\delta| = |S_\delta^{-1}(B_2^n)| = |B_2^n|/\sqrt{\det(I + \delta B)}. \tag{2.4.18}$$

Άρα, $\det(I + \delta B) \geqslant 1$. Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μας δίνει

$$[\det(I + \delta B)]^{1/n} \leqslant \frac{\operatorname{tr}(I + \delta B)}{n} = 1 + \delta\frac{\operatorname{tr}(B)}{n} = 1, \tag{2.4.19}$$

αφού $\operatorname{tr}(B) = 0$. Για να ισχύουν τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τότε όμως, όλες οι ιδιοτιμές του $I + \delta B$ είναι ίσες, δηλαδή $I + \delta B = \mu I$. Έπεται ότι ο B είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, και αφού $\operatorname{tr}(B) = 0$ παίρνουμε $B = 0$.

Αυτό είναι άτοπο, γιατί από το Λήμμα 2.4.3 έχουμε $\langle Bu, u\rangle \geqslant s > 0$, $u \in U$. Συνεπώς, $I/n \in \operatorname{conv}(T)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη για το θεώρημα του John:

Πρόταση 2.4.5. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j \tag{2.4.20}$$

του Θεωρήματος 2.4.1. Αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j\rangle \leqslant \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, m. \tag{2.4.21}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j τα K και B_2^n έχουν το ίδιο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το u_j (για τη μπάλα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο σε κάθε σημείο $u \in S^{n-1}$ έχει κάθετο διάνυσμα το u). Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j\rangle \leqslant 1$, και λόγω συμμετρίας του K,

$$|\langle x, u_j\rangle| \leqslant 1 \quad \text{για κάθε } x \in K. \tag{2.4.22}$$

Δηλαδή,

$$\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_2 = 1 \tag{2.4.23}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Έστω τώρα $x \in K$. Από τις (2.4.3), (2.4.4) και (2.4.22) παίρνουμε

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^m \lambda_j = n. \tag{2.4.24}$$

Δηλαδή, $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}$. Άρα, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$. □

Παρατήρηση 2.4.6. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K°. Επίσης, η (2.4.23) δείχνει ότι κάθε σημείο επαφής των K και B_2^n είναι σημείο επαφής των K° και B_2^n. Άρα, αλλάζοντας τους ρόλους των K και K°, βλέπουμε ότι η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μέσω σημείων επαφής εξασφαλίζεται και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς ελάχιστου όγκου.

Στην συνέχεια, υποθέτοντας ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης του Θεωρήματος 2.4.1, θα δείξουμε ότι υπάρχουν πολλά σημεία επαφής ανάμεσα στο K και στην B_2^n.

Πρόταση 2.4.7. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει σημείο επαφής των K και B_2^n με την ιδιότητα:*

$$\langle u, Tu\rangle \geqslant \frac{\mathrm{tr}T}{n}. \tag{2.4.25}$$

Απόδειξη. Από την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης (2.4.1) έπεται ότι

$$\mathrm{tr}T = \langle T, I\rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle T, u_j \otimes u_j\rangle. \tag{2.4.26}$$

Παίρνοντας υπόψιν και την $\sum \lambda_j = n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $j \leqslant m$ με την ιδιότητα

$$\langle u_j, Tu_j\rangle = \langle T, u_j \otimes u_j\rangle \geqslant \frac{\mathrm{tr}T}{n}. \tag{2.4.27}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει αν πάρουμε $u = u_j$. □

Οι Dvoretzky και Rogers έδειξαν ακριβή αποτελέσματα γιά την κατανομή των σημείων επαφής του K με την B_2^n. Ολα τους εκφράζουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο την αρχή ότι υπάρχουν πολλές και «αρκετά ορθογώνιες» διευθύνσεις στις οποίες οι δύο νόρμες $\|\cdot\|_K$ και $\|\cdot\|_2$ συγκρίνονται καλά.

Πρόταση 2.4.8. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $y_1, \dots, y_n$ στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*

$$\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^{1/2} \leqslant \|y_i\|_K \leqslant \|y_i\|_2 = 1 \tag{2.4.28}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τα y_i επαγωγικά. Σαν y_1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο επαφής των K και B_2^n. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $y_1, \dots, y_{i-1}$. Θέτουμε $F_i = \mathrm{span}\{y_1, \dots, y_{i-1}\}$. Τότε, $\mathrm{tr}(P_{F_i^\perp}) = n - i + 1$, και από την Πρόταση 2.4.7 υπάρχει σημείο επαφής u_i ώστε

$$\|P_{F_i^\perp} u_i\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_i^\perp} u_i\rangle \geqslant \frac{n-i+1}{n}. \tag{2.4.29}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έπεται ότι

$$\|P_{F_i} u_i\|_K \leqslant \|P_{F_i} u_i\|_2 \leqslant \sqrt{(i-1)/n}. \tag{2.4.30}$$

Ορίζουμε $y_i = P_{F_i^\perp} u_i / \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2$. Τότε,

$$1 = \|y_i\|_2 \geqslant \|y_i\|_K \geqslant |\langle u_i, y_i\rangle| = \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2 \tag{2.4.31}$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την (2.4.29). □

Πόρισμα 2.4.9. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $y_1, \dots, y_k$ ώστε*

$$\frac{1}{2} \leqslant \|y_j\| \leqslant 1 \tag{2.4.32}$$

για κάθε $j = 1, \dots, k$. □

2.5 Ασκήσεις

1. Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_2 \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

2. (α) Δείξτε ότι: αν $y_1, \dots, y_m \in \ell_2^n$ τότε

$$\sum_{j=1}^m \|y_j\|_2^2 = \mathrm{Ave}_{\varepsilon=\pm 1} \left\| \sum_{j=1}^m \varepsilon_j y_j \right\|_2^2,$$

όπου με Ave συμβολίζουμε το μέσο όρο ως προς όλες τις δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$.
(β) Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$ και έστω $T : \ell_q^n \to \ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T : \ell_q^n \to \ell_2^n\| = 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2 \leqslant n^{2/q},$$

και συμπεράνατε ότι $\|Te_j\|_2 \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ για κάποιον $j \leqslant n$.

(γ) Δείξτε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_q^n\| \geqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

(δ) Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Δείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

3. Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d και την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι: αν $2 \leqslant p < q \leqslant +\infty$ τότε

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Έστω $1 \leqslant p < q \leqslant 2$. Χρησιμοποιώντας την $d(X^*, Y^*) = d(X, Y)$ δείξτε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

4. Οι πίνακες Walsh είναι ορθογώνιοι $2^k \times 2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά ως εξής: Θέτουμε $W_0 = [1]$, και

$$W_k = \begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \geqslant 1.$$

Δείξτε ότι ο $\frac{1}{2^{k/2}} W_k$ είναι ορθογώνιος πίνακας με την ιδιότητα: όλες του οι συντεταγμένες έχουν απόλυτη τιμή $\frac{1}{2^{k/2}}$.

5. Έστω $n = 2^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο τελεστής που αντιστοιχεί στον $\frac{1}{2^{k/2}} W_k$.

(α) Παρατηρήστε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1$$

και συμπεράνατε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_\infty^n \to \ell_1^n\| \leqslant n.$$

(β) Παρατηρήστε ότι $\|Te_j\|_\infty = 1/\sqrt{n}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και συμπεράνατε ότι

$$\|T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(γ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leqslant \sqrt{n}$.

6*. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \leqslant c\sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7. Έστω $T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n$ ισομορφισμός, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\frac{1}{d} B_\infty^n \subseteq T(B_1^n) \subseteq B_\infty^n,$$

όπου B_∞^n, B_1^n οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_∞^n, ℓ_1^n αντίστοιχα.

(α) Αν $x_j = T(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$|T(B_1^n)| = \frac{2^n}{n!}|\det X|,$$

όπου X ο πίνακας με στήλες τα $x_1, \ldots, x_n$. [*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $|B_1^n| = 2^n/n!$.]

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x_1, \ldots, x_n \in B_\infty^n$ και την ανισότητα του Hadamard, δείξτε ότι $|\det X| \leqslant n^{n/2}$.

(γ) Δείξτε ότι $d \geqslant c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από τον T και από το n.

(δ) Δείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \geqslant c_1\sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ η σταθερά στο (γ).

8*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

9. Δίνονται $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j \otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι $\sum_{j=1}^m \|x_j\|_2^2 = n$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_m$,

$$\left\|\sum_{j=1}^m a_j x_j\right\|_2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^m a_j^2\right)^{1/2}.$$

10*. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Δείξτε ότι υπάρχει παραλληλεπίπεδο P ώστε $K \subseteq P$ και

$$|P| \leqslant 2^n \frac{n^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα Dvoretzky-Rogers.

11. Έστω $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, v_j\rangle| \leqslant 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}$$

ικανοποιεί την $B_2^n \subseteq K \subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha > 1$. Δείξτε ότι $m \geqslant \exp(n/(2\alpha^2))$.

12. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $N \leqslant \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$ και $T : X \to \ell_\infty^n$ με την ιδιότητα

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leqslant \|T(x)\|_{\ell_\infty^n} \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

13. Έστω $g_1, \dots, g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω και έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
(α) Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$\|G\|_q := \left(\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\|^q d\omega\right)^{1/q} = c_{n,q}M_q(X)$$

όπου

$$M_q(X) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^q d\sigma(x)\right)^{1/q},$$

και υπολογίστε τις σταθερές $c_{n,1}$ και $c_{n,2}$.
(β) Δείξτε ότι, αν $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^k g_i(\omega)e_i\right\| d\omega \leqslant \int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\| d\omega.$$

(γ) Δείξτε ότι, αν Y είναι ένας k-διάστατος υπόχωρος του X, τότε

$$M_1(Y) \leqslant c\sqrt{n/k}M_1(X),$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

14. Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά 1 και έστω L ο μέσος Lévy της f.
(α) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\sigma)\{(x,y)\in S^{n-1}\times S^{n-1} : |f(x)-f(y)|\geqslant t\} &\leqslant 2\sigma(\{x\in S^{n-1} : |f(x)-L|\geqslant t/2\})\\ &\leqslant c_1\exp(-c_2t^2n).\end{aligned}$$

(β) Έστω $\mathbb{E}(f) = \int_{S^{n-1}} f(x)\,d\sigma(x)$. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{S^{n-1}} \exp(a^2|f(x)-\mathbb{E}(f)|^2)\,d\sigma(x) \leqslant \int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} \exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y).$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} \exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \leqslant ca^2\int_0^\infty te^{a^2t^2-ct^2n}dt,$$

και, επιλέγοντας $a \simeq \sqrt{n}$, δείξτε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} \exp(a^2(f(x)-f(y))^2)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \leqslant c_2,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

(δ) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\sigma(\{x : |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geqslant t\}) \leqslant c_3 \exp(-c_4 t^2 n),$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

15. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\max\left\{M_1, c_1\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant M_q \leqslant \max\left\{2M_1, c_2\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q \in [1, n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

(α) *Υπόδειξη για την δεξιά ανισότητα.* Η συνάρτηση $\|\cdot\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma\big(x \in S^{n-1} : \big|\, \|x\| - M_1 \,\big| > t\big) \leqslant 2\exp(-ct^2 n/b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$,

$$M_q - M_1 \leqslant \|\, \|x\| - M_1 \,\|_q.$$

(β) *Υπόδειξη για την αριστερή ανισότητα.* Υπάρχει $z \in S^{n-1}$ ώστε $B_X \subseteq \{y : |\langle y, z\rangle| \leqslant 1/b\}$. Συνεπώς,

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geqslant t\} \supseteq C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geqslant t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιήστε την

$$M_q = \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(\{x : \|x\| \geqslant t\})\,dt\right)^{1/q} \geqslant \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(C_t)\,dt\right)^{1/q}.$$

16. Έστω $x_1, \ldots, x_t \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S^{n-1}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^t |\langle y, x_i\rangle| \geqslant \sqrt{t}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε όλα τα διανύσματα της μορφής $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i x_i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, και επιλέξτε ένα με τη μεγαλύτερη δυνατή Ευκλείδεια νόρμα.

17. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Έστω $t(X)$ ο μικρότερος φυσικός t για τον οποίο υπάρχουν $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{2}M\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{t}\sum_{i=1}^t \|U_i(x)\| \leqslant 2M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$t(X) \geqslant \frac{1}{4}(b/M)^2,$$

όπου b η μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιους $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$. Θεωρήστε $x_0 \in S^{n-1}$ με $\|x_0\| = b$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 28 για τα $x_i = U_i^{-1}(x_0)$.

18. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Υποθέτουμε ότι $v(B_X) \leqslant n^\alpha$ και $v(B_{Y^*}) \leqslant n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta \geqslant 1$, όπου $v(P)$ είναι το πλήθος των κορυφών ενός πολυτόπου P. Δείξτε ότι

$$d(X, Y) \leqslant c\sqrt{\alpha + \beta}\sqrt{n \log n}.$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n \subseteq B_Y \subseteq \sqrt{n} B_2^n.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $U \in O(n)$, ισχύουν οι $\|U^{-1} : Y \to X\| \leqslant n$ και

$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x \in B_X} \|U(x)\|_Y = \max_{x \in \mathrm{ext}(B_X)} \max_{y^* \in \mathrm{ext}(B_{Y^*})} |\langle U(x), y^* \rangle|,$$

όπου $\mathrm{ext}(P)$ είναι το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου P. Για σταθερά x, y^* και $\varepsilon > 0$ εκτιμήστε το

$$\nu(\{U \in O(n) : |\langle U(x), y^* \rangle| \geqslant \varepsilon\}).$$

19. Έστω P ένα συμμετρικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_P)$. Γράφουμε $f(P)$ για το πλήθος των $(n-1)$-διάστατων εδρών του και $v(P)$ για το πλήθος των κορυφών του.

(α) Δείξτε ότι $k(X) \leqslant \log f(P)$ και $k(X^*) \leqslant \log v(P)$.

(β) Δείξτε ότι $\log f(P) \cdot \log v(P) \geqslant cn$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

20. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και ότι $(|K|/|B_2^n|)^{1/n} = A$.

(α) Δείξτε ότι

$$\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta) \nu(dU) = A^{2n}.$$

(β) Για κάθε $U \in O(n)$ και $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε $N_U(\theta) = \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{[N_U(\theta)]^{2n}} \sigma(d\theta) \leqslant A^{2n}$$

και συμπεράνατε ότι $N_U(\theta) \geqslant \frac{c}{A^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(γ) Αν ο U ικανοποιεί το (β), δείξτε ότι

$$B_2^n \subseteq K \cap U(K) \subseteq 8A^2 B_2^n.$$

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος των martingales

3.1 Ανισότητα του Azuma

Δίνουμε πρώτα τους βασικούς ορισμούς της δεσμευμένης μέσης τιμής και του martingale σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, και στην συνέχεια αποδεικνύουμε την ανισότητα του Azuma.

Ορισμός 3.1.1 (δεσμευμένη μέση τιμή)**.** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Αν $\mathcal{G}$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$ και αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\mu(A) = \int_A f dP, \quad A \in \mathcal{G} \tag{3.1.1}$$

ορίζει ένα μέτρο στην $\mathcal{G}$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $P|_{\mathcal{G}}$. Από το θεώρημα Radon–Nikodym, υπάρχει μοναδική $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ με την ιδιότητα

$$\int_A h dP = \int_A f dP \tag{3.1.2}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Η h ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς την $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

Βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι οι εξής:

Λήμμα 3.1.2. (α) *Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός, γραμμικός και έχει νόρμα 1 σε κάθε L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

(β) *Αν $\mathcal{G}_1$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{G}$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.*

(γ) *Αν $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ τότε $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.*

(δ) *Αν* $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ *είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα, τότε η* $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ *είναι σταθερή και ισούται με τη μέση τιμή της* f*:*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}f = \int f dP. \tag{3.1.3}$$

Απόδειξη. (α) Η γραμμικότητα έπεται άμεσα από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Δείχνουμε ότι ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός: Αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $f \geqslant 0$, τότε υπάρχει $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ώστε

$$\int_A h\, dP = \int_A f\, dP \geqslant 0 \tag{3.1.4}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Αν θεωρήσουμε το $E_n = \{\omega : h(\omega) \leqslant -\frac{1}{n}\}$ έχουμε ότι $E_n \in \mathcal{G}$ και

$$0 \leqslant \int_{E_n} f\, dP = \int_{E_n} h\, dP \leqslant -\frac{1}{n} P(E_n), \tag{3.1.5}$$

απ' όπου έπεται ότι $P(E_n) = 0$. Άρα,

$$P(\omega : h(\omega) < 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0. \tag{3.1.6}$$

Από το γεγονός ότι ο τελεστής $T(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός και γραμμικός έπεται ότι είναι μονότονος: αν $f, g \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ με $f \leqslant g$, τότε $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(g|\mathcal{G})$. Ειδικότερα, έπεται ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|f|\ |\mathcal{G}) \tag{3.1.7}$$

για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Τότε, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_1 \to L_1$ είναι φραγμένος τελεστής νόρμας 1. Πράγματι·

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_1 = \int |\mathbb{E}(F|\mathcal{G})|\, dP \leqslant \int \mathbb{E}(|f|\ |\mathcal{G})\, dP = \int |f|\, dP = \|f\|_1, \tag{3.1.8}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επίσης, είναι $\mathbb{E}(\mathbf{1}|\mathcal{G}) = \mathbf{1}$. Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι $L_p \subseteq L_1$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Επομένως, αν $f \in L_\infty$, τότε

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|f||\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(\|f\|_\infty|\mathcal{G}) = \|f\|_\infty. \tag{3.1.9}$$

Συνεπώς, για κάθε $f \in L_\infty$ έπεται ότι $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_\infty$ και μάλιστα $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Με άλλα λόγια, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_\infty \to L_\infty$ είναι καλά ορισμένος τελεστής νόρμας 1. Τέλος, αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι ο $T : L_p \to L_p$ είναι επίσης καλά ορισμένος. Αυτό έπεται από τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Έστω $f \in L_1$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή ώστε $\mathbb{E}|\varphi(f)| < \infty$. Τότε ισχύει

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}). \tag{3.1.10}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν ακολουθίες πραγματικών αριθμών (a_n), (b_n) ώστε $\varphi(x) = \sup_n(a_n x + b_n)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a_n f(x) + b_n \leqslant \varphi(f(x)) \tag{3.1.11}$$

σχεδόν παντού. Έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $E_n \in \mathcal{G}$ με $P(E_n) = 0$ και

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}) \tag{3.1.12}$$

για κάθε $x \in \Omega \setminus E_n$. Αν θέσουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $P(E) = 0$ και αν $x \in \Omega \setminus E$ είναι

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}) \tag{3.1.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, παίρνοντας supremum ως προς n έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}) \tag{3.1.14}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$. Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για την $\varphi(t) = |t|^p$ έχουμε ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|^p \leqslant \mathbb{E}(|f|^p|\mathcal{G}) \tag{3.1.15}$$

και ολοκληρώνοντας βλέπουμε ότι $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_p \leqslant \|f\|_p$ για κάθε $f \in L_p$.

(β) Έστω $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{G}$ ισχύει $\int_A f\,dP = \int_A g\,dP$. Αν $B \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$ τότε έχουμε $\int_B g\,dP = \int_B f\,dP$. Από τον ορισμό έπεται ότι $\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.

(γ) Αρκεί να το δείξουμε για χαρακτηριστικές συναρτήσεις που είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμες. Για $g = \chi_A$ και $A, B \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_B \mathbb{E}(fg|\mathcal{G})\,dP = \int_B fg\,dP = \int_{A\cap B} f\,dP = \int_{A\cap B} \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\,dP = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\,dP. \tag{3.1.16}$$

Έτσι, $\mathbb{E}(fg|\mathcal{G}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$, διότι $\chi_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

(δ) Άμεσο από τον ορισμό. □

Ορισμός 3.1.3 (martingale)**.** Έστω $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Μια ακολουθία $f_0, f_1, \ldots$ συναρτήσεων $f_i \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ λέγεται martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_i\}$ αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{F}_{i-1}) = f_{i-1}$ για κάθε $i \geqslant 1$.

Η ανισότητα του Azuma δίνει εκτίμηση της πιθανότητας απόκλισης μιας φραγμένης συνάρτησης από την μέση τιμή της.

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Θέτουμε $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2\exp\left(-t^2/4\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2\right). \tag{3.1.17}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)\}_{i=0}^n$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$. Πράγματι, έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) \tag{3.1.18}$$

και $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επιπλέον, έχουμε $\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big)\\ &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) = 0.\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Συγκρίνοντας τις δυναμοσειρές των e^x και $e^{x^2/2}$ βλέπουμε ότι $e^x \leqslant x + e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ είναι θετικός, συμπεραίνουμε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}). \tag{3.1.20}$$

Από την γραμμικότητα της $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k-1})$ έχουμε $\mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \lambda\mathbb{E}(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, άρα κάθε $d_k \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda^2\|d_k\|_\infty^2}|\mathcal{F}_{k-1}) = e^{\lambda^2\|d_k\|_\infty^2}. \tag{3.1.21}$$

Ισχυρισμός. Ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n \lambda d_i}\right) \leqslant e^{\lambda^2\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}. \tag{3.1.22}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{E}\left(e^{\lambda\sum_{j=1}^k d_j}\right) \leqslant e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2\|d_j\|^2}$ για κάθε $k \leqslant n$: Για $k = 1$ έχουμε $\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_1}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_1}|F_0\right)\right] \leqslant e^{\lambda^2\|d_1\|_\infty^2}$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda\sum_{j=1}^k d_j}\right) \leqslant e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2\|d_j\|^2} \tag{3.1.23}$$

για κάποιον $k < n$. Αφού $e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$, από το Λήμμα 3.1.2 (γ) παίρνουμε

$$\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k) = e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\mathbb{E}(e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k). \tag{3.1.24}$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(e^{\lambda\sum_{j=1}^{k+1} d_j}) &= \mathbb{E}\,\left[\mathbb{E}\,(e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}e^{\lambda d_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)\right] \\
&= \mathbb{E}\,\left[e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}\mathbb{E}\,(e^{\lambda d_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\,\left[e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}\right] \\
&= e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}\mathbb{E}\,(e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}) \\
&\leqslant e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{k}\|d_i\|_\infty^2} \\
&= e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{k+1}\|d_j\|_\infty^2}.
\end{aligned} \tag{3.1.25}
$$

Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(f-\mathbb{E}f \geqslant t) = P(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0) \geqslant t) = P\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \geqslant t\right) \\
\leqslant \mathbb{E}\;e^{\lambda\sum_{j=1}^{n} d_j - \lambda t} \leqslant e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2 - \lambda t}.
\end{aligned} \tag{3.1.26}
$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς λ βλέπουμε ότι

$$P(f-\mathbb{E}f \geqslant t) \leqslant \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2\right). \tag{3.1.27}$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για την $-f$, παίρνουμε

$$P(-f+\mathbb{E}f \geqslant t) \leqslant \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2\right). \tag{3.1.28}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$.

3.2 Συγκέντρωση του μέτρου στην S_n

Θεωρούμε την οικογένεια S_n των μεταθέσεων του συνόλου $[n] := \{1,2,\dots,n\}$ με μετρική την $d(\sigma,\tau) = \frac{1}{n}|\{i : \sigma(i) \neq \tau(i)\}|$ και με το ομοιόμορφο μέτρο P που δίνει μάζα $\frac{1}{n!}$ σε κάθε μετάθεση.

Θεώρημα 3.2.1 (Maurey). *Έστω $f : S_n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1. Τότε,*

$$P(|f-\mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2 n/16} \tag{3.2.1}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_j$ η άλγεβρα που παράγεται απο τα σύνολα

$$A_{i_1,\dots,i_j} = \{\sigma : \sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(j) = i_j\} \tag{3.2.2}$$

όπου $i_1, \dots, i_j$ διακεκριμένα στοιχεία του $\{1, \dots, n\}$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\{\emptyset, S_n\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n = 2^{S_n}. \tag{3.2.3}$$

Τότε, $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_{j+1}$ για κάθε $j = 0, 1, \dots, n-1$. Πράγματι, κάθε άτομο της $\mathcal{F}_j$ γράφεται στην μορφή

$$A_{i_1,i_2,\dots,i_j} = \bigcup_{k\in[n]\setminus\{i_1\dots,i_j\}} A_{i_1,i_2,\dots,i_j,k}, \tag{3.2.4}$$

δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{F}_{j+1}$.

Έστω $f : S_n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1 και έστω $(f_j)_{j=0}^n$ το martingale $f_j = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_j)$ που επάγεται απο την f.

Λήμμα 3.2.2. *Για κάθε άτομο $A = A_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ της $\mathcal{F}_j$ και κάθε ζευγάρι ατόμων $B = A_{i_1,i_2,\dots,i_j,r}$ και $C = A_{i_1,\dots,i_j,s}$ της $\mathcal{F}_{j+1}$ που περιέχονται στο A, μπορούμε να βρούμε μια $1-1$ και επί απεικόνιση $\phi : B \to C$ ώστε $d(b, \phi(b)) \leqslant \frac{2}{n}$ για κάθε $b \in B$.*

Απόδειξη. Έστω π η μετάθεση που αντιμεταθέτει τα r και s και αφήνει αμετάβλητα τα υπόλοιπα στοιχεία του $\{1, \dots, n\}$. Ορίζουμε $\phi : B \to C$ με $\phi(\sigma) = \pi \circ \sigma$.

Τότε, $\phi(\sigma)(i) = \sigma(i)$ για $i \neq j+1$ και $i \neq \sigma^{-1}(s)$. Αν $i = j+1$ τότε $\phi(\sigma)(j+1) = \pi \circ \sigma(j+1) = \pi(r) = s$ και αν $i = \sigma^{-1}(s)$ τότε $\phi(\sigma)(i) = \pi(s) = r$. Άρα,

$$d(\sigma, \phi(\sigma)) \leqslant \frac{2}{n}. \tag{3.2.5}$$

Η ϕ είναι εξ ορισμού 1-1 και αφού $|B| = |C|$ έπεται ότι η ϕ είναι επί. □

Σταθεροποιούμε A, B, C όπως στο Λήμμα 3.2.2. Αφού τα B, C είναι άτομα της $\mathcal{F}_{j+1}$, η f_{j+1} είναι σταθερή στα B, C. Έχουμε

$$\int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j+1})dP = \int_B f dP = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in B} f(\sigma). \tag{3.2.6}$$

Όμως η $f_{j+1} = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j+1})$ είναι σταθερή στο B, άρα

$$f_{j+1}|B \equiv \frac{1}{P(B)}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in B} f(\sigma) = \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} f(\sigma). \tag{3.2.7}$$

Όμοια δείχνουμε οτι $f_{j+1}|C = \frac{1}{|C|}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma)$. Γράφουμε

$$f_{j+1}|C = \frac{1}{|C|}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma) = \frac{1}{|\phi(B)|}\sum_{\sigma\in B} f(\phi(\sigma)) = \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} f(\phi(\sigma)), \tag{3.2.8}$$

όπου ϕ η συνάρτηση του Λήμματος 3.2.2. Αφού η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1,

$$\begin{aligned} |f_{j+1}|B - f_{j+1}|C| &\leqslant \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B}|f(\sigma) - f(\phi(\sigma))| \leqslant \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} d(\sigma,\phi(\sigma)) \\ &\leqslant \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B}\frac{2}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Έπεται ότι $|f_{j+1}|B - f_j|A| \leqslant \frac{2}{n}$. Πράγματι, έχουμε

$$|A| = \left|\bigcup_{s\notin\{i_1,\dots,i_j\}} A_{i_1,\dots,i_j,s}\right| = \sum_{s\notin\{i_1,\dots,i_j\}} |A_{i_1,i_2,\dots,i_j,s}| = (n-j)|C|. \tag{3.2.10}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} f_j|A &= \frac{1}{|A|}\sum_{\sigma\in A} f(\sigma) = \frac{1}{(n-j)|C|}\sum_{s\notin\{i_1,\dots,i_j\}}\ \sum_{\sigma\in A_{i_1,\dots,i_j,s}} f(\sigma) \\ &= \frac{1}{(n-j)|C|}\sum_{C\subseteq A}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma) = \frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|C. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f_{j+1}|B - f_j|A| &= \left|f_{j+1}|B - \frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|C\right| = \left|\sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}(f_{j+1}|B - f_{j+1}|C)\right| \\ &\leqslant \sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}|f_{j+1}|B - f_{j+1}|C| \leqslant \sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}\frac{2}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Έχουμε $\Omega = \bigcup B_i$ όπου $B_i \in \mathcal{F}_{j+1}$. Θα δείξουμε οτι $|d_{j+1}|B_i| \leqslant \frac{2}{n}$, όπου οι d_j ορίζονται όπως στην ανισότητα του Azuma. Πράγματι,

$$|d_{j+1}|B_i| = |f_{j+1}|B_i - f_j|B_i| = |f_{j+1}|B_i - f_j|A_i| \leqslant \frac{2}{n} \tag{3.2.13}$$

όπου A_i το άτομο της F_j που περιέχει το B_i. Άρα,

$$\|d_{j+1}\|_\infty \leqslant \frac{2}{n}. \tag{3.2.14}$$

Η f προφανώς ανήκει στον $L_\infty(S_n,\mathcal{F}_n,P)$, άρα η προηγούμενη ανισότητα και η ανισότητα του Azuma δίνουν

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2 n/16} \tag{3.2.15}$$

για κάθε $t > 0$. □

Από το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει ότι ο μετρικός χώρος πιθανότητας (S_n, d, P) έχει κανονική συνάρτηση συγκέντρωσης. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη γενική Πρόταση.

Πρόταση 3.2.3. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι για κάποια συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, για κάθε φραγμένη 1-Lipschitz συνάρτηση $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mu\left(\left\{f \geqslant \int f d\mu + t\right\}\right) \leqslant \alpha(t). \tag{3.2.16}$$

Τότε, για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq X$ με $\mu(A) > 0$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$1 - \mu(A_t) \leqslant \alpha(\mu(A)t). \tag{3.2.17}$$

Ειδικότερα,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant \alpha(t/2), \qquad t > 0. \tag{3.2.18}$$

Επιπλέον, αν η α είναι τέτοια ώστε $\lim_{r\to+\infty} \alpha(t) = 0$, τότε κάθε 1–Lipschitz συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μ και αν η α είναι συνεχής τότε η f ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(A) > 0$ και $t > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \min\{d(x, A), t\}$. Παρατηρήστε ότι $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$ και

$$\int f\, d\mu \leqslant (1 - \mu(A))t. \tag{3.2.19}$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} 1 - \mu(A_t) = \mu(\{f \geqslant t\}) &\leqslant \mu(\{f \geqslant \int f\, d\mu + \mu(A)t\}) \\ &\leqslant \alpha(\mu(A)t). \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Ειδικότερα, αν $\mu(A) \geqslant 1/2$ τότε από την (3.2.19) έχουμε $\int f\, d\mu \leqslant t/2$ και, επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 - \mu(A_t) = \mu(\{f \geqslant t\}) &\leqslant \mu\left(\left\{f \geqslant \int f\, d\mu + t/2\right\}\right) \\ &\leqslant \alpha(t/2), \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

απ' όπου έπεται ότι $\alpha_\mu(t) \leqslant \alpha(t/2)$.

Θεωρούμε τώρα μια 1–Lipschitz συνάρτηση F στον (X,d). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = \min(|F|, n)$. Κάθε F_n είναι 1–Lipschitz και φραγμένη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα $\mu(\{F \geqslant \int F\,d\mu + t\}) \leqslant \alpha(t)$ για την $-F_n$ έχουμε ότι

$$\mu\left(\left\{F_n \leqslant \int F_n\,d\mu - t\right\}\right) \leqslant \alpha(t), \quad t>0. \tag{3.2.22}$$

Επιλέγουμε m τέτοιο ώστε $\mu(\{|F| \leqslant m\}) \geqslant 1/2$ και $t_0 > 0$ ώστε $\alpha(t_0) < 1/2$ (υπάρχουν τέτοια αφού $\{|F| \leqslant m\} \uparrow X$ και $1 = \mu(X) = \mu(\cup_{m=1}^{\infty}\{|F| \leqslant m\}) = \lim_m \mu(\{|F| \leqslant m\})$ και $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t) = 0$.) Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\{F_n \leqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2}$ και $\mu\left(\{F_n \leqslant \int F_n\,d\mu - t_0\}\right) < \frac{1}{2}$, οπότε $\int F\,d\mu \leqslant m + t_0$, ανεξάρτητα του n, αφού

$$\{F_n \leqslant m\} \bigcap \left\{F_n \leqslant \int F_n\,d\mu - t_0\right\} = \emptyset.$$

Αφού $F_n \uparrow |F|$ κατά σημείο, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int |F|\,d\mu = \lim_n \int F_n\,d\mu \leqslant m + t_0,$$

άρα η F είναι ολοκληρώσιμη.

Έστω τώρα ότι η α είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι κάθε 1–Lipschitz συνάρτηση F ικανοποιεί τη σχέση

$$\mu\left(\left\{F \geqslant \int F\,d\mu + t\right\}\right) \leqslant \alpha(t), \quad t>0. \tag{3.2.23}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $F_n - \min(\max(F, -n), n)$. Τότε για την F_n έχουμε ότι $F_n \to F$ κατά σημείο, οι F_n είναι φραγμένες, 1–Lipschitz και $\int |F|\,d\mu < +\infty$.

Ισχυρισμός: $\int F_n\,d\mu \to \int F\,d\mu$, καθώς $n \to +\infty$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$F_n(x) = \begin{cases} F(x) & , \ \text{αν } |F(x)| \leqslant n \\ -n & , \ \text{αν } F(x) \leqslant -n \\ n & , \ \text{αν } F(x) \geqslant n \end{cases} \tag{3.2.24}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

- Αν $|F(x)| \leqslant n$, $F_n(x) = F(x)$
- Αν $F(x) \geqslant n$,

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F(x) & , \ \text{αν } n < F(x) \leqslant n+1 \\ n+1 & , \ \text{αν } F(x) > n+1 \end{cases}$$

  οπότε σε κάθε περίπτωση $F_{n+1}(x) \geqslant F_n(x)$.

- Αν $F(x) \leqslant -n$, τότε

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} F(x) & , \text{ αν } n < F(x) \leqslant n+1 \\ n+1 & , \text{ αν } F(x) > n+1 \end{cases}$$

  οπότε σε κάθε περίπτωση $F_{n+1}(x) \leqslant F_n(x)$

Άρα, αν θέσουμε $A = \{F \geqslant 0\}$, $B = \{F \leqslant 0\}$, τότε η $(F_n \chi_A)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και η $(F_n \chi_B)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα. Εφόσον $F_n \chi_A \to F \chi_A$, $F_n \chi_B \to F \chi_B$ και $\int F_1 \chi_B \, d\mu < +\infty$ από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\int F_n \, d\mu = \int_A F \, d\mu + \int_B F \, d\mu \to \int_A F \, d\mu + \int_B F \, d\mu = \int F \, d\mu. \tag{3.2.25}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\mu\left(\left\{F_n \geqslant \int F_n \, d\mu + t\right\}\right) \leqslant \alpha(t). \tag{3.2.26}$$

Έστω $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι

$$\mu\left(\left\{F \geqslant \int F \, d\mu + t_0\right\}\right) < \alpha(t_0) + \varepsilon. \tag{3.2.27}$$

Από τη συνέχεια της α στο t_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ τότε $|\alpha(t) - \alpha(t_0)| < \varepsilon$, δηλαδή $\alpha\left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) < \alpha(t_0) + \varepsilon$. Έχουμε ότι $F_n(x) \to F(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lim F_n \, d\mu \to \int F \, d\mu$. Θεωρούμε τυχόν $x \in \left\{F \geqslant \int F \, d\mu + t_0\right\}$, οπότε $F(x) \geqslant \int F \, d\mu + t_0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύουν οι $F_n(x) > F(x) - \frac{\delta}{4}$ και $\int F \, d\mu \geqslant \int F_n \, d\mu - \frac{\delta}{4}$. Τότε,

$$\begin{aligned} F_n(x) &> F(x) - \frac{\delta}{4} \geqslant \int F \, d\mu + t_0 - \frac{\delta}{4} > \int F_n \, d\mu - \frac{\delta}{4} + t_0 - \frac{\delta}{4} \\ &= \int F_n \, d\mu + t_0 - \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Άρα,

$$\left\{F \geqslant \int F \, d\mu + t_0\right\} \subset \liminf \left\{F_n \geqslant \int F_n \, d\mu + t_0 \frac{\delta}{2}\right\}, \tag{3.2.29}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{F \geqslant \int F \, d\mu\right\}\right) &\leqslant \mu\left(\liminf \left\{F_n \geqslant \int F_n \, d\mu + t_0 - \frac{\delta}{2}\right\}\right) \\ &\leqslant \liminf \mu\left(\left\{F_n \geqslant \int F_n \, d\mu + t_0 - \frac{\delta}{2}\right\}\right) \\ &\leqslant \alpha(t_0 - \frac{\delta}{2}) \\ &< \alpha(t_0) + \varepsilon \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Αυτό δείχνει ότι $\mu\left(\{F \geqslant \int F\, d\mu + t\}\right) \leqslant \alpha(t)$ για κάθε $t > 0$. □

Θεώρημα 3.2.4 (Maurey). *Η συνάρτηση συγκέντρωσης του (S_n, d, P) ικανοποιεί την*

$$\alpha_P(t) \leqslant 2e^{-t^2 n/64} \tag{3.2.31}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.1 βλέπουμε ότι για κάθε φραγμένη 1-Lipschitz συνάρτηση $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$P\left(\left\{f \geqslant \int f d\mu + t\right\}\right) \leqslant P\left(\left\{|f - \int f d\mu| \geqslant t\right\}\right) \leqslant e^{-t^2 n/16}. \tag{3.2.32}$$

Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 3.2.3. □

3.3 Άλλες εφαρμογές της μεθόδου

Η τεχνική της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2.1 μεταφέρεται χωρίς δυσκολία στο πλαίσιο του διακριτού κύβου.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1. Τότε,*

$$\mu_n(|f - \mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2 n/4} \tag{3.3.1}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_j$ η άλγεβρα που παράγεται απο τα σύνολα

$$A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j} = \{\zeta : \zeta_1 = \varepsilon_1, \dots, \zeta_j = \varepsilon_j\} \tag{3.3.2}$$

όπου $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j \in \{-1, 1\}$. Παρατηρήστε ότι το πλήθος ων ατόμων της $\mathcal{F}_j$ ισούται με 2^j. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\{\emptyset, E_2^n\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n = 2^{E_2^n}. \tag{3.3.3}$$

Τότε, $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_{j+1}$ για κάθε $j = 0, 1, \dots, n-1$. Πράγματι, κάθε άτομο της $\mathcal{F}_j$ γράφεται στην μορφή

$$A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j} = A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j,1} \cup A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j,-1}, \tag{3.3.4}$$

δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{F}_{j+1}$.

Έστω $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1 και έστω $(f_j)_{j=0}^n$ το martingale $f_j = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_j)$ που επάγεται απο την f. Το ανάλογο του Λήμματος 3.2.2 είναι εδώ το εξής: Για κάθε άτομο $A = A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j}$ της $\mathcal{F}_j$, υπάρχει προφανής απεικόνιση $\phi : B \to C$

ώστε $d(\zeta, \phi(\zeta)) \leqslant \frac{2}{n}$ για κάθε $\zeta \in B$, όπου $B = A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,1}$ και $C = A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,-1}$ (θέτουμε $\phi(\zeta) = \zeta'$, αλλάζοντας την $(j+1)$-στή συντεταγμένη του ζ από 1 σε -1).

Η συνέχεια της απόδειξης είναι όμοια με αυτήν του Θεωρήματος 3.2.1 (είναι μάλιστα πολύ απλούστερη). Αν $A = A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}$, $B = A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,1}$ και $C = A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,-1}$, ελέγχουμε ότι

$$|f_{j+1}|_B - f_{j+1}|_C| \leqslant \frac{2}{n} \tag{3.3.5}$$

και

$$f_j|_A = \frac{1}{2}f_{j+1}|_B + \frac{1}{2}f_{j+1}|_C, \tag{3.3.6}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$|f_j|_A - f_{j+1}|_B| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad |f_j|_A - f_{j+1}|_C| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{3.3.7}$$

Αν λοιπόν $d_j = f_j - f_{j-1}$, έχουμε $\|d_j\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Από την ανισότητα του Azuma συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_n(|f - \mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2 n/4} \tag{3.3.8}$$

για κάθε $t > 0$. □

Δίνουμε ακόμα μία εφαρμογή της μεθόδου στο εξής πλαίσιο. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ο $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ είναι χώρος πιθανότητας και θέτουμε $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Στον X θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$: τα μετρήσιμα υποσύνολα του X είναι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της μορφής $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, όπου $A_i \in \mathcal{A}_i$, και $\mu(A) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$.

Στον X θεωρούμε την εξής μετρική: αν $x = (x_1, \ldots, x_n$ και $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$, ορίζουμε

$$d(x, y) = |\{i \leqslant n : x_i \neq y_i\}|. \tag{3.3.9}$$

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $a_i > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant a_i$ αν τα x και y διαφέρουν μόνο στην i-στή συντεταγμένη. Τότε,*

$$\mu(|f - \mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2/4A} \tag{3.3.10}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $A = a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Απόδειξη. Για κάθε $j = 0, 1, \ldots, n$ θεωρούμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_j$ που αποτελείται από όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της μορφής $A_1 \times \cdots \times A_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$, όπου $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, j$. Θέτουμε $f_j = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_j)$. Παρατηρήστε ότι $f_0 = \mathbb{E}f$, $f_n = f$ και, για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = \int_{X_{j+1} \times \cdots \times X_n} f(x_1, \ldots, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)\, d\mu_{j+1}(y_{j+1}) \cdots d\mu_n(y_n). \tag{3.3.11}$$

Από την υπόθεση για την f ελέγχουμε εύκολα ότι αν $d_j = f_j - f_{j-1}$ τότε $\|d_j\|_\infty \leqslant a_j$. Πράγματι, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
(3.3.12)\quad & |f_j(x) - f_{j-1}(x)| \\
= \ & \left| \int_X f(x_1, \ldots, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) d\mu(y) - \int_X f(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, \ldots, y_n) d\mu(y) \right| \\
\leqslant \ & \int_X |f(x_1, \ldots, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, \ldots, y_n)| d\mu(y) \\
\leqslant \ & \int_X a_j d\mu(y) = a_j.
\end{aligned}
$$

Το συμπέρασμα έπεται άμεσα από την ανισότητα του Azuma. □

3.4 Ασκήσεις

1. Έστω $Y_1, \ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, P)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχουν $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ώστε $a_i \leqslant Y_i \leqslant b_i$. Αν $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, δείξτε ότι

$$P(\{S_n \geqslant \mathbb{E}(S_n) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$.

2. Έστω $Y_1, \ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, P)$ με τιμές σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχει $M_i \in \mathbb{R}$ ώστε $\|Y_i\| \leqslant M_i$. Αν $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, δείξτε ότι

$$P(\{\|S_n\| \geqslant \mathbb{E}(\|S_n\|) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n M_i^2$.

3. Έστω (X_i, μ_i) χώροι πιθανότητας $(i = 1, \ldots, n)$ και έστω $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ το μέτρο γινόμενο στον $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Έστω $c_1, \ldots, c_n > 0$ και $F : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι

$$\mu(\{F \geqslant \mathbb{E}_\mu(F) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$.

4. Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) έχει μήκος ℓ αν ο ℓ είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός με την εξής ιδιότητα: μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία $\{X\} = X^0, X^1, \ldots, X^n = \{\{x\} : x \in X\}$ διαμερίσεων του X (αύξουσα σημαίνει ότι η X^i είναι εκλέπτυνση της X^{i-1}) και θετικούς πραγματικούς αριθμούς $a_1,\dots,a_n$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2=\ell^2$ ώστε, αν $X^i=\{A_j^i\}_{1\leqslant j\leqslant m_i}$, τότε για κάθε $i=1,\dots,n$, και για κάθε $p=1,\dots,m_{i-1}$ και j,k με $A_j^i,A_k^i\subset A_p^{i-1}$, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\phi:A_j^i\to A_k^i$ ώστε $d(x,\phi(x))\leqslant a_i$ για κάθε $x\in A_j^i$.

(α) Δείξτε ότι το μήκος ℓ του (X,d) είναι μικρότερο ή ίσο της διαμέτρου $\mathrm{diam}(X)$ του X.

(β) Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας με μήκος ℓ. Δείξτε ότι για κάθε 1-Lipschitz συνεχή συνάρτηση $F:X\to\mathbb{R}$ και για κάθε $t>0$ ισχύει

$$\mu(\{F\geqslant\mathbb{E}_\mu(f)+t\})\leqslant e^{-t^2/2\ell^2}.$$

Ειδικότερα, για κάθε $t>0$,

$$\alpha_\mu(t)\leqslant e^{-t^2/8\ell^2}.$$

Κεφάλαιο 4

Συναρτησοειδές Laplace και ελαχιστική συνέλιξη

4.1 Συναρτησοειδές Laplace

Το συναρτησοειδές Laplace ενός μέτρου πιθανότητας μ στον μετρικό χώρο (X,d) μας δίνει μία ακόμα μέθοδο για να αποδείξουμε φράγματα για την συνάρτηση συγκέντρωσης α_μ μέσω εκθετικών ανισοτήτων απόκλισης των συναρτήσεων Lipschitz $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ από την μέση τιμή τους.

Ορισμός 4.1.1 (συναρτησοειδές Laplace)**.** Έστω (X,d,μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Για κάθε $\lambda\geqslant 0$ ορίζουμε

(4.1.1)
$$E_\mu(\lambda)=\sup\left\{\int e^{\lambda F}d\mu \mid F:(X,d)\to\mathbb{R},\ 1-\text{Lipschitz συνάρτηση με }\int F d\mu=0\right\}.$$

Η συνάρτηση $\lambda\mapsto E_\mu(\lambda)$ ονομάζεται **συναρτησοειδές Laplace** του μ.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει την σχέση του συναρτησοειδούς Laplace με την συνάρτηση συγκέντρωσης.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω (X,d,μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$\alpha_\mu(t)\leqslant\inf_{\lambda\geqslant 0}\left\{e^{-\lambda t/2}E_\mu(\lambda)\right\}. \tag{4.1.2}$$

Απόδειξη. Έστω $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση. Θεωρούμε την $F:=f-\int f\,d\mu$. Τότε, η F είναι 1-Lipschitz και $\int F\,d\mu=0$. Από τον ορισμό του συναρτησοειδούς

Laplace και από την ανισότητα του Markov, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$e^{\lambda t}\mu(\{F \geqslant t\}) \leqslant \int e^{\lambda F} d\mu \leqslant E_\mu(\lambda), \tag{4.1.3}$$

δηλαδή

$$\mu\left(\left\{f - \int f d\mu \geqslant t\right\}\right) \leqslant \alpha(t) := \inf_{\lambda \geqslant 0} \left\{e^{-\lambda t} E_\mu(\lambda)\right\}. \tag{4.1.4}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.2.3 έχουμε το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 4.1.3. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε*

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{\lambda^2/2c} \tag{4.1.5}$$

για κάθε $\lambda \geqslant 0$. Τότε, το μ έχει κανονική συνάρτηση συγκέντρωσης: για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\alpha_\mu(t) \leqslant e^{-ct^2/8}. \tag{4.1.6}$$

Απόδειξη. Έστω $t > 0$. Ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση

$$g(\lambda) = -\lambda t + \frac{\lambda^2}{2c}$$

ως προς $\lambda \geqslant 0$ και το συμπέρασμα έπεται από την (4.1.2). □

Πόρισμα 4.1.4. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 > 0$ ώστε*

$$E_\mu(\lambda_0) < +\infty. \tag{4.1.7}$$

Τότε, το μ έχει εκθετική συγκέντρωση: για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\alpha_\mu(t) \leqslant E_\mu(\lambda_0) e^{-\lambda_0 t/2}. \tag{4.1.8}$$

Απόδειξη. Από την (4.1.4), για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mu\left(\left\{f - \int f d\mu \geqslant t\right\}\right) \leqslant \alpha_1(t) := E_\mu(\lambda_0) e^{-\lambda_0 t}. \tag{4.1.9}$$

Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 3.2.3. □

Οι επόμενες δύο Προτάσεις περιγράφουν δύο πολύ χρήσιμες ιδιότητες του συναρτησοειδούς Laplace: συμπεριφέρεται καλά ως πρός Lipschitz συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων και ως προς γινόμενα μετρικών χώρων πιθανότητας αν αυτά εφοδιαστούν με την ℓ_1-μετρική.

Πρόταση 4.1.5. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω $\varphi : (X,d) \to (Y,\sigma)$ μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$. Θεωρούμε το μέτρο εικόνα $\nu = \varphi(\mu)$ το οποίο ορίζεται μέσω της*

$$\nu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{B}(Y). \tag{4.1.10}$$

Ισοδύναμα, για κάθε συνεχή συνάρτηση $F : (Y,\sigma) \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_X (F\circ\varphi)(x)\,d\mu(x) = \int_Y F(y)\,d\nu(y). \tag{4.1.11}$$

Τότε,

$$E_\nu(\lambda) \leqslant E_\mu(\lambda) \tag{4.1.12}$$

για κάθε $\lambda \geqslant 0$. Συνεπώς,

$$\alpha_\nu(t) \leqslant \alpha_\mu(t) \tag{4.1.13}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Έστω $F : (Y,\sigma) \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\int F\,d\nu = 0$. Παρατηρήστε ότι η $F\circ\varphi : (X,d) \to \mathbb{R}$ είναι 1-Lipschitz και, από την (4.1.11),

$$\int_X (F\circ\varphi)(x)\,d\mu(x) = \int_Y F(y)\,d\nu(y) = 0. \tag{4.1.14}$$

Συνεπώς,

$$\int_X e^{\lambda(F\circ\varphi)(x)}\,d\mu(x) = \int_Y e^{\lambda F(y)}\,d\nu(y) \leqslant E_\nu(\lambda). \tag{4.1.15}$$

Παίρνοντας supremum ως προς F καταλήγουμε στην (4.1.12). □

Πρόταση 4.1.6. *Έστω (X,d,μ) και (Y,σ,ν) δύο μετρικοί χώροι πιθανότητας. Θεωρούμε τον $X\times Y$ με μετρική την*

$$\tau((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + \sigma(y_1,y_2)$$

και το μέτρο γινόμενο $\mu\otimes\nu$. Τότε, για κάθε $\lambda \geqslant 0$,

$$E_{\mu\otimes\nu}(\lambda) \leqslant E_\mu(\lambda)E_\nu(\lambda). \tag{4.1.16}$$

Απόδειξη. Έστω $F : (X\times Y,\tau) \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\int F\,d(\mu\otimes\nu) = 0$. Για κάθε $y \in Y$ θεωρούμε την συνάρτηση $F^y : (X,d) \to \mathbb{R}$ με

$$F^y(x) = F(x,y). \tag{4.1.17}$$

Επίσης, ορίζουμε $G : (Y, \sigma) \to \mathbb{R}$ με

$$G(y) = \int_X F^y(x)\, d\mu(x). \tag{4.1.18}$$

Παρατηρήστε ότι η G και κάθε F^y είναι 1-Lipschitz συναρτήσεις και ότι

$$\int_Y G(y)\, d\nu(y) = \int_{X\times Y} F\, d(\mu\otimes\nu) = 0. \tag{4.1.19}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\int_X e^{\lambda(F^y(x) - \int F^y d\mu)} d\mu(x) \leqslant E_\mu(\lambda), \tag{4.1.20}$$

γράφουμε

$$\begin{aligned} \int e^{\lambda F} d(\mu\otimes\nu) &= \int_Y e^{\lambda G(y)} \left(\int_X e^{\lambda(F^y(x) - \int F^y d\mu)} d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &\leqslant \int_Y e^{\lambda G(y)} E_\mu(\lambda) d\nu(y) \\ &\leqslant E_\mu(\lambda) \int_Y e^{\lambda G(y)} d\nu(y) \\ &\leqslant E_\mu(\lambda) E_\nu(\lambda). \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Παίρνοντας supremum ως προς F συμπεραίνουμε ότι $E_{\mu\otimes\nu}(\lambda) \leqslant E_\mu(\lambda)E_\nu(\lambda)$ για κάθε $\lambda \geqslant 0$. □

Μια περίπτωση στην οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.1.3 είναι όταν ο μετρικός χώρος (X, d) έχει πεπερασμένη, και κυρίως όταν έχει «σχετικά μικρή», διάμετρο.

Θεώρημα 4.1.7. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος με $\mathrm{diam}(X, d) = D < +\infty$. Τότε, για κάθε μέτρο πιθανότητας μ στην $\mathcal{B}(X)$ και για κάθε $\lambda \geqslant 0$ ισχύει*

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{D^2\lambda^2/2}. \tag{4.1.22}$$

Απόδειξη. Έστω $F : (X, d) \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\int F\, d\mu = 0$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα και την ανισότητα Jensen, για κάθε $\lambda \geqslant 0$

γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int e^{\lambda F} d\mu &= \int e^{\lambda F(x)} \cdot e^{-\lambda \int F(y) d\mu(y)} d\mu(x) \\
&= \int e^{\lambda (F(x) - \int F(y) d\mu(y))} d\mu(x) \\
&\leqslant \iint e^{\lambda (F(x) - F(y))} d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \iint (F(x) - F(y))^k d\mu(x) d\mu(y)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \iint (F(x) - F(y))^{2k} d\mu(x) d\mu(y)}{(2k)!} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D\lambda)^{2k}}{(2k)!} \\
&\leqslant e^{D^2 \lambda^2 / 2},
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

όπου, στα τελευταία βήματα, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\iint (F(x) - F(y))^k d\mu(x) d\mu(y) = 0$$

αν ο k είναι περιττός, το γεγονός ότι $|F(x) - F(y)| \leqslant d(x, y) \leqslant D$ για κάθε $x, y \in X$ (διότι η F είναι 1-Lipschitz) και το γεγονός ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!} \leqslant e^{u^2/2}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$. $\square$

Πόρισμα 4.1.8. *Έστω (X_i, d_i, μ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, μετρικοί χώροι πιθανότητας με $D_i = \mathrm{diam}(X_i) < \infty$. Θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ στον $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με την ℓ_1-μετρική $d = d_1 + \cdots + d_n$. Τότε,*

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{D^2 \lambda^2 / 2} \tag{4.1.24}$$

για κάθε $\lambda \geqslant 0$, όπου $D^2 = D_1^2 + \cdots + D_n^2$. Έπεται ότι, για κάθε 1-Lipschitz συνεχή συνάρτηση $F : (X, d) \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$,

$$\mu(\{F \geqslant \int F \, d\mu + t\}) \leqslant e^{-t^2 / 2D^2} \tag{4.1.25}$$

Συνεπώς,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant 2e^{-t^2 / 8D^2}. \tag{4.1.26}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.1.6 (με επαγωγή) παίρνουμε

$$E_\mu(\lambda) \leqslant \prod_{i=1}^n E_{\mu_i}(\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{D_i^2\lambda^2/2} \tag{4.1.27}$$

για κάθε $\lambda \geqslant 0$, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Θεωρήματος 4.1.7. Δηλαδή,

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{\lambda^2\sum_{i=1}^n D_i^2/2} = e^{\lambda^2 D^2/2}, \tag{4.1.28}$$

από τον ορισμό του D. Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί έπονται από τον ορισμό του συναρτησοειδούς Laplace και το Πόρισμα 4.1.3. □

Άμεση εφαρμογή είναι μια δεύτερη απόδειξη της εκτίμησης για την συνάρτηση συγκέντρωσης του διακριτού κύβου (Θεώρημα 1.4.9).

Θεώρημα 4.1.9. *Θεωρούμε τον διακριτό κύβο (E_2^n, d, μ), όπου $\mu(A) = |A|/2^n$ και $d(x,y) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\alpha_\mu(t) \leqslant 2\exp(-t^2 n/8). \tag{4.1.29}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 4.1.8 με $X_i = \{-1,1\}$ και $d_i(x,y) = \frac{1}{2n}|x-y|$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Παρατηρήστε ότι $D_i = 1/n$ για κάθε $i \leqslant n$, άρα

$$D^2 = \sum_{i=1}^n D_i^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Έτσι, έχουμε

$$\alpha_\mu(t) \leqslant 2e^{-t^2 n/8} \tag{4.1.30}$$

από την (4.1.26). □

4.2 Ελαχιστική συνέλιξη

Ορισμός 4.2.1 (ελαχιστική συνέλιξη)**.** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $\phi : X \times X \to \mathbb{R}^+$. Ονομάζουμε την ϕ **συνάρτηση κόστους** και συνήθως απαιτούμε να ικανοποιεί την $\phi(x,x) = 0$ για κάθε $x \in X$. Τυπικό παράδειγμα είναι η $\phi(x,y) = c\|x-y\|_2^2$ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, η **ελαχιστική συνέλιξη** της f με την συνάρτηση κόστους ϕ είναι η συνάρτηση

$$Q_\phi f(x) = \inf_{y\in X}\{f(y) + \phi(x,y)\}, \qquad x \in X. \tag{4.2.1}$$

Παρατηρήστε ότι, αν ικανοποιείται η $\phi(x,x)=0$, τότε

$$Q_\phi f(x) \leqslant f(x), \qquad x \in X. \tag{4.2.2}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int e^f d\mu \cdot \int e^{-f} d\mu \geqslant 1 \tag{4.2.3}$$

από την ανισότητα Hölder.

Λέμε ότι το μέτρο πιθανότητας μ **ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την συνάρτηση κόστους** ϕ αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int e^{Q_\phi f} d\mu \cdot \int e^{-f} d\mu \leqslant 1. \tag{4.2.4}$$

Η επόμενη Πρόταση δείχνει την σχέση της ελαχιστικής συνέλιξης με το πρόβλημα της εκτίμησης της συνάρτησης συγκέντρωσης.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης ως προς κάποια συνάρτηση κόστους ϕ. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq X$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$1 - \mu\left(\{\inf_{y\in A} \phi(x,y) < t\}\right) \leqslant \frac{1}{\mu(A)} e^{-t}. \tag{4.2.5}$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \geqslant t$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$f_{A,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in A \\ n & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Παρατηρήστε ότι: $Q_\phi f_{A,n}(x) \geqslant t$ αν και μόνο αν $\inf_{y\in A} \phi(x,y) \geqslant t$. Πράγματι, για κάθε $y \in A$ έχουμε

$$\phi(x,y) = f_{A,n}(y) + \phi(x,y) \geqslant Q_\phi f_{A,n}(x), \tag{4.2.7}$$

άρα

$$\inf_{y\in A} \phi(x,y) \geqslant Q_\phi f_{A,n}(x). \tag{4.2.8}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $y \notin A$ τότε

$$f_{A,n}(y) + \phi(x,y) \geqslant f_{A,n}(x,y) = n \geqslant t. \tag{4.2.9}$$

Έπεται ότι

$$\{Q_\phi f_{A,n} \geqslant t\} = \{\inf_{y\in A} \phi(x,y) \geqslant t\}. \tag{4.2.10}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov και την ιδιότητα ελαχιστικής συνέλιξης για το ζεύγος (μ, ϕ) γράφουμε

$$\begin{aligned} 1 - \mu\left(\{\inf_{y\in A} \phi(x,y) < t\}\right) &= \mu\left(\{Q_\phi f_{A,n} \geqslant t\}\right) \\ &\leqslant e^{-t} \int e^{Q_\phi f_{A,n}} d\mu \\ &\leqslant \left(\int e^{-f_{A,n}} d\mu\right)^{-1} e^{-t}. \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\int e^{-f_{A,n}} d\mu = \mu(A) + e^{-n}(1-\mu(A)) \to \mu(A) \tag{4.2.12}$$

καθώς το $n \to \infty$. Από την (4.2.11) έχουμε το συμπέρασμα. □

Μια τυπική εφαρμογή αυτού του αποτελέσματος στο πλαίσιο των μετρικών χώρων πιθανότητας είναι η εξής.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Θεωρούμε την συνάρτηση κόστους $\phi(x,y) = \frac{c}{2}d(x,y)^2$ για κάποια σταθερά $c > 0$. Αν το μ ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης ως προς ϕ τότε*

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2c}} \tag{4.2.13}$$

και

$$\alpha_\mu(t) \leqslant e^{-ct^2/8} \tag{4.2.14}$$

Απόδειξη. Έστω $F : (X,d) \to \mathbb{R}$ μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} Q_\phi F(x) &= F(x) + \inf_{y\in X}\left\{F(y) - F(x) + \frac{c}{2}d(x,y)^2\right\} \\ &\geqslant F(x) + \inf_{y\in X}\left\{-\|F\|_{\mathrm{Lip}} d(x,y) + \frac{c}{2}d(x,y)^2\right\} \\ &\geqslant F(x) - \frac{1}{2c}\|F\|_{\mathrm{Lip}}^2. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Από την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης και από την ανισότητα του Jensen, για κάθε $\lambda \geqslant 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\lambda^2}{2c}\|F\|_{\mathrm{Lip}}^2} \int e^{\lambda F} d\mu \leqslant \int e^{Q_\phi(\lambda F)} d\mu \leqslant \left(\int e^{-\lambda F} d\mu \right)^{-1} \\ \leqslant \exp\left(\int \lambda F \, d\mu \right). \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Δηλαδή,

$$\int e^{\lambda F} d\mu \leqslant e^{\int \lambda F \, d\mu + \frac{\lambda^2}{2c}\|F\|_{\mathrm{Lip}}^2}. \tag{4.2.17}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\int F \, d\mu = 0$ και $\|F\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$, παίρνουμε

$$\int e^{\lambda F} d\mu \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2c}}. \tag{4.2.18}$$

Έπεται ότι

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2c}}, \tag{4.2.19}$$

και από το Πόρισμα 4.1.3 προκύπτει το άνω φράγμα της (4.2.14) για την συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. □

4.3 Η ιδιότητα (τ)

Ορισμός 4.3.1 (ιδιότητα (τ))**.** Έστω f και w μετρήσιμες συναρτήσεις ορισμένες στον $\mathbb{R}^n$. Με $f \square w$ συμβολίζουμε την *ελαχιστική συνέλιξη* των f και w,

$$(f \square w)(x) = \inf\left\{ f(y) + w(x-y) : \ y \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{4.3.1}$$

Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και w μία θετική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το ζευγάρι (μ, w) ικανοποιεί την ιδιότητα (τ) αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\left(\int e^{f \square w} d\mu \right) \left(\int e^{-f} d\mu \right) \leqslant 1. \tag{4.3.2}$$

Παρατηρήστε ότι το «(μ, w) ικανοποιεί την ιδιότητα (τ)» αν και μόνο αν «το μ ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την συνάρτηση κόστους $\phi(x,y) = w(x-y)$».

Τα επόμενα λήμματα περιγράφουν βασικές και χρήσιμες ιδιότητες της ιδιότητας (τ).

Λήμμα 4.3.2. *Αν το (μ_i, w_i) ικανοποιεί την (τ) στον $\mathbb{R}^{n_i}$ για $i = 1, 2$, τότε το $(\mu_1 \otimes \mu_2, w)$ ικανοποιεί την (τ) στον $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, όπου $w(x_1, x_2) = w_1(x_1) + w_2(x_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Γράφουμε

$$
\begin{aligned}
(f\square w)(x,y) &= \inf_{(u,v)} \{f(x-u,y-v)+w(u,v)\} \\
&= \inf_{(u,v)} \{f(x-u,y-v)+w_1(u)+w_2(v)\} \\
&= \inf_{u} \left\{ \inf_{v} \{f(x-u,y-v)+w_2(v)\} + w_1(u) \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\int e^{f\square w} d(\mu_1\otimes\mu_2) &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \inf_u \left\{ e^{w_1(u)} e^{\inf_v\{f(x-u,y-v)+w_2(v)\}} \right\} d\mu_2(y)d\mu_1(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \inf_u \left\{ e^{w_1(u)} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{\inf_v\{f(x-u,y-v)+w_2(v)\}} d\mu_2(y) \right\} d\mu_1(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \inf_u \left\{ e^{w_1(u)} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-f(x-u,y)} d\mu_2(y) \right)^{-1} \right\} d\mu_1(x),
\end{aligned}
$$

όπου εφαρμόσαμε την ιδιότητα (τ) για το ζευγάρι (μ_2, w_2) και την συνάρτηση $f_{x,u}(y) = f(x-u,y)$.

Θέτουμε

$$\psi(x) = \log \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-f(x,y)} d\mu_2(y) \right)^{-1}.$$

Τότε, η ψ είναι φραγμένη και εφαρμόζοντας την ιδιότητα (τ) για το ζευγάρι (μ_1, w_1) στον $\mathbb{R}^{n_1}$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\int e^{f\square w} d(\mu_1\otimes\mu_2) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{\inf_u\{\psi(x-u)+w_1(u)\}} d\mu_1(x) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-\psi(x)} d\mu_1(x) \right)^{-1} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-f(x,y)} d\mu_2(y)d\mu_1(x) \right)^{-1} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} e^{-f(x,y)} d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) \right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4.3.4}
$$

Άρα, το ζευγάρι $(\mu_1\otimes\mu_2, w)$ ικανοποιεί την (τ). $\square$

Έστω μ_1 και μ_2 μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Η συνέλιξη $\mu_1 * \mu_2$ των δύο μέτρων ορίζεται μέσω της

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \, d(\mu_1 * \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y). \tag{4.3.5}$$

Στην περίπτωση που τα δύο μέτρα είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue με πυκνότητες f_1 και f_2, το $\mu_1 * \mu_2$ είναι το μέτρο που έχει πυκνότητα την $f_1 * f_2$.

Λήμμα 4.3.3. *Αν το (μ_i, w_i) ικανοποιεί την (τ) στον $\mathbb{R}^n$ για $i = 1, 2$, τότε το ζευγάρι $(\mu_1 * \mu_2, w_1 \Box w_2)$ ικανοποιεί την (τ) στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Γράφουμε

$$
\begin{aligned}
(4.3.6)\quad [f\Box(w_1\Box w_2)](x+y) &= \inf_z \{f(x+y-z) + (w_1\Box w_2)(z)\} \\
&= \inf_z \left\{ f(x+y-z) + \inf_u \{w_1(z-u) + w_2(u)\} \right\} \\
&= \inf_z \inf_u \{f(x+y-z) + w_1(z-u) + w_2(u)\} \\
&= \inf_u \inf_z \{f(x+y-z) + w_1(z-u) + w_2(u)\} \\
&= \inf_u \left\{ \inf_z \{f(x+y-z) + w_1(z-u)\} + w_2(u) \right\} \\
&= \inf_u \left\{ w_2(u) + \inf_z \{f(x+y-u-z) + w_1(z)\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\int e^{f\Box(w_1\Box w_2)} d(\mu_1 * \mu_2) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{[f\Box(w_1\Box w_2)](x+y)} d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} e^{\inf_z\{f(x+y-u-z)+w_1(z)\}} \right\} d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\inf_z\{f(x+y-u-z)+w_1(z)\}} d\mu_1(x) \right\} d\mu_2(y) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \inf_u \left\{ e^{w_2(u)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x+y-u)} d\mu_1(x) \right)^{-1} \right\} d\mu_2(y),
\end{aligned}
$$

όπου εφαρμόσαμε την ιδιότητα (τ) για το ζευγάρι (μ_1, w_1) και την συνάρτηση $f_{y,u}(x) = f(x+y-u)$.

Θέτουμε

$$\psi(s) = \log \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x+s)} d\mu_1(x) \right)^{-1}.$$

Τότε, η ψ είναι φραγμένη και εφαρμόζοντας την ιδιότητα (τ) για το ζευγάρι (μ_2, w_2) στον

$\mathbb{R}^{n_2}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int e^{f\Box(w_1\Box w_2)}d(\mu_1*\mu_2) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\inf_u\left\{e^{w_2(u)}e^{\psi(y-u)}\right\}d\mu_2(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\psi\Box w_2)(y)}d\mu_2(y)\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\psi(y)}d\mu_2(y)\right)^{-1}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x+y)}d\mu_1(x)d\mu_2(y)\right)^{-1}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f}d(\mu_1*\mu_2)\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Άρα, το ζευγάρι $(\mu_1*\mu_2, w_1\Box w_2)$ ικανοποιεί την (τ). □

Λήμμα 4.3.4. *Έστω ότι το (μ_1, w_1) ικανοποιεί την (τ) στον $\mathbb{R}^{n_1}$. Έστω $w_2 : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ θετική μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ συνάρτηση που ικανοποιεί την $w_2(g(x) - g(y)) \leqslant w_1(x-y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^{n_1}$. Έστω μ_2 το μέτρο πιθανότητας $g(\mu_1)$ στον $\mathbb{R}^{n_2}$, δηλαδή $\mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Τότε, το (μ_2, w_2) ικανοποιεί την (τ) στον $\mathbb{R}^{n_2}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$[(f\circ g)\Box w_1] \geqslant [(f\Box w_2)\circ g] \tag{4.3.8}$$

για κάθε φραγμένη μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}[(f\circ g)\Box w_1](x) &= \inf_{y\in\mathbb{R}^{n_1}}\{(f\circ g)(x-y)+w_1(y)\}\\ &= \inf_{y\in\mathbb{R}^{n_1}}\{(f\circ g)(y)+w_1(x-y)\}\\ &\geqslant \inf_{y\in\mathbb{R}^{n_1}}\{(f\circ g)(y)+w_2(g(x)-g(y))\}\\ &\geqslant \inf_{u\in\mathbb{R}^{n_2}}\{(f\circ g)(y)+w_2(g(x)-u)\}\\ &= (f\Box w_2)(g(x))\\ &= [(f\Box w_2)\circ g](x)\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n_1}$. Από την $\mu_2 = g(\mu_1)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{(f\Box w_2)(y)} d\mu_2(y) &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{((f\Box w_2)\circ g)(x)} d\mu_1(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{((f\circ g)\Box w_1)(x)} d\mu_1(x) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-(f\circ g)(x)} d\mu_1(x)\right)^{-1} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-f(y)} d\mu_2(y)\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Άρα, το (μ_2, w_2) ικανοποιεί την (τ). □

Στο πλαίσιο που συζητάμε, η Πρόταση 4.2.2 παίρνει την εξής μορφή.

Πρόταση 4.3.5. *Έστω ότι το (μ, w) ικανοποιεί την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu\left(x \notin A + \{w < t\}\right) \leqslant (\mu(A))^{-1} e^{-t}. \tag{4.3.11}$$

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.2, για κάθε $n \geqslant t$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$f_{A,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in A \\ n & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{4.3.12}$$

και δείχνουμε ότι αν $x \notin A + \{w < t\}$, τότε $(f_{A,n}\Box w)(x) \geqslant t$. Πράγματι,

$$(f_{A,n}\Box w)(x) = \inf_z \{f_{A,n}(z) + w(x-z)\}. \tag{4.3.13}$$

Αν $z \in A$, τότε $f_{A,n}(z) = 0$ και αφού $x \notin A + \{w < t\}$ έχουμε $w(x-z) \geqslant t$. Άρα,

$$f_{A,n}(z) + w(x-z) \geqslant 0 + t = t. \tag{4.3.14}$$

Αν πάλι $z \notin A$, τότε $f_{A,n}(z) = n$ και $w(x-z) \geqslant 0$, άρα

$$f_{A,n}(z) + w(x-z) \geqslant n + 0 \geqslant t. \tag{4.3.15}$$

Αυτό αποδεικνύει την (4.3.13). Από την ιδιότητα (τ) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{f_{A,n}\Box w} d\mu &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f_{A,n}} d\mu\right)^{-1} \\
&= \left(\int_A e^{-f_{A,n}} d\mu + \int_{\mathbb{R}^n\setminus A} e^{-f_{A,n}} d\mu\right)^{-1} \\
&= \left(\mu(A) + e^{-n}(1-\mu(A))\right)^{-1} \\
&\leqslant 1/\mu(A).
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$e^t\mu(x \notin A + \{w < t\}) \leqslant e^t\mu(x : (f_A\Box w)(x) \geqslant t) \leqslant \int e^{f_{A,n}\Box w}d\mu \leqslant (\mu(A))^{-1}. \tag{4.3.17}$$

Άρα,

$$\mu\left(x \notin A + \{w < t\}\right) \leqslant (\mu(A))^{-1}e^{-t}. \tag{4.3.18}$$

4.4 Η ανισότητα του Talagrand για το εκθετικό μέτρο γινόμενο

Σε αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (τ) για να αποδείξουμε μια προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για το εκθετικό μέτρο γινόμενο ξ_n στον $\mathbb{R}^n$: η πυκνότητα του ξ_n είναι η συνάρτηση $\frac{1}{2^n}e^{-\|x\|_1}$.

Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,

$$\xi_n(x \notin A + 6\sqrt{t}B_2^n + 9tB_1^n) \leqslant \frac{1}{\xi_n(A)}e^{-t}.$$

Η απόδειξη που παρουσιάζουμε οφείλεται στον Maurey.

Αρχικά, ορίζουμε μία συνάρτηση $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$W(t) = \begin{cases} t^2/18 & \text{αν } |t| \leqslant 2 \\ 2(|t|-1)/9 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Η W είναι άρτια, κυρτή, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε επίσης το μέτρο πιθανότητας μ_e στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα την $\chi_{(0,+\infty)}(x)e^{-x}$.

Πρόταση 4.4.1. *Το ζεύγος (μ_e, w) ικανοποιεί την ιδιότητα (τ).*

Απόδειξη. Έστω f φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $(0,+\infty)$. Γράφουμε ψ για την $f\Box w$ και θέτουμε

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-f(x)-x}dx \text{ και } I_1 = \int_0^{+\infty} e^{\psi(y)-y}dy. \tag{4.4.2}$$

Για κάθε $t \in (0,1)$ ορίζουμε $x(t)$ και $y(t)$ από τις σχέσεις

$$\int_0^{x(t)} e^{-f(x)-x}dx = tI_0 \text{ και } \int_0^{y(t)} e^{\psi(y)-y}dy = tI_1. \tag{4.4.3}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι οι $x(t)$, $y(t)$ είναι παραγωγίσιμες, με

$$x'(t) = I_0e^{f(x(t))+x(t)} \text{ και } y'(t) = I_1e^{-\psi(y(t))+y(t)}. \tag{4.4.4}$$

Έχουμε

$$\psi(y(t)) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\{f(y) + w(y(t) - y)\} \leqslant f(x(t)) + w(y(t) - x(t)). \tag{4.4.5}$$

Άρα,

$$y'(t) \geqslant I_1 e^{-f(x(t))-w(y(t)-x(t))+y(t)}. \tag{4.4.6}$$

Θέτουμε

$$z(t) = \frac{x(t)+y(t)}{2} - W(y(t) - x(t)), \tag{4.4.7}$$

οπότε

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{x'(t)+y'(t)}{2} - W'(y(t)-x(t))(y'(t)-x'(t)) \\ &= \left(\frac{1}{2} + W'(y(t)-x(t))\right)x'(t) + \left(\frac{1}{2} - W'(y(t)-x(t))\right)y'(t). \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $|W'| \leqslant 1/2$ στο $\mathbb{R}$, άρα η $z(t)$ είναι αύξουσα.

Γράφουμε x, y αντί των $x(t), y(t)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{2}\left(ua + \frac{v}{a}\right) \geqslant \sqrt{uv}, \quad u, v, a > 0 \tag{4.4.9}$$

με $a = \exp(f(x))$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} z'(t) &\geqslant (1 - 2W'(y-x))I_0 e^x \frac{e^{f(x)}}{2} + (1 + 2W'(y-x))I_1 e^{-W(y-x)+y}\frac{e^{-f(x)}}{2} \\ &\geqslant \sqrt{1 - 4(W'(y-x))^2}\sqrt{I_0 I_1}e^{(x+y)/2-W(y-x)/2} \\ &= \sqrt{1 - 4(W'(y-x))^2}\sqrt{I_0 I_1}e^{(x+y)/2-W(y-x)}e^{W(y-x)/2} \\ &= \sqrt{1 - 4(W'(y-x))^2}\sqrt{I_0 I_1}e^{z(t)}e^{W(y-x)/2}. \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

Ισχυρισμός: Για κάθε s,

$$\left(1 - 4(W'(s))^2\right)e^{W(s)} \geqslant 1. \tag{4.4.11}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Αφού η W είναι άρτια, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα για $s \geqslant 0$. Στο $[2, +\infty)$ έχουμε $W'(s) = 2/9$ και η W είναι αύξουσα. Αν λοιπόν η ανισότητα ισχύει για $s = 2$, τότε θα ισχύει για κάθε $s \geqslant 2$. Ζητάμε

$$\left(1 - 4(2/9)^2\right)e^{2/9} \geqslant 1 \tag{4.4.12}$$

ή, ισοδύναμα, $e^{2/9} \geqslant 81/65$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί

$$e^{2/9} \geqslant 1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{101}{81} > \frac{81}{65}. \tag{4.4.13}$$

Για $s \in [0,2]$ έχουμε $W'(s) = s/9$, οπότε ζητάμε την $e^{-s^2/18} \leqslant 1 - 4s^2/81$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(u) = 1 - \frac{4u}{81} - e^{-u/18} \tag{4.4.14}$$

παίρνει μη αρνητικές τιμές στο $[0,4]$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι η f είναι κοίλη, άρα αρκεί να εξετάσουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(4)$. Όμως, $f(0) = 0$ και η $f(4) \geqslant 0$ είναι ισοδύναμη με την $e^{2/9} \geqslant 81/65$ η οποία, όπως είδαμε, ισχύει. $\square$

Από τον ισχυρισμό και την προηγούμενη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$z'(t) \geqslant \sqrt{I_0 I_1}\, e^{z(t)}, \tag{4.4.15}$$

άρα

$$\left(-e^{-z(t)}\right)' \geqslant \sqrt{I_0 I_1}. \tag{4.4.16}$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $z(0) = 0$, παίρνουμε

$$1 \geqslant e^{-z(0)} - e^{-z(1)} = \int_0^1 \left(-e^{-z(t)}\right)' dt \geqslant \sqrt{I_0 I_1}. \tag{4.4.17}$$

Δηλαδή,

$$\left(\int_0^\infty e^{f \square W} d\mu_e\right)\left(\int_0^\infty e^{-f} d\mu_e\right) = I_0 I_1 \leqslant 1. \tag{4.4.18}$$

Αφού η f ήταν τυχούσα, το (μ_e, W) έχει την ιδιότητα (τ). $\square$

Θεωρούμε τώρα την συμμετρική εικόνα μ_e' του μ_e στο $(-\infty, 0)$, με πυκνότητα την $\chi_{(-\infty,0)}(x) e^x$. Λόγω συμμετρίας, το (μ_e', W) έχει την ιδιότητα (τ). Αν ξ είναι το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα την $\frac{1}{2} e^{-|x|}$, εύκολα ελέγχουμε οτι

$$\xi = \mu_e * \mu_e'. \tag{4.4.19}$$

Από το Λήμμα 4.3.3, το ζευγάρι $(\xi, W \square W)$ έχει την ιδιότητα (τ). Παίρνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της W, βλέπουμε οτι η $U := W \square W$ δίνεται από την

$$U(t) = \begin{cases} t^2/36 & \text{αν } |t| \leqslant 4 \\ 2(|t| - 2)/9 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{4.4.20}$$

Θεωρούμε τώρα το μέτρο γινόμενο $\xi_n = \xi \otimes \cdots \otimes \xi$ (n φορές) στον $\mathbb{R}^n$. Αν ορίσουμε την συνάρτηση $U_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$U_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i), \tag{4.4.21}$$

το Λήμμα 4.3.2 μας δίνει το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.2. *Το ζευγάρι (ξ_n, U_n) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$.* □

Από το Θεώρημα 4.4.2 και από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,

$$\xi_n(x \notin A + \{U_n < t\}) \leqslant \frac{1}{\xi_n(A)} e^{-t}. \tag{4.4.22}$$

Από τον ορισμό της U_n και την (4.4.22) προκύπτει ανισότητα του Talagrand για το ξ_n:

Θεώρημα 4.4.3. *Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $t > 0$,*

$$\xi_n(x \notin A + 6\sqrt{t}B_2^n + 9tB_1^n) \leqslant \frac{1}{\xi_n(A)} e^{-t}. \tag{4.4.23}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι

$$\{U_n < t\} \subseteq 6\sqrt{t}B_2^n + 9tB_1^n. \tag{4.4.24}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $U_n(x) < t$. Ορίζουμε y και z στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής: $y_i = x_i$ αν $|x_i| \leqslant 4$ και $y_i = 0$ αλλιώς, $z_i = x_i$ αν $|x_i| > 4$ και $z_i = 0$ αλλιώς. Προφανώς,

$$x = y + z. \tag{4.4.25}$$

Παρατηρούμε οτι

$$\|y\|_2^2 = \sum_{\{i:|x_i| \leqslant 4\}} x_i^2 = 36 \sum_{\{i:|x_i| \leqslant 4\}} U(x_i) \leqslant U_n(x) < 36t, \tag{4.4.26}$$

άρα $y \in 6\sqrt{t}B_2^n$. Επίσης, αν $|x_i| > 4$, τότε

$$U(x_i) = \frac{2}{9}(|x_i| - 2) \geqslant \frac{2}{9}\left(|x_i| - \frac{|x_i|}{2}\right) = \frac{|x_i|}{9}, \tag{4.4.27}$$

άρα

$$\|z\|_1 = \sum_{\{i:|x_i| > 4\}} |x_i| \leqslant 9 \sum_{\{i:|x_i| > 4\}} U(x_i) \leqslant 9U_n(x) < 9t, \tag{4.4.28}$$

δηλαδή $z \in 9tB_1^n$. □

4.5 Η ιδιότητα (τ) στον χώρο του Gauss

Θεωρούμε το μέτρο του Gauss γ στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα την $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ και το n-διάστατο μέτρο του Gauss $\gamma_n = \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma$ στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 4.5.1. *Το ζευγάρι $(\gamma_n, \|x\|_2^2/4)$ έχει την ιδιότητα (τ).*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.3.2, αρκεί να δείξουμε οτι το $(\gamma, x^2/4)$ έχει την ιδιότητα (τ) στο $\mathbb{R}$. Μπορεί κανείς να δώσει απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 4.4.1. Θα δώσουμε όμως απευθείας απόδειξη στον $\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler.

Έστω f φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $w(y) = \|y\|_2^2/4$ και $\psi = f\square w$. Αν

$$u(x) = f(x) + \frac{\|x\|_2^2}{2} \quad , \quad g(y) = -\psi(y) + \frac{\|y\|_2^2}{2} \quad \text{και} \quad h(z) = \frac{\|z\|_2^2}{2}, \tag{4.5.1}$$

τότε εύκολα ελέγχουμε οτι

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{u(x)+g(y)}{2}. \tag{4.5.2}$$

Άρα,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-u(x)}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-g(x)}dx\right) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-h(x)}dx\right)^2. \tag{4.5.3}$$

Δηλαδή,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f}d\gamma_n\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\square w}d\gamma_n\right) \leqslant 1 \tag{4.5.4}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Σαν εφαρμογή του Θεωρήματος 4.5.1 παίρνουμε μια ανισότητα του Pisier για την συγκέντρωση των Lipschitz συναρτήσεων ως προς το μέτρο γ_n.

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά 1. Για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\iint \left(\exp\left(\frac{t(f(x)-f(y))}{\sqrt{2}}\right)\right) d\gamma_n(x)d\gamma_n(y) \leqslant e^{t^2/2}. \tag{4.5.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $w(y) = \|y\|_2^2/4$ και ορίζουμε $\psi = (tf/\sqrt{2})\square w$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\psi(x) = \frac{tf(y)}{\sqrt{2}} + \frac{\|x-y\|_2^2}{4}. \tag{4.5.6}$$

Τότε, αφού $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}(4.5.7) \qquad \psi(x) &\geqslant \frac{tf(x)}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}}\|x-y\|_2 + \frac{\|x-y\|_2^2}{4} \geqslant \frac{tf(x)}{\sqrt{2}} + \min_{s\in\mathbb{R}}\left\{\frac{s^2}{4} - \frac{ts}{\sqrt{2}}\right\} \\ &= \frac{tf(x)}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.5.1,

$$(4.5.8) \qquad \left(\int e^{\psi} d\gamma_n\right)\left(\int e^{-tf/\sqrt{2}} d\gamma_n\right) \leqslant 1.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$(4.5.9) \qquad \int e^{tf/\sqrt{2}} d\gamma_n \cdot \int e^{-tf/\sqrt{2}} d\gamma_n \leqslant e^{t^2/2},$$

δηλαδή

$$(4.5.10) \qquad \iint \left(\exp\left(\frac{t(f(x)-f(y))}{\sqrt{2}}\right)\right) d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Πόρισμα 4.5.3. *Αν η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Lipschitz με $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$, τότε*

$$(4.5.11) \qquad \gamma_n\left(x : \left|f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right| > s\right) \leqslant 2e^{-s^2/4}$$

για κάθε $s > 0$.

Απόδειξη. Έστω $t > 0$. Από το Θεώρημα 4.5.2 και την ανισότητα του Jensen,

$$(4.5.12) \qquad \int \left(\exp\left(\frac{t}{\sqrt{2}}(f(x) - \mathbb{E}(f))\right)\right) d\gamma_n(x) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Άρα, για κάθε $s > 0$,

$$(4.5.13) \qquad \gamma_n\left(x : f(x) - \mathbb{E}f > s\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2} - \frac{ts}{\sqrt{2}}\right).$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς t και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την $-f$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

4.6 Ασκήσεις

1. Έστω $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με $\|F\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \alpha$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$|F(x) - F(y)| \leqslant b\|x-y\|_1$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\xi_n(\{F \geqslant M + t\}) \leqslant C \exp\left(-\frac{1}{C}\min\left(\frac{t}{b}, \frac{t^2}{a^2}\right)\right),$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και M είναι είτε ένας μέσος Lévy της F ή η μέση τιμή $\mathbb{E}(f)$ της f.

2. Έστω X ένας χώρος με νόρμα, εφοδιασμένος με ένα Borel μέτρο πιθανότητας και έστω $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ κυρτή συνάρτηση κόστους. Η ελαχιστική συνέλιξη μιας μετρήσιμης $f : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$Q_\phi f(x) = \inf_{y \in X} \left[f(y) + \phi(x - y)\right].$$

Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα κυρτής ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την ϕ αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη κυρτή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int e^{Q_\phi f} d\mu \cdot \int e^{-f} d\mu \leqslant 1.$$

(α) Στο προηγούμενο πλαίσιο, υποθέτουμε ότι το μ έχει φορέα κάποιο σύνολο A διαμέτρου $\mathrm{diam}(A) \leqslant 1$. Δείξτε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα κυρτής ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την $\phi(x) = \frac{\|x\|^2}{4}$.

(β) Έστω $X_1, \ldots, X_n$ χώροι με νόρμα. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_i στον X_i το οποίο έχει φορέα κάποιο σύνολο A_i διαμέτρου $\mathrm{diam}(A_i) \leqslant 1$. Δείξτε ότι το $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ στον $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ ικανοποιεί την ανισότητα κυρτής ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την $\phi(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Κεφάλαιο 5

Ανισότητα Poincaré

5.1 Ανισότητα Poincaré και συγκέντρωση του μέτρου

Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Μια συνάρτηση $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ λέγεται τοπικά Lipschitz αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U_x του x ώστε η $f \mid_{U_x}$ να είναι Lipschitz. Για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση f ορίζουμε

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}. \tag{5.1.1}$$

Ορισμός 5.1.1. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά C αν

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu \tag{5.1.2}$$

για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, όπου

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \mathbb{E}\,(f - \mathbb{E}(f))^2 = \mathbb{E}(f^2) - (\mathbb{E}(f))^2. \tag{5.1.3}$$

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι κάθε μέτρο μ που ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά C έχει εκθετική συγκέντρωση. Παρουσιάζουμε δύο επιχειρήματα: το πρώτο χρησιμοποιεί την έννοια του *συντελεστή επέκτασης* του μ, ενώ το δεύτερο χρησιμοποιεί το συναρτησοειδές Laplace.

Ορισμός 5.1.2 (συντελεστής επέκτασης)**.** Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Ο συντελεστής επέκτασης του μ ορίζεται για κάθε $\varepsilon > 0$ ως εξής:

$$\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) = \sup\{s \geqslant 1 : \mu(B_\varepsilon) \geqslant s\mu(B) \ \text{ για κάθε } B \subseteq X \text{ με } \mu(B_\varepsilon) \leqslant 1/2\}. \tag{5.1.4}$$

.

Πρόταση 5.1.3. *Αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) \geqslant s > 1$, τότε ο (X, d, μ) έχει εκθετική συγκέντρωση:*

$$\alpha_\mu(t) \leqslant \frac{s}{2} \exp\left(-\frac{\log s}{\varepsilon} t\right). \tag{5.1.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $A \subseteq X$ με $\mu(A) \geqslant \frac{1}{2}$ και θέτουμε $B = A_t^c$. Υπάρχει $k \geqslant 0$ ώστε $k\varepsilon \leqslant t < (k+1)\varepsilon$. Τότε, για κάθε $j \leqslant k$ έχουμε $B_{j\varepsilon} \subseteq A^c$, δηλαδή $\mu(B_{j\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{2}$.

Από τον ορισμό του συντελεστή επέκτασης και την υπόθεση ότι $\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) \geqslant s$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(A_t^c) &\leqslant \mu(A_{k\varepsilon}^c) \leqslant \frac{1}{s}\mu(A_{(k-1)\varepsilon}^c) \leqslant \frac{1}{s^2}\mu(A_{(k-2)\varepsilon}^c) \\ &\leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{s^k}\mu(A^c) \leqslant \frac{1}{2}s^{-k}. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Από την $t < (k+1)\varepsilon$ έπεται ότι

$$\mu(A_t^c) \leqslant \frac{s}{2}e^{-(k+1)\log s} \leqslant \frac{s}{2}e^{-\frac{\log s}{\varepsilon}t}. \tag{5.1.7}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά C, τότε*

$$\alpha_\mu(t) \leqslant \exp\left(-\frac{t}{3\sqrt{C}}\right). \tag{5.1.8}$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ με $\mu(A) \geqslant 1/2$. Θέτουμε $B = A_t^c$ και ορίζουμε $a = \mu(A)$, $b = \mu(B)$. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{dist}(A, B) \geqslant t$.

Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\min\{t, d(x, A)\}. \tag{5.1.9}$$

Τότε, $f(x) = 1/a$ στο A, $f(x) = -1/b$ στο B και

$$|\nabla f|(x) \leqslant \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \qquad x \notin A \cup B, \tag{5.1.10}$$

ενώ $|\nabla f|(x) = 0$ στο $A \cup B$. Συνεπώς,

$$\int |\nabla f|^2 d\mu \leqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 (1 - a - b). \tag{5.1.11}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $m = \mathbb{E}_\mu(f)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\mu(f) &\geqslant \int_A (f-m)^2 d\mu + \int_B (f-m)^2 d\mu \\
&\geqslant a\left(\frac{1}{a} - m\right)^2 + b\left(-\frac{1}{b} - m\right)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Poincaré έχουμε

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{C}{t^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 (1-a-b), \tag{5.1.12}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\frac{t^2}{C} \leqslant \frac{a+b}{ab}(1-a-b) \leqslant \frac{1-a-b}{ab} = \frac{1-a}{ab} - \frac{1}{a}. \tag{5.1.13}$$

Λύνοντας ως προς b παίρνουμε

$$b \leqslant \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{t^2}{C}} = \frac{1-a}{1 + \frac{at^2}{C}} \leqslant \frac{1-a}{1 + \frac{t^2}{2C}} \tag{5.1.14}$$

ιότι $a \geqslant \frac{1}{2}$. Επιλέγουμε $\varepsilon = \sqrt{2C}$. Τότε,

$$\mu(B) \leqslant \frac{1}{2}\mu(B_t). \tag{5.1.15}$$

Από το γεγονός ότι το A ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\mathrm{Exp}_\mu(\sqrt{2C}) \geqslant 2$. Τότε, η Πρόταση 5.1.3 μας δίνει

$$\alpha_\mu(t) \leqslant \exp\left(-\frac{\log 2}{\sqrt{2C}} t\right) \leqslant \exp(-t/\sqrt{3C}). \tag{5.1.16}$$

Δεύτερη απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $F : X \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\|F\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$ τότε

$$\mu\left(F \geqslant \mathbb{E}_\mu(F) + t\right) \leqslant 3\exp(-t/2\sqrt{C}). \tag{5.1.17}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 3.2.3. Ορίζουμε

$$\Phi(\lambda) = \int e^{\lambda F} d\mu. \tag{5.1.18}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Poincaré για την $f = e^{\lambda F/2}$, οπότε

$$\nabla(f) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda F/2} \nabla(F). \tag{5.1.19}$$

Από την λογαριθμική ανισότητα Poincaré,

$$\int e^{\lambda F} \lambda F \, d\mu - \left(\int e^{\lambda F/2} d\mu \right)^2 \leqslant \frac{C\lambda^2}{4} \int e^{\lambda F} |\nabla F|^2 d\mu. \tag{5.1.20}$$

Όμως $|\nabla F| \leqslant 1$ σχεδόν παντού, άρα

$$\int e^{\lambda F} \|\nabla F\|^2 d\mu \leqslant \int e^{\lambda F} d\mu. \tag{5.1.21}$$

Συνεπώς,

$$\Phi(\lambda) - \Phi^2(\lambda/2) \leqslant \frac{C\lambda^2}{4} \Phi(\lambda). \tag{5.1.22}$$

Αν $\lambda < 2/\sqrt{C}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\Phi(\lambda) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{C\lambda^2}{4}} \Phi^2(\lambda/2). \tag{5.1.23}$$

Επαγωγικά παίρνουμε

$$\Phi(\lambda) \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{C\lambda^2}{4^k}} \right)^{2^k} \Phi^{2^n}(\lambda/2^n). \tag{5.1.24}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\Phi(\lambda) = 1 + \lambda \mathbb{E}_\mu(F) + O(\lambda^2) = 1 + O(\lambda^2) \tag{5.1.25}$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε $\Phi^{2^n}(\lambda/2^n) \to 1$ και

$$\Phi(\lambda) \leqslant \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{C\lambda^2}{4^k}} \right)^{2^k}. \tag{5.1.26}$$

Επιλέγοντας τώρα $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{C}}$ έχουμε τελικά

$$\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{C}} \right) \leqslant 3. \tag{5.1.27}$$

Από την ανισότητα του Markov

$$\mu(F \geqslant t) = \mu(e^{F/2\sqrt{C}} \geqslant e^{t/2\sqrt{C}}) \leqslant 3\exp(-t/2\sqrt{C}) \tag{5.1.28}$$

έπεται το συμπέρασμα. □

5.2 Ανισότητα Poincaré και ιδιοτιμές του τελεστή Laplace

Στο πλαίσιο μιας συμπαγούς πολλαπλότητας Riemann (X, g, μ), όπου g είναι η γεωδαισιακή μετρική και μ είναι ο κανονικοποιημένος όγκος, η ανισότητα Poincaré συνδέεται στενά με τις ιδιοτιμές του τελεστή Laplace-Beltrami

$$\Delta(f) = \mathrm{div}(\nabla f). \tag{5.2.1}$$

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές του $-\Delta$ είναι μη αρνητικές και σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο, οπότε μπορούμε να τις διατάξουμε ως εξής: $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ (υπολογίζοντας και την πολλαπλότητα των θετικών ιδιοτιμών). Αποδεικνύεται επίσης ότι η μικρότερη θετική ιδιοτιμή λ_1 έχει πολλαπλότητα 1.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω (X, g, μ) μια συμπαγής πολλαπλότητα Riemann. Τότε, το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $C = 1/\lambda_1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε των χώρο των C^2-συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ σαν υπόχωρο του $L^2(X)$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g\rangle = \int f g \, d\mu$. Από τον τύπο του Green έχουμε

$$\int (\Delta f) g \, d\mu = -\int \langle \nabla f, \nabla g\rangle \, d\mu \tag{5.2.2}$$

για κάθε $f, g \in C^2(X)$. Ο τελεστής $-\Delta$ είναι θετικός και αυτοσυζυγής, και υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{f_j\}$ του $L^2(X)$ η οποία αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_j.

Για κάθε $f \in L^2(X)$ έχουμε

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, f_j\rangle f_j \tag{5.2.3}$$

και

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, f_j\rangle^2 \tag{5.2.4}$$

από την ταυτότητα του Parseval. Η *ενέργεια*

$$\mathcal{E}(f, g) = -\int \langle \nabla f, \nabla g\rangle \, d\mu \tag{5.2.5}$$

είναι διγραμμική και συμμετρική. Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(5.2.6) \qquad 0 &\leqslant \mathcal{E}\left(f - \sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle f_j, f - \sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle f_j\right) \\
&= \mathcal{E}(f,f) - 2\sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle \mathcal{E}(f, f_j) + \sum_{j,k=1}^n \langle f, f_j\rangle\langle f, f_k\rangle \mathcal{E}(f_j, f_k) \\
&= \mathcal{E}(f,f) - 2\sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle\langle f, \Delta f_j\rangle + \sum_{j,k=1}^n \langle f, f_j\rangle\langle f, f_k\rangle\langle f_j, \Delta f_k\rangle \\
&= \mathcal{E}(f,f) - 2\sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle^2 \lambda_j + \sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle^2\lambda_j.
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια,

$$(5.2.7) \qquad \sum_{j=1}^n \langle f, f_j\rangle^2 \lambda_j \leqslant \mathcal{E}(f,f)$$

για κάθε n, απ' όπου έπεται ότι

$$(5.2.8) \qquad \lambda_1 \|f\|_2^2 = \lambda_1 \sum_{j=1}^\infty \langle f, f_j\rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \langle f, f_j\rangle^2 \leqslant \mathcal{E}(f,f).$$

Παρατηρώντας ότι αν αντικαταστήσουμε την f με την $f - \mathbb{E}_\mu(f)$ τότε η ενέργεια $\mathcal{E}(f,f)$ δεν μεταβάλλεται, συμπεραίνουμε ότι

$$(5.2.9) \qquad \mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{\lambda_1}\int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Δηλαδή, ισχύει η ανισότητα Poincaré με σταθερά $C = 1/\lambda_1$. $\square$

5.3 Ανισότητα Poincaré στον διακριτό κύβο

Θεωρούμε τον διακριτό κύβο E_2^n με την μετρική $d_n(\varepsilon, \zeta) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^n |\varepsilon_i - \zeta_i|$ και το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n. Οι συναρτήσεις Rademacher r_i, $i = 1, \ldots, n$, ορίζονται από τις

$$(5.3.1) \qquad r_i(\varepsilon) = \varepsilon_i.$$

Οι συναρτήσεις Walsh ορίζονται ως εξής: για κάθε $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ θέτουμε

$$(5.3.2) \qquad w_A(\varepsilon) = \prod_{i \in A} r_i(\varepsilon),$$

και στην περίπτωση $A = \emptyset$ θέτουμε $w_\emptyset \equiv 1$. Παρατηρήστε ότι $w_{\{i\}} = r_i$.

Οι συναρτήσεις Walsh σχηματίζουν ορθοκανονική βάση στον $L^2(E_2^n)$ (παρατηρήστε ότι είναι ορθοκανονικό σύνολο με πληθάριθμο $2^n = \dim(L^2(E_2^n))$). Συνεπώς, κάθε $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ γράφεται στην μορφή

$$f = \sum_A \widehat{f}_A w_A \tag{5.3.3}$$

όπου

$$\widehat{f} = \langle f, w_A \rangle = \int_{E_2^n} f(\varepsilon) w_A(\varepsilon)\, d\mu_n(\varepsilon), \tag{5.3.4}$$

και ισχύει η ταυτότητα Parseval

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \sum_A \widehat{f}_A^2. \tag{5.3.5}$$

Για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in E_2^n$, οι «γείτονες» του ε είναι εκείνα τα $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in E_2^n$ για τα οποία

$$|\{i \leqslant n : \varepsilon_i \neq \zeta_i\}| = 1.$$

Αν τα ε, ζ είναι γείτονες, γράφουμε $\varepsilon \sim \zeta$. Το gradient της f είναι το διάνυσμα

$$(\nabla f)(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(f(\zeta) - f(\varepsilon)\right)_{\zeta \sim \varepsilon}. \tag{5.3.6}$$

Θεωρούμε την *διακριτή Λαπλασιανή* $L(f)$ της f, η οποία ορίζεται από την

$$L(f)(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{\zeta \sim \varepsilon} [f(\zeta) - f(\varepsilon)]. \tag{5.3.7}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $\zeta \sim \varepsilon$ και $\zeta_i \neq \varepsilon_i$ τότε $w_A(\zeta) = w_A(\varepsilon)$ αν $i \notin A$ και $w_A(\zeta) = -w_A(\varepsilon)$ αν $i \in A$. Έπεται ότι

$$L(w_A) = -|A| w_A, \tag{5.3.8}$$

δηλαδή οι συναρτήσεις Walsh είναι ιδιοσυναρτήσεις της διακριτής Λαπλασιανής. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$-L(f) = \sum_{i=1}^m \widehat{f}_i \varepsilon_i + \sum_{|A| \geqslant 2} |A| \widehat{f}_A w_A. \tag{5.3.9}$$

Θεωρούμε επίσης την *ενέργεια* $\mathcal{E}(f)$ της f, η οποία ορίζεται από την

$$\mathcal{E}(f) = -\langle f, L(f) \rangle. \tag{5.3.10}$$

Θεώρημα 5.3.1. *Για κάθε $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mathrm{Var}_{\mu_n}(f) \leqslant \mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2 d\mu_n. \tag{5.3.11}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbb{E}_{\mu_n}(f) = 0$. Θεωρώντας το ανάπτυγμα της f ως προς τις συναρτήσεις Walsh βλέπουμε ότι

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=1}^n \widehat{f}_i^2 + \sum_{|A|\geqslant 2} |A|\widehat{f}_A^2. \tag{5.3.12}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f) &= -\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon}\sum_{\zeta\sim\varepsilon}(f(\zeta) - f(\varepsilon))f(\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sum_{\varepsilon}\sum_{\zeta\sim\varepsilon}(f(\zeta) - f(\varepsilon))f(\varepsilon) - \sum_{\zeta}\sum_{\zeta\sim\varepsilon}(f(\zeta) - f(\varepsilon))f(\zeta)\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon}\sum_{\zeta\sim\varepsilon}(f(\zeta) - f(\varepsilon))^2 \\ &= \int |\nabla f|^2 d\mu_n. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\begin{aligned} \int f^2 d\mu_n &= \sum_{i=1}^n \widehat{f}_i^2 + \sum_{|A|\geqslant 2} \widehat{f}_A^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \widehat{f}_i^2 + \sum_{|A|\geqslant 2} |A|\widehat{f}_A^2 \\ &= \mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2 d\mu_n. \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα θεώρημα των Latala και Oleszkiewicz το οποίο δίνει την καλύτερη σταθερά στην ανισότητα του Kahane για τη σύγκριση της $L^1(X)$ και της $L^2(X)$ νόρμας αθροισμάτων Rademacher. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα συζητήσουμε την ανισότητα Kahane-Khintchine πιο διεξοδικά.

Θεώρημα 5.3.2. *Θέτουμε $S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$, όπου $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Rademacher και $x_1, \ldots, x_n$ διανύσματα σε ένα χώρο X με νόρμα. Τότε,*

$$\|S_n\|_{L^2(X)} \leqslant \sqrt{2}\,\|S_n\|_{L^1(X)}. \tag{5.3.15}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον E_2^n σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε

$$F(t) = \|t_1x_1 + \cdots + t_nx_n\|. \tag{5.3.16}$$

Αν $f = F|_{E_2^n}$ τότε

$$f(\varepsilon) = \|S_n(\varepsilon)\|, \quad \langle f, f\rangle = \|S_n\|_{L^2(X)}^2, \quad \mathbb{E}(f) = \|S_n\|_{L^1(X)}. \tag{5.3.17}$$

Η f είναι άρτια συνάρτηση, άρα $\widehat{f_i} = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επίσης, η F είναι κυρτή και θετικά ομογενής, άρα

$$\frac{1}{n}\sum_{\zeta\sim\varepsilon} f(\zeta) \geqslant F\left(\frac{1}{n}\sum_{\zeta\sim\varepsilon}\zeta\right) = F\left(\frac{(n-2)\varepsilon}{n}\right) = \frac{n-2}{n}f(\varepsilon). \tag{5.3.18}$$

Έπεται ότι

$$-L(f)(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}(nf(\varepsilon) - (n-2)f(\varepsilon)) = f(\varepsilon). \tag{5.3.19}$$

Τότε,

$$\mathcal{E}(f) = \langle f, -L(f)\rangle \leqslant \|f\|_2^2, \tag{5.3.20}$$

άρα

$$2\|f\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 + 2(\mathbb{E}(f))^2. \tag{5.3.21}$$

Αυτό αποδεικνύει την

$$\|S_n\|_{L^2(X)} \leqslant \sqrt{2}\,\|S_n\|_{L^1(X)} \tag{5.3.22}$$

που είναι ο ισχυρισμός του θεωρήματος. □

Κεφάλαιο 6

Ανισότητα Kahane-Khintchine

6.1 Ανισότητα του Khintchine

Οι συναρτήσεις Rademacher $r_i : E_2^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ ορίζονται ως εξής:

$$r_i(\varepsilon) = \varepsilon_i, \tag{6.1.1}$$

όπου $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Η $\{r_i\}_{i=1}^n$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L_2(E_2^n)$. Έπεται ότι, για κάθε ακολουθία $\{a_i\} \in \ell_2^n$,

$$\int_{E_2^n} \Big| \sum_i a_i r_i(\varepsilon) \Big|^2 d\mu_n(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n a_i^2. \tag{6.1.2}$$

Θεώρημα 6.1.1 (Khintchine)**.** *Υπάρχουν σταθερές $A_p, B_p > 0$ $(p > 0)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \ell_2^n$,*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{E_2^n} \Big| \sum_{i=1}^n a_i r_i(\varepsilon) \Big|^p d\mu_n(\varepsilon) \right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{6.1.3}$$

Παρατήρηση 6.1.2. Ισοδύναμα, η ανισότητα του Khintchine γράφεται στην μορφή

$$A_p \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_{L_2} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_{L_p} \leqslant B_p \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_{L_2}. \tag{6.1.4}$$

Αν A_p^*, B_p^* είναι οι βέλτιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει το Θεώρημα 6.1.1, από την ανισότητα του Hölder είναι φανερό ότι $A_p^* = 1$ αν $p \geqslant 2$ και $B_p^* = 1$ αν $0 < p \leqslant 2$. Οι ακριβείς τιμές των A_p^*, B_p^* έχουν υπολογιστεί από τους Szarek (A_1^*) και Haagerup (για κάθε p).

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μια απόδειξη της ανισότητας του Khintchine χρησιμοποιώντας την μέθοδο των martingales. Το επιχείρημα δείχνει ότι $B_p = O(\sqrt{p})$ καθώς $p \to +\infty$ και η A_p είναι φραγμένη μακριά απο το μηδέν: δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $m > 0$ ώστε $|A_p| \geqslant m$ για κάθε $p \geqslant 1$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1. Έστω $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ (μπορούμε να κάνουμε αυτήν την υπόθεση γιατί η ανισότητα Khintchine είναι ομογενής). Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε την άλγεβρα F_k που αποτελείται από τις πεπερασμένες ενώσεις των υποδιαστημάτων $[s/2^k, (s+1)/2^k)$, $s = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Οι συναρτήσεις Radermacher $r_1, \ldots, r_k$ είναι μετρήσιμες ως προς την F_k. Προφανώς $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots F_n$ και η $\left\{ \sum_{i=1}^k a_i r_i \right\}_{k=1}^n$ είναι martingale ως προς την $\{F_k\}_{k=1}^n$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k a_i r_i \big| F_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{E}(r_i | F_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \mathbb{E}(r_i | F_{k-1}) + a_k \mathbb{E}(r_k | F_{k-1}). \tag{6.1.5}$$

Οι r_i, $i = 1, \ldots, k-1$ είναι μετρήσιμες ως προς την F_{k-1}, άρα

$$\mathbb{E}(r_i | F_{k-1}) = r_i, \qquad i = 1, \ldots, k-1. \tag{6.1.6}$$

Επίσης, $\mathbb{E}(r_k | F_{k-1}) = 0$. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε οτι $\int_A \mathbb{E}(r_k | F_{k-1}) d\mu_n = 0$ για κάθε άτομο της F_{k-1}. Όμως, κάθε άτομο A της F_{k-1} γράφεται στην μορφή $A = B_1 \cup B_2$, όπου τα B_1, B_2 είναι άτομα της F_k, και

$$\int_A \mathbb{E}(r_k | F_{k-1}) d\mu_n = \int_A r_k d\mu_n = \int_{B_1} r_k d\mu_n + \int_{B_2} r_k d\mu_n = 0, \tag{6.1.7}$$

αφού σε ένα απο τα B_1, B_2 η r_k παίρνει την τιμή 1 και στο άλλο την τιμή -1.

Θέτουμε $f = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Τότε,

$$\mathbb{E}(f | F_k) = \sum_{i=1}^k a_i r_i, \tag{6.1.8}$$

και αν θέσουμε $d_k = \mathbb{E}(f | F_k) - \mathbb{E}(f | F_{k-1})$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|d_k\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^k a_i r_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i r_i \right\|_\infty = \|a_k r_k\|_\infty = |a_k|. \tag{6.1.9}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $f \in L_\infty(E_2^n)$ και $\mathbb{E}f = 0$. Από την ανισότητα του Azuma έπεται ότι

$$\mu_n\left(\left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right| > t \right) \leqslant 2e^{\frac{-t^2}{4\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}} = 2e^{\frac{-t^2}{4}} \tag{6.1.10}$$

για κάθε $t > 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 6.1.3. *Έστω (Ω,μ) χώρος πιθανότητας και $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ μετρήσιμη. Τότε,*

$$\int_\Omega f^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\omega : f(\omega)\geqslant t)dt.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\omega : f(\omega)\geqslant t)dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\left(\int_\Omega \chi_{\{f(\omega)\geqslant t\}}(\omega)d\mu(\omega)\right)dt \\ &= \int_\Omega\int_0^\infty pt^{p-1}\chi_{\{f(\omega)\geqslant t\}}(t)dtd\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega\left(\int_0^{f(\omega)} pt^{p-1}dt\right)d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega f(\omega)^p d\mu(\omega). \end{aligned}$$

□

Λόγω της (6.1.10) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{E_2^n}|\sum a_ir_i|^p d\mu_n &= \int_0^\infty pe^{p-1}\mu_n\left(\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right| > t\right)dt \\ &\leqslant \int_0^\infty pt^{p-1}e^{\frac{-t^2}{4}}dt \\ &= 2^p p\int_0^\infty e^{-x}x^{p/2-1}dx \leqslant (C\sqrt{p})^p, \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Έπεται ότι η δεξιά ανισότητα της (6.1.3) ισχύει με $B_p = O(\sqrt{p})$ για $p\geqslant 2$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $1\leqslant p\leqslant 2$. Από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1\left|\sum_{i=0}^n a_ir_i\right|^2 d\mu_n = \int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|^{2/3}\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|^{4/3}d\mu_n \\ &\leqslant \left(\int_0^1\left(\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|^{2/3})^{3/2}\right)d\mu_n\right)^{3/2}\left(\int_0^1\left(\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|^{4/3}\right)^3 d\mu_n\right)^{1/3} \\ &= \left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|d\mu_n\right)^{2/3}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|^4 d\mu_n\right)^{1/3}. \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

Έπεται οτι

$$B_4^{-2}\leqslant\int_{E_2^n}\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i\right|d\mu_n. \tag{6.1.13}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ υπάρχουν σταθερές B_p, A_p τέτοιες ώστε

$$A_p^{-1} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_p \leqslant B_p$$

για κάθε $a_1, \dots, a_n$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. □

6.2 Ανισότητα Kahane-Khintchine

Η ανισότητα Kahane-Khintchine γενικεύει την ανισότητα του Khintchine.

Θεώρημα 6.2.1. *Υπάρχει σταθερά K ώστε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $x_1, \dots, x_n \in X$ και για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$\left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \Big\|^p \right)^{1/p} \leqslant 2\mathbb{E} \Big\| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \Big\| + K\sigma\sqrt{p}, \tag{6.2.1}$$

όπου

$$\sigma^2 = \sup \Big\{ \sum_{i \leqslant n} |x^*(x_i)|^2 : x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1 \Big\}. \tag{6.2.2}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί στο θεώρημα του Talagrand για τον διακριτό κύβο:

Για κάθε $A \subseteq E_2^n$,

$$\mathbb{E} \exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}$$

όπου

$$\phi_A(x) = \inf\{ \|x - y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A) \}.$$

Συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι η συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

Θεώρημα 6.2.2. *Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ. Έστω M ένας μέσος Lévy της f στο E_n. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{ |f - M| \geqslant t \}) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{6.2.3}$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geqslant M\}) \geqslant 1/2$ και $\mu_n(\{f \leqslant M\}) \geqslant 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leqslant M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$ έχουμε $f(y) \leqslant M$. Αν λοιπόν $f(x) \geqslant M + t$ για κάποιο $x \in E_2^n$, τότε $f(x) \geqslant M + t \geqslant f(y) + t$ για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x - y\|_2 \geqslant |f(x) - f(y)| \geqslant t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x) \geqslant t/\sigma. \tag{6.2.4}$$

Από το προηγούμενο πόρισμα και από την $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}(6.2.5)\qquad \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) &\leqslant \mu_n(\{f_A \geqslant t/\sigma\}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}e^{-t^2/8\sigma^2}\\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}.\end{aligned}$$

Έστω $t>0$ και $B=\{f \leqslant M-t\}$. Αν $u<t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$(6.2.6)\qquad f(x) \geqslant M-t+u \implies \phi_B(x) \geqslant u/\sigma,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned}(6.2.7)\qquad \mu_n(\{f(x) \geqslant M\}) &\leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M-t+u\}) \leqslant \mu_n(\{\phi_B \geqslant u/\sigma\})\\ &\leqslant \frac{1}{\mu_n(B)}e^{-u^2/8\sigma^2}.\end{aligned}$$

Όμως $1/2 \leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M\})$, άρα $\mu_n(B) \leqslant 2e^{-u^2/8\sigma^2}$. Αφήνοντας το u να τείνει στο t παίρνουμε

$$(6.2.8)\qquad \mu_n(B) \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(6.2.9)\qquad \mu_n(\{|f-M|>t\}) &= \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) + \mu_n(\{f \leqslant M-t\})\\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2}\\ &= 4e^{-t^2/8\sigma^2}.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 6.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $(x_i)_{i\leqslant n}$ ακολουθία διανυσμάτων στον X. Θέτουμε*

$$(6.2.10)\qquad \sigma^2 = \sup\big\{\sum_{i\leqslant n}|x^*(x_i)|^2 : x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\big\}.$$

Αν M είναι μέσος Lévy της $\|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\|$ στον E_2^n τότε, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$(6.2.11)\qquad \mu_n\left(\{|\,\|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\| - M\,| \geqslant t\}\right) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $f(u) = \|\sum_{i\leqslant n} u_i x_i\|$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της νόρμας ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση. Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leqslant 1$ και

$u, v \in \mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}
(6.2.12)\quad \left| x^*\left(\sum_{i\leqslant n} u_i x_i - \sum_{i\leqslant n} v_i x_i\right)\right| &= \left|\sum_{i\leqslant n} u_i x^*(x_i) - \sum_{i\leqslant n} v_i x^*(x_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i\leqslant n}(u_i - v_i)x^*(x_i)\right| \\
&\leqslant \left(\sum_{i\leqslant n} |x^*(x_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\leqslant n}(u_i - v_i)^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \sigma\|u-v\|_2.
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach συμπεραίνουμε ότι

$$(6.2.13)\qquad |f(u) - f(v)| \leqslant \left\|\sum_{i\leqslant n} u_i x_i - \sum_{i\leqslant n} v_i x_i\right\| \leqslant \sigma\|u-v\|_2,$$

επομένως η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά σ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.2.2 για την f έχουμε το ζητούμενο. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία απόδειξη της ανισότητας Khintchine-Kahane με βέλτιστη εξάρτηση από το p.

Απόδειξη του θεωρήματος 6.2.1. Θεωρούμε την $f : E_2^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$(6.2.14)\qquad f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \Big|\ \|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\| - M\ \Big|.$$

Από το Πόρισμα 6.2.3, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2/8\sigma^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{E_2^n}\Big|\ \|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\| - M\ \Big|^p d\mu_n(\varepsilon) &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mu_n(\varepsilon : |\|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\| - M| \geqslant t)dt \\
&\leqslant 4\int_0^\infty p t^{p-1} e^{-t^2/8\sigma^2}dt \\
&= 2^{p+1}p(\sqrt{2}\sigma)^p\int_0^\infty e^{-x}x^{p/2-1}dx \leqslant (K\sigma\sqrt{p})^p.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$(6.2.15)\qquad \left(\int |\ \|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\| - M|^p d\mu_n(\varepsilon)\right)^{1/p} \leqslant K\sigma\sqrt{p}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\|^p d\mu_n(\varepsilon)\right)^{1/p} \leqslant M + K_1\sigma p^{1/2} \tag{6.2.16}$$

για κάθε $p \geqslant 1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $M \leqslant 2\mathbb{E}\,\|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\|$ από την ανισότητα του Markov. $\square$

6.3 ψ_α–εκτιμήσεις

Ορισμός 6.3.1. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $1 \leqslant \alpha \leqslant \infty$. Ο χώρος $L_{\psi_\alpha}(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : Q \to \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$\int_X \exp\left((|f|/c)^\alpha\right)\, d\mu < +\infty. \tag{6.3.1}$$

Για κάθε $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$ ορίζουμε την ψ_α νόρμα της f ως εξής:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\left\{t > 0 : \int_X \exp\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)^\alpha\, d\mu(x) \leqslant 2\right\}. \tag{6.3.2}$$

Το γεγονός ότι υπάρχουν $t > 0$ για τα οποία $\int_X \exp\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)^\alpha\, d\mu(x) \leqslant 2$ αφήνεται ως άσκηση.

Η συνάρτηση $f \mapsto \|f\|_{\psi_\alpha}$ είναι νόρμα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\psi_\alpha(t) = e^{t^\alpha} - 1$ είναι κυρτή και γνησίως αύξους, με $\psi_\alpha(0) = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδιότητες της ψ_α και το γεγονός ότι

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\left\{t > 0 : \int_X \psi_\alpha\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\, d\mu(x) \leqslant 1\right\}, \tag{6.3.3}$$

ελέγχουμε εύκολα όλες τις ιδιότητες της νόρμας. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.

Η Πρόταση που ακολουθεί δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για την ψ_α νόρμα μέσω των L_q-νορμών.

Πρόταση 6.3.2. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος πιθανότητας, έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}}. \tag{6.3.4}$$

Οι σταθερές στην ισοδυναμία εξαρτώνται μόνο από το α.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει σταθερά $C = C(\alpha) > 0$ ώστε για κάθε $p \geqslant \alpha$ να έχουμε

$$\|f\|_p \leqslant Cp^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}. \tag{6.3.5}$$

Πράγματι, θέτουμε $A := \|f\|_{\psi_\alpha}$ και χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα $1+\frac{t^k}{k!} \leqslant e^t$, για κάθε $t > 0$, παίρνουμε

$$1 + \int_X \frac{|f(\omega)|^{k\alpha}}{k!A^{k\alpha}}\, d\mu \leqslant \int_\Omega \exp(|f|/A)^\alpha\, d\mu = 2, \tag{6.3.6}$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_X |f|^{k\alpha}\, d\mu \leqslant k!A^{k\alpha}. \tag{6.3.7}$$

Έστω $p \geqslant \alpha$. Υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k\alpha \leqslant p \leqslant (k+1)\alpha$. Τότε, από την ανισότητα του Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f\|_p &\leqslant \|f\|_{(k+1)\alpha} \leqslant [(k+1)!]^{\frac{1}{(k+1)\alpha}} A \leqslant 3^{1/\alpha}k^{1/\alpha}A \\ &\leqslant 3^{1/\alpha}\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1/\alpha} A \leqslant 3^{1/\alpha}p^{1/\alpha}A.\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Αντίστροφα, αν $\gamma := \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}$, τότε $\int_\Omega |f|^p\, d\mu \leqslant \gamma^p p^{p/\alpha}$ για κάθε $p \geqslant \alpha$. Συνεπώς, για κάποια σταθερά $c > 0$ (την οποία θα ορίσουμε κατάλληλα) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp(|f|/c\gamma)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(c\gamma)^{k\alpha}k!}\int_\Omega |f|^{\alpha k}\, d\mu \leqslant 1 + \sum_{k=1} \frac{(k\alpha)^k}{k!c^{k\alpha}} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{e\alpha}{c^\alpha}\right)^k,\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την στοιχειώδη ανισότητα $k! \geqslant (k/e)^k$. Αν επιλέξουμε $c := (2e\alpha)^{1/\alpha}$, τότε έχουμε $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant c\gamma$. □

Η επόμενη Πρόταση δίνει ακόμα μία ισοδύναμη περιγραφή της ψ_α-νόρμας.

Λήμμα 6.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας, έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant b$.

(β) *Για κάθε $t > 0$ έχουμε $\mu(x : |f(x)| \geqslant t\|f\|_2) \leqslant 2e^{-t^a/b^\alpha}$.*

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (α)⇒(β) είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Markov. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant cp^{1/\alpha} b \|f\|_2, \tag{6.3.10}$$

για κάθε $p \geqslant \alpha$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^p \, d\mu(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(x : |f(x)| \geqslant t) \, dt \\ &\leqslant \|f\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(x : |f(x)| \geqslant t\|f\|_2) \, dt \\ &\leqslant 2\|f\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1} e^{-t^\alpha / b^\alpha} \, dt, \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση (β). Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $s = (t/b)^\alpha$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^p \, d\mu(x) &\leqslant 2(b\|f\|_2)^p \int_0^\infty \frac{p}{\alpha} s^{p/\alpha - 1} e^{-s} \, ds \\ &= 2(b\|f\|_2)^p \Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + 1\right). \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling έχουμε το συμπέρασμα. □

6.4 Ανισότητα Kahane-Khinthcine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορισμός 6.4.1. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}. \tag{6.4.1}$$

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{M}_n$ όλων των Borel μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f_μ: η f_μ είναι λογαριθμικά κοίλη, το ολοκλήρωμά της ισούται με 1 και για κάθε σύνολο Borel A ισχύει

$$\mu(A) = \int_A f_\mu(x) dx. \tag{6.4.2}$$

Παραδείγματα μέτρων στην $\mathcal{M}_n$. (α) Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \chi_K(x) dx \tag{6.4.3}$$

για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα του K ελέγχουμε εύκολα ότι η χ_K είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα $\mu_K \in \mathcal{M}_n$.

(β) Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c\|x\|_2^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$: παρατηρούμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση, και η $t \mapsto ct^2$ είναι επίσης κυρτή. Άρα η σύνθεσή τους $c\|x\|_2^2 = -\log f(x)$ είναι μια άρτια, κυρτή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{r,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c\|x\|_2^2)dx \tag{6.4.4}$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^r} \exp(-c\|x\|_2^2)dx$, ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}_n$. Ειδικότερα, το μέτρο του Gauss $\gamma_n \in \mathcal{M}_n$.

Ορισμός 6.4.2. Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν για κάθε A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [\mu(A)]^\lambda [\mu(B)]^{1-\lambda}. \tag{6.4.5}$$

Η Πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι η κλάση $\mathcal{M}_n$ περιέχεται στην κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Πρόταση 6.4.3. *Αν $\mu \in \mathcal{M}_n$, τότε το μ είναι λογαριθμικά κοίλο.*

Απόδειξη. Αφού $\mu \in \mathcal{M}_n$, υπάρχει $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+$ λογαριθμικά κοίλη, ώστε $\mu(A) = \int_A f(x)dx$. Έστω $\lambda \in (0,1)$ και A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(\lambda A + (1-\lambda)B) &= \int_{\mathbb{R}^r} \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x)f(x)dx \\ &\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^r} \chi_A(x)f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^r} \chi_B(x)f(x)dx\right)^{1-\lambda} \\ &= [\mu(A)]^\lambda [\mu(B)]^{1-\lambda}. \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

Ορίζουμε $w(x) = \chi_A(x)f(x)$, $g(x) = \chi_B(x)f(x)$ και $h(x) = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x)f(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι g, h, w ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa-Leindler, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

Σημείωση. Ένα θεώρημα του Borell δείχνει ότι κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}_n$.

Θεώρημα 6.4.4. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H. Τότε, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\,dx$.*

Σκοπός μας εδώ είναι να αποδείξουμε την ανισότητα Kahane-Khintchine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 6.4.5. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}_n$. Αν $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την $|g(tx)| = |t||g(x)|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $|g(x+y)| \leqslant |g(x)| + |g(y)|$ για $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $q > p \geqslant 1$, έχουμε*

$$\left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \tag{6.4.7}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο **λήμμα του Borell**.

Λήμμα 6.4.6. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}_n$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0,1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{6.4.8}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την συμμετρία και την κυρτότητα του A ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1}\mathbb{R}^n \setminus (tA) + \frac{t-1}{t+1}A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A. \tag{6.4.9}$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο για να φτάσουμε το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.5. Γράφουμε $\|g\|_p^p := \int |g|^p \, d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \leqslant 3\|g\|_p\} \tag{6.4.10}$$

είναι συμμετρικό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \leqslant 3t\|g\|_p\} \tag{6.4.11}$$

και $\mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p} \geqslant \frac{2}{3}$. Από το λήμμα του Borell βλέπουμε ότι

$$\mu(x : |g(x)| \geqslant 3t\|g\|_p) \leqslant \frac{1}{3}e^{-c_1 p(t-1)} \tag{6.4.12}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{\ln 2}{2}$. Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int |g|^q \, d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(x : |g(x)| \geqslant s) \, ds \\ &\leqslant (3\|g\|_p)^q + \frac{1}{3}(3\|g\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} \, dt \\ &\leqslant (3\|g\|_p)^q + \frac{e^{c_1 p}}{3}(3\|g\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p t} \, dt \\ &\leqslant (3\|g\|_p)^q + \frac{e^{c_1 p}}{3}\left(\frac{3\|g\|_p}{c_1 p}\right)^q \Gamma(q+1). \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

Από τον τύπο του Stirling και από την $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geqslant 1$, έπεται ότι $\|g\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\frac{q}{p}\|g\|_{L_p(\mu)}$. □

Παρατήρηση 6.4.7. Τα γραμμικά συναρτησοειδή και οποιαδήποτε ημινόρμα στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.4.5. Συνεπώς,

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{6.4.14}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{6.4.15}$$

για $\theta \in S^{n-1}$.

Κεφάλαιο 7

Λογαριθμική ανισότητα Sobolev

7.1 Λογαριθμική ανισότητα Sobolev και συγκέντρωση του μέτρου

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Για κάθε μη αρνητική συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, η *εντροπία* της f ως προς το μ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_X f \log f \, d\mu - \int_X f \, d\mu \, \log \int_X f \, d\mu \tag{7.1.1}$$

αν $\int f \log(1+f)\, d\mu < +\infty$, και $+\infty$ αλλιώς. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{Ent}_\mu(f) \geqslant 0$ από την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση $f(x) = x \log x$ και ότι η εντροπία είναι ομογενής βαθμού 1: για κάθε $a > 0$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(af) = a\mathrm{Ent}_\mu(f).$$

Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2)\, d\mu \leqslant 2C \int \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu. \tag{7.1.2}$$

Θυμηθείτε ότι το μέτρο του gradient μιας τοπικά Lipschitz συνάρτησης f στο σημείο $x \in X$ ορίζεται από την

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}. \tag{7.1.3}$$

7.1α′ Λογαριθμική ανισότητα Sobolev και ανισότητα Poincaré

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η λογαριθμική ανισότητα Sobolev είναι ισχυρότερη από την ανισότητα Poincaré.

Πρόταση 7.1.2. *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν το μ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά C, τότε το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά C.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz συνάρτηση. Θέτουμε $g = f - \mathbb{E}_\mu(f)$, οπότε $|\nabla g| = |\nabla f|$ και αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mathbb{E}_\mu(g) = 0$ τότε

$$\int g^2 d\mu \leqslant C \int |\nabla g|^2 d\mu. \tag{7.1.4}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι

$$\int g^2 d\mu = 1. \tag{7.1.5}$$

Εφαρμόζουμε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $1 + \varepsilon g$ και παίρνουμε όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Ξεκινώντας από την

$$2 \int (1 + \varepsilon g)^2 \log(1 + \varepsilon g)\, d\mu - \int (1 + \varepsilon g)^2 d\mu \cdot \log \left(\int (1 + \varepsilon g)^2 d\mu \right) \leqslant 2C\varepsilon^2 \int |\nabla g|^2 d\mu, \tag{7.1.6}$$

και κάνοντας πράξεις, παίρνουμε

$$2 \int (1+2\varepsilon g+\varepsilon^2 g^2)^2 \big(\varepsilon g - \frac{\varepsilon^2 g^2}{2}\big)\, d\mu - (1+\varepsilon^2) \log(1+\varepsilon^2) \leqslant 2C\varepsilon^2 \int |\nabla g|^2 d\mu + O(\varepsilon^3), \tag{7.1.7}$$

και χρησιμοποιώντας τις $\mathbb{E}_\mu(g) = 0$ και $\mathbb{E}_\mu(g^2) = 1$ στο αριστερό μέλος, καταλήγουμε στην

$$3\varepsilon^2 - (1 + \varepsilon^2) \log(1 + \varepsilon^2) \leqslant 2C\varepsilon^2 \int |\nabla g|^2 d\mu + O(\varepsilon^3). \tag{7.1.8}$$

Από την $(1 + \varepsilon^2) \log(1 + \varepsilon^2) = \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ έπεται ότι

$$1 \leqslant C \int |\nabla g|^2 d\mu + O(\varepsilon) \tag{7.1.9}$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\int g^2 d\mu = 1 \leqslant C \int |\nabla g|^2 d\mu. \tag{7.1.10}$$

Δηλαδή, το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά C. □

7.1β′ Το επιχείρημα του Herbst

Το «επιχείρημα του Herbst» δείχνει ότι από την λογαριθμική ανισότητα Sobolev προκύπτουν φράγματα Laplace τα οποία έχουν ως συνέπεια κανονική συγκέντρωση.

Θεώρημα 7.1.3 (Herbst). *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας ο οποίος ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev (7.1.2). Τότε,*

$$E_\mu(\lambda) \leqslant e^{C\lambda^2/2}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{7.1.11}$$

όπου $E_\mu(\lambda)$ είναι το συναρτησοειδές Laplace του μ, δηλαδή το $\sup\left(\int e^{\lambda F}\, d\mu\right)$ πάνω από όλες τις 1–Lipschitz συναρτήσεις $F : X \to \mathbb{R}$ που έχουν μέση τιμή 0.

Απόδειξη. Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\|F\|_{\rm Lip} \leqslant 1$ και $\mathbb{E}_\mu(F) = 0$. Θέτουμε $f^2 = e^{\lambda F}$, οπότε

$$\nabla(f) = \frac{\nabla(f^2)}{2f} = \frac{\lambda e^{\lambda F}\nabla(F)}{2e^{\lambda F/2}} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda F/2}\nabla(F). \tag{7.1.12}$$

Από την λογαριθμική ανισότητα Sobolev,

$$\int_X e^{\lambda F}\lambda F\, d\mu - \int_X e^{\lambda F} d\mu \cdot \log\left(\int_X e^{\lambda F} d\mu\right) \leqslant \frac{2C\lambda^2}{4}\int_X e^{\lambda F}\|\nabla F\|_2^2 d\mu. \tag{7.1.13}$$

Όμως $\|\nabla F\|_2 \leqslant 1$ σχεδόν παντού, άρα

$$\int_X e^{\lambda F}\|\nabla F\|_2^2 d\mu \leqslant \int_X e^{\lambda F} d\mu. \tag{7.1.14}$$

Ορίζουμε

$$H(\lambda) := \int_X e^{\lambda F} d\mu. \tag{7.1.15}$$

Τότε, $H'(\lambda) = \int_X F e^{\lambda F} d\mu$. Άρα,

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\log H(\lambda) \leqslant \frac{C\lambda^2}{2} H(\lambda). \tag{7.1.16}$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$K(\lambda) = \frac{\log H(\lambda)}{\lambda}, \tag{7.1.17}$$

εύκολα ελέγχουμε ότι $K'(\lambda) \leqslant \frac{C}{2}$. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda > 0$,

$$K(\lambda) \leqslant K(0) + \frac{C\lambda}{2}. \tag{7.1.18}$$

Όμως,

$$K(0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\int_X Fe^{\lambda F} d\mu}{\int_X e^{\lambda F} d\mu} = \int_X F\,d\mu = 0. \tag{7.1.19}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\lambda}\log\left(\int_X e^{\lambda F} d\mu\right) \leqslant \frac{C\lambda}{2} \tag{7.1.20}$$

και έπεται ότι $\int_X e^{\lambda F} d\mu \leqslant \exp(C\lambda^2/2)$ □

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας, ο οποίος ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά C. Για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $F : X \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$,*

$$\mu\left(\left\{F \geqslant \int F\,d\mu + t\right\}\right) \leqslant e^{-\frac{t^2}{2C}}. \tag{7.1.21}$$

Ειδικότερα ισχύει

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(t) \leqslant e^{-\frac{t^2}{8C}}, \quad t > 0. \tag{7.1.22}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.1.3. □

7.1γ΄ Λογαριθμική ανισότητα Sobolev σε χώρους γινόμενα

Η λογαριθμική ανισότητα Sobolev συμπεριφέρεται καλά ως προς γινόμενα μέτρων. Έστω $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$ χώροι πιθανότητας και $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ο χώρος γινόμενο, εφοδιασμένος με το μέτρο γινόμενο $P = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$. Αν f είναι συνάρτηση ορισμένη στον X, συμβολίζουμε με f_i την συνάρτηση που ορίζεται, για σταθερά $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, στον X_i ως εξής:

$$f_i(x_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{7.1.23}$$

Πρόταση 7.1.5. *Για κάθε μη αρνητική συνάρτηση f ορισμένη στον χώρο γινόμενο X ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_P(f) \leqslant \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f_i)\,dP. \tag{7.1.24}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την εξής περιγραφή της εντροπίας:

Λήμμα 7.1.6. *Για κάθε συνάρτηση $f \geqslant 0$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \sup\left\{\int fg\,d\mu : \int e^g\,d\mu \leqslant 1\right\}. \tag{7.1.25}$$

Απόδειξη. Επειδή η ισότητα είναι ομογενής, υποθέτουμε ότι $\int f\,d\mu = 1$. Από την ανισότητα του Young έχουμε

$$uv \leqslant u\log u - u + e^v,\ u \geqslant 0,\ v\in\mathbb{R} \tag{7.1.26}$$

οπότε αν g είναι συνάρτηση στον X τέτοια ώστε $\int e^g\,d\mu \leqslant 1$, ισχύει

$$\int fg\,d\mu \leqslant \int f\log f\,d\mu - \int f\,d\mu + \int e^g\,d\mu \leqslant \int f\log f\,d\mu. \tag{7.1.27}$$

Παίρνοντας supremum έχουμε ότι

$$\sup\left\{\int fg\,d\mu :\ \int e^g\,d\mu \leqslant 1\right\} \leqslant \int f\log f\,d\mu = \mathrm{Ent}_\mu(f), \tag{7.1.28}$$

αφού υποθέσαμε ότι $\int f\,d\mu = 1$. Τέλος, αφού $\int e^{\log f}\,d\mu = \int f\,d\mu = 1$, έπεται ότι

$$\sup\left\{\int fg\,d\mu :\ \int e^g\,d\mu \leqslant 1\right\} \geqslant \int f\log f\,d\mu, \tag{7.1.29}$$

οπότε ισχύει ισότητα. □

Απόδειξη της Πρότασης 7.1.5. Με βάση το λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι αν η $g : X\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την $\int e^g\,dP \leqslant 1$, τότε

$$\int fg\,dP \leqslant \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f_i)\,dP. \tag{7.1.30}$$

Για κάθε $i = 1,\dots,n$ θέτουμε

$$g^i(x_1,\dots,x_n) = \log\left(\frac{\int e^g\,d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{i-1}(x_{i-1})}{\int e^g\,d\mu_1(x_1)\dots d\mu_i(x_i)}\right). \tag{7.1.31}$$

Τότε $g \leqslant \sum_{i=1}^n g^i$ και $\int e^{(g^i)_i}\,d\mu_i = 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n g^i &= \log\left(\frac{e^g}{\int e^g\,d\mu_1}\frac{\int e^g\,d\mu_1}{\int e^g\,d\mu_1 d\mu_2}\cdots\frac{\int e^g\,d\mu_1\dots d\mu_{n-1}}{\int e^g\,d\mu_1\dots d\mu_n}\right)\\ &= \log\left(\frac{e^g}{\int e^g\,dP}\right),\end{aligned} \tag{7.1.32}$$

οπότε αφού $\int e^g\,dP \leqslant 1$ έπεται ότι

$$g \leqslant \log\left(\frac{e^g}{\int e^g\,dP}\right). \tag{7.1.33}$$

Επίσης,

$$\int e^{(g^i)_i}\, d\mu_i = \int \frac{\int e^g\, d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{i-1}(x_{i-1})}{\int e^g\, d\mu_1(x_1)\dots d\mu_i(x_i)}\, d\mu_i(x_i) = \frac{\int e^g\, d\mu_1\dots d\mu_i}{\int e^g\, d\mu_1\dots d\mu_i} = 1. \tag{7.1.34}$$

Άρα,

$$\int fg\, dP \leqslant \sum_{i=1}^n \int fg^i\, dP = \sum_{i=1}^n \int \left(\int f_i (g^i)_i\, d\mu_i\right) dP \leqslant \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f_i)\, dP, \tag{7.1.35}$$

οπού η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\int (g^i)_i\, d\mu_i = 1$. □

Πόρισμα 7.1.7. *Έστω (X_i, d_i, μ_i) μετρικοί χώροι πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n$, υπάρχει σταθερά C_i ώστε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση f στον X_i να ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_{\mu_i}(f^2) \leqslant 2C_i \int |\nabla_i f|^2\, d\mu_i, \tag{7.1.36}$$

όπου $|\nabla_i f|$ το μέτρο του γενικευμένου gradient στον X_i. Τότε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση f στον $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_P(f^2) \leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} C_i \int |\nabla f|^2\, dP, \tag{7.1.37}$$

όπου

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla_i f|^2 \tag{7.1.38}$$

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_P(f^2) &\leqslant \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f^2)\, dP \leqslant \sum_{i=1}^n \int \left(2C_i \int |\nabla_i f|^2\, d\mu_i\right) dP \\ &\leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} C_i \int \left(\int \sum_{i=1}^n |\nabla_i f|^2\, d\mu_i\right) dP \\ &= 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} C_i \int |\nabla f|^2\, dP.\end{aligned} \tag{7.1.39}$$

7.2 Ανισότητα Brunn-Minkowski και λογαριθμική ανισότητα Sobolev

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μια απόδειξη της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev για το μέτρο του Gauss, η οποία βασίζεται στην ανισότητα Prékopa-Leindler. Για την ακρίβεια, το επιχείρημα δουλεύει για μια γενικότερη κλάση λογαριθμικά κοίλων μέτρων στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ένα μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με συνάρτηση πυκνότητας την $e^{-V(x)}$, όπου $V(x)$ κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο Ω του E. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε: για κάθε $s,t>0$ με $s+t=1$ και για κάθε $x,y\in\Omega$ ισχύει

$$tV(x)+sV(y)-V(tx+sy)\geqslant \frac{cts}{2}\|x-y\|_2^2. \tag{7.2.1}$$

Θα αποδείξουμε την εξής ανισότητα.

Θεώρημα 7.2.1. *Για κάθε $f\in C^\infty(\Omega)$,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2)\leqslant \frac{2}{c}\int \|\nabla f\|_2^2 d\mu. \tag{7.2.2}$$

Σημείωση. Απλές πράξεις δείχνουν ότι η συνάρτηση $V(x)=\frac{1}{2}\|x\|_2^2+\alpha$ ικανοποιεί την (7.2.1) με $c=1$. Έπεται ότι το γ_n ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά 1: για κάθε τοπικά Lipscitz $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(f^2)\leqslant 2\int \|\nabla f\|_2^2 d\gamma_n. \tag{7.2.3}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f^2=e^g$ όπου $g\in C_b^\infty(\Omega)$, δηλαδή η g έχει συμπαγή φορέα στο Ω και φραγμένες μερικές παραγώγους. Έστω $t,s>0$ με $t+s=1$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$u(x)=e^{g(x)/t-V(x)},\ v(y)=e^{-V(y)} \text{ και } w(z)=e^{g_t(z)-V(z)}, \tag{7.2.4}$$

όπου

$$g_t(z)=\sup\{g(x)-[tV(x)+sV(y)-V(tx+sy)]:z=tx+sy,x,y\in\Omega\}. \tag{7.2.5}$$

Οι συναρτησεις $u,v,w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες. Επίσης, αν $z=tx+sy$ ισχύει: $w(z)\geqslant u(t)^t u(y)^s$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
u^t(x)v^s(y) &= \exp(g(x)-tV(x))\exp(-sV(y))\\
&= \exp(g(x)-tV(x)-sV(y))\\
&= \exp(g(x)-[tV(x)+sV(y)-V(tx+sy)]-V(tx+sy))\\
&\leqslant \exp\left(\sup_{z=tx+sy}\{g(x)-[tV(x)+sV(y)-V(tx+sy)]\}-V(tx+sy)\right)\\
&= w(z).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa–Leindler έχουμε:

$$\begin{aligned}\int e^{g_t} d\mu &= \int e^{g_t(z)-V(z)} dx \\ &\geqslant \left(\int e^{g(x)/t-V(x)} dx\right)^t \left(\int e^{-V(x)}\right)^s \\ &= \left(\int e^{g/t} d\mu\right)^t.\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος γύρω από το $t = 1$ παίρνουμε

$$\left(\int e^{g/t} d\mu\right)^t = \int e^g d\mu + s \,\mathrm{Ent}_\mu(e^g) + O(s^2). \tag{7.2.7}$$

Πράγματι, έστω $h(t) = (\int e^{g/t} d\mu)^t = e^{t \log \int e^{g/t} d\mu}$. Τότε,

$$h(t) = h(1) + h'(1)(t-1) + O((t-1)^2) = h(1) - h'(1)s + O(s^2). \tag{7.2.8}$$

Όμως,

$$h'(t) = \left(\int e^{g/t} d\mu\right)^t \left(\log \int e^{g/t} d\mu - \frac{\int e^g g d\mu}{t \int e^g d\mu}\right), \tag{7.2.9}$$

άρα $h'(1) = -\mathrm{Ent}_\mu(e^g)$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Περνάμε τώρα στο αριστερό μέλος. Από την υπόθεση,

$$g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx+sy)] \leqslant g(x) - \frac{cts}{2}\|x-y\|_2^2 \tag{7.2.10}$$

για κάθε $x, y \in \Omega$. Από τον ορισμό της g_t έπεται ότι

$$g_t(z) \leqslant \sup\left\{g(x) - \frac{cts\|x-y\|_2^2}{2} : z = tx+sy,\ x, y \in \Omega\right\}. \tag{7.2.11}$$

Απο την $z = tx + sy$ έχουμε

$$z - y = tx + sy - y = tx - (1-s)y = tx - ty = t(x-y), \tag{7.2.12}$$

άρα

$$x - y = \frac{1}{t}(z-y). \tag{7.2.13}$$

Επίσης,

$$tx = z - sy = tz + sz - sy = tz + s(z-y), \tag{7.2.14}$$

άρα

$$x = z + \frac{s(z-y)}{t}. \tag{7.2.15}$$

Αν λοιπόν θέσουμε $h = z - y$ και $\eta = \frac{s}{t}$, τότε

$$g_t(z) \leqslant \sup_{h \in E} \left\{ g(z+\eta h) - \frac{c\eta \|h\|^2}{2} \right\}. \tag{7.2.16}$$

Ισχυρισμός. Από το θεώρημα του Taylor,

$$g(z+\eta h) = g(z) + \eta \langle \nabla g(z), h \rangle + \eta^2 O(\|h\|_2^2), \tag{7.2.17}$$

όπου $O(\|h\|_2^2) \leqslant C\|h\|_2^2$ και η C είναι ανεξάρτητη του z.

Απόδειξη. Θέτουμε $w = \eta h$ και θεωρούμε το υπόλοιπο

$$\begin{aligned} R_1(w, z_0) &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0 + tw) w_i w_j dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0 + tw) w_i w_j dt \\ &= \int_0^1 (1-t) \langle A_{z_0+tw} w, w \rangle dt. \end{aligned} \tag{7.2.18}$$

Ο $A_{z_0+tw} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι τελεστής με πίνακα την Εσσιανή της g. Από το γεγονός ότι η g έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\|A_{z_0+tw} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \leqslant \sqrt{n} \max_j \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0 + tw) \right| \leqslant M \tag{7.2.19}$$

όπου M σταθερά ανεξάρτητη από το $z_0 + tw$. Άρα,

$$\begin{aligned} |R_1(w, z_0)| &= \left| \int_0^1 (1-t) \langle A_{z_0+tw} w, w \rangle dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 (1-t) |\langle A_{z_0+tw} w, w \rangle| dt \\ &\leqslant \int_0^1 \|A_{z_0+tw} w\|_2 \|w\|_2 dt \\ &\leqslant M\|w\|_2^2. \end{aligned} \tag{7.2.20}$$

Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό γράφουμε

$$(7.2.21)\qquad \begin{aligned} g_t(z) &\leqslant \sup\{g(z) + \eta\langle\nabla g(z), h\rangle + C\eta^2 O(\|h\|_2^2) - \frac{c\eta}{2}\|h\|_2^2\} \\ &= g(z) + \eta \sup\left\{\langle\nabla g(z), h\rangle - (c/2 - \eta C)\|h\|_2^2\right\}. \end{aligned}$$

Κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ γράφεται στη μορφή $h = \lambda e$ όπου $\lambda \geqslant 0$ και $\|e\|_2 = 1$. Άρα, αν θέσουμε $\theta = c - 2\eta C$,

$$(7.2.22)\qquad \begin{aligned} g_t(z) &\leqslant g(z) + \eta \sup_{\lambda\geqslant 0}\sup_{\|e\|=1}\left\{\lambda\langle\nabla g(z), e\rangle - \left(\frac{c}{2} - \eta C\right)\lambda^2\right\} \\ &= g(z) + \eta\sup\left\{\lambda\|\nabla g(z)\|_2 - \theta\frac{\lambda^2}{2} : \lambda \geqslant 0\right\} \\ &= g(z) + \eta\frac{\|\nabla g(z)\|_2^2}{2\theta}. \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$(7.2.23)\qquad \frac{\eta}{2\theta} = \frac{\eta}{2c} + O(\eta^2), \qquad |\eta| < \frac{c}{2C}$$

και αφού η νόρμα $\|\nabla g(z)\|_2$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη παίρνουμε

$$(7.2.24)\qquad \frac{\eta}{2\theta}\|\nabla g(z)\|_2^2 = \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_2^2 + O(\eta^2).$$

Άρα,

$$(7.2.25)\qquad g_t(z) \leqslant g(z) + \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_2^2 + O(\eta^2).$$

Απο τύπο του Taylor για την $x \mapsto e^x$ στο x έχουμε

$$(7.2.26)\qquad e^y = e^x + e^x(y - x) + O((y - x)^2).$$

Άρα,

$$(7.2.27)\qquad \begin{aligned} \exp(g_t(z)) &\leqslant \exp\left(g(z) + \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_2^2 + O(\eta^2)\right) \\ &\leqslant \exp(g(z)) + \exp(g(z))\frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_2^2 + O(\eta^2). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$(7.2.28)\qquad \begin{aligned} \int e^{g_t(z)}d\mu &\leqslant \int e^{g(z)}d\mu + \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g(z)\|_*^2 e^{g(z)}d\mu + \int O(\eta^2)d\mu \\ &= \int e^{g(z)}d\mu + \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g(z)\|_*^2 e^{g(z)}d\mu + O(\eta^2). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την ανισότητα $\left(\int e^{g/t}d\mu\right)^t \leqslant \int e^{g_t}d\mu$ βλέπουμε ότι

$$s\,\mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leqslant \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu + O(s^2), \tag{7.2.29}$$

άρα, από την $\eta/s = 1/t$ έχουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leqslant \frac{1}{2c(1-s)}\int \|\nabla g\|_2^2 e^g d\mu + O(s). \tag{7.2.30}$$

Παίρνοντας $s \to 0$ καταλήγουμε στην

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leqslant \frac{1}{2c}\int \|\nabla g\|_2^2 e^g d\mu. \tag{7.2.31}$$

Από την $f = e^{g/2}$ βλέπουμε ότι $2(\nabla f) = e^{g/2}\nabla g$, άρα $4\|\nabla f\|_2^2 = e^g\|\nabla g\|_2^2$. Συνεπώς,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) = \mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leqslant \frac{1}{2c}\int 4\|\nabla f\|_2^2 d\mu = \frac{2}{c}\int \|\nabla f\|_2^2 d\mu. \tag{7.2.32}$$

7.3 Ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μια απόδειξη της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev με σταθερά 1 για το γ_n. Για την απόδειξη εισάγουμε την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck. Χρησιμοποιώντας την δίνουμε επίσης απευθείας απόδειξη της ανισότητας Poincaré και μια απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας για το μέτρο του Gauss.

7.3α΄ Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 7.3.1. Η ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck ορίζεται στον $L^p(\gamma_n)$ ως εξής. Για κάθε $f \in L^p(\gamma_n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ορίζουμε

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,d\gamma_n(y). \tag{7.3.1}$$

Η $T_t f$ είναι καλά ορισμένη: παρατηρούμε πρώτα ότι το γ_n είναι η εικόνα του $\gamma_n \otimes \gamma_n$ μέσω της

$$(x,y) \mapsto e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y. \tag{7.3.2}$$

Συνεπώς, αν $f \in L^1(\gamma_n)$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)d\gamma_n(z) = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,d\gamma_n(y)d\gamma_n(x). \tag{7.3.3}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι: αφού

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y \right) \right|^p d\gamma_n(x) \right) d\gamma_n(y), \tag{7.3.4}$$

η συνάρτηση $T_t f$ ανήκει στον $L^p(\gamma_n)$ και, από την ανισότητα του Hölder,

$$\|T_t f\|_{L^p(\gamma_n)} \leqslant \|f\|_{L^p(\gamma_n)}. \tag{7.3.5}$$

Δουλεύουμε στον χώρο $W^{2,1}(\gamma_n)$, ο οποίος είναι η πλήρωση του $C_0(\mathbb{R}^n)$ ως προς τη νόρμα Sobolev

$$\|f\|_{2,1} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\gamma_n(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 d\gamma_n(x) \right)^{1/2}. \tag{7.3.6}$$

Βασικές ιδιότητες, οι οποίες ελέγχονται άμεσα από τον ορισμό, είναι οι εξής:

(i) Για κάθε f,

$$T_0 f = f, \qquad T_{t+s} f = T_t(T_s f), \qquad T_\infty f = \lim_{t\to\infty} T_t f \equiv \int f \, d\gamma_n.$$

(ii) Για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t f \, d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\gamma_n.$$

(iii) Για κάθε $t \geqslant 0$,

$$[\, T_t(fg)\,]^2 \leqslant T_t(f^2) \cdot T_t(g^2).$$

(iv) Αν $f \leqslant g$ τότε $T_t f \leqslant T_t g$.

(v) Για κάθε f, g και $a, b \in \mathbb{R}$, $T_t(af + bg) = aT_t(f) + bT_t(g)$. Επίσης, $T_t(1) \equiv 1$.

(vi) Αν ορίσουμε $T_t(g_1, \ldots, g_n) = (T_t(g_1), \ldots, T_t(g_n))$ τότε

$$\nabla T_t(f) = e^{-t} T_t(\nabla f).$$

Ορισμός 7.3.2. Ο γεννήτορας L της ημιομάδας ορίζεται στον $W^{2,2}(\gamma_n)$ από την

$$(Lf)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} \tag{7.3.7}$$

και ικανοποιεί τις

$$\frac{d}{dt}(T_t f) = LT_t f = T_t L f \tag{7.3.8}$$

και

$$(Lf)(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x)\rangle. \tag{7.3.9}$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned} L(T_tf) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\,d\gamma_n(y)\right) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y), e^{-t}x\rangle\,d\gamma_n(y) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \nabla f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right\rangle d\gamma_n(y), \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

και παίρνουμε $t\to 0^+$. Ο πρώτος όρος τείνει στο

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla f(x), x\rangle\,d\gamma_n(y) = -\langle \nabla f(x), x\rangle, \tag{7.3.11}$$

ενώ ο δεύτερος γράφεται στη μορφή

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla g_t(y), \nabla h(y)\rangle\,dy, \tag{7.3.12}$$

όπου

$$h(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\|y\|_2^2/2} \quad \text{και} \quad g_t(y) = f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y), \tag{7.3.13}$$

άρα ισούται με

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Delta g_t(y)\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\|y\|_2^2/2}\,dy \to \int_{\mathbb{R}^n}\Delta f(x)\,d\gamma_n(y) = \Delta f(x) \tag{7.3.14}$$

καθώς το $t\to 0^+$. Έπεται ότι

$$(Lf)(x) = \lim_{t\to 0}\big(L(T_tf)\big)(x) = \Delta f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle. \tag{7.3.15}$$

Μια άλλη ιδιότητα του L, η οποία προκύπτει από την προηγούμενη με εφαρμογή του τύπου του Green, είναι η εξής: για κάθε $f\in W^{2,2}(\gamma_n)$ και $g\in W^{2,1}(\gamma_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf\cdot g\,d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla f, \nabla g\rangle\,d\gamma_n. \tag{7.3.16}$$

7.3β′ Απόδειξη της ανισότητας Poincaré

Θεώρημα 7.3.3 (ανισότητα Poincaré)**.** *Για κάθε $f \in W^{2,1}(\gamma_n)$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,d\gamma_n - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\gamma_n\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n. \tag{7.3.17}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,d\gamma_n - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\gamma_n\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (T_0 f)^2\,d\gamma_n - (T_\infty f)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (T_0 f)^2\,d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} (T_\infty f)^2\,d\gamma_n \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (T_t f)^2\right) dt \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} 2T_t f \cdot L T_t f\,d\gamma_n\,dt \\
&= 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla T_t f, \nabla T_t f\rangle\,d\gamma_n\,dt \\
&= 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_t f|^2 d\gamma_n\,dt.
\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_t f|^2 d\gamma_n\,dt &= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |T_t(\nabla f)|^2 d\gamma_n\,dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \big(T_t(\partial_{x_i} f)\big)^2 \\
&\leq 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n T_t(1^2) T_t((\partial_{x_i} f)^2) \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} T_t(|\nabla f|^2)\,d\gamma_n\,dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n\,dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} dt \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n.
\end{aligned}$$

Έχουμε έτσι ευθεία απόδειξη της ανισότητας του Poincaré μέσω της ημιόμάδας Ornstein-Uhlenbeck. □

7.3γ΄ Απόδειξη της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev

Θεώρημα 7.3.4 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev). *Για κάθε $f \in W^{2,1}(\gamma_n)$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log|f|\,d\gamma_n - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,d\gamma_n \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,d\gamma_n\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n, \tag{7.3.18}$$

δηλαδή

$$\int |f|^2 \log|f|\,d\gamma_n \leq \int |\nabla f|^2 d\gamma_n + \|f\|_2^2 \log\|f\|_2, \tag{7.3.19}$$

με τη σύμβαση $f^2\log|f| = 0$ αν $f = 0$.

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $f \geq c > 0$. Θέτουμε $\phi = f^2$, οπότε $\nabla f = \frac{\nabla\phi}{2\sqrt{\phi}}$ και η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \log\phi\,d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} \phi\,d\gamma_n \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi\,d\gamma_n\right) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma_n. \tag{7.3.20}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_0\phi \cdot \log T_0\phi - \int_{\mathbb{R}^n} T_\infty\phi \cdot \log T_\infty\phi, \tag{7.3.21}$$

πορούμε λοιπόν να το γράψουμε στη μορφή

$$-\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}^n} T_t\phi \cdot \log T_t\phi\,d\gamma_n\right]\right) dt. \tag{7.3.22}$$

Όμως,

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}^n} T_t\phi \cdot \log T_t\phi\,d\gamma_n\right] = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{LT_t\phi \cdot \log T_t\phi + \frac{d}{dt}T_t\phi\right\} \tag{7.3.23}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt}T_t\phi &= \int_{\mathbb{R}^n} T_\infty\phi\,d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} T_0\phi\,d\gamma_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi\,d\gamma_n\right) d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} \phi\,d\gamma_n = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, το αριστερό μέλος της $(*)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} LT_tf \cdot \log T_t\phi\,d\gamma_n &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla T_t\phi, \nabla\log T_t\phi\rangle\,d\gamma_n\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla T_t\phi|^2}{T_t\phi}\,d\gamma_n\,dt.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$|T_t\partial_{x_i}\phi|^2 = \left|T_t\left(\sqrt{\phi}\cdot\frac{\partial_{x_i}\phi}{\sqrt{\phi}}\right)\right|^2 \leq T_t\phi\cdot T_t\left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi}\right), \tag{7.3.24}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}|\nabla T_t\phi|^2 &= e^{-2t}|T_t(\nabla\phi)|^2 = e^{-2t}\sum_{i=1}^n |T_t\partial_{x_i}\phi|^2 \\ &\leq e^{-2t}T_t\phi\cdot\sum_{i=1}^n T_t\left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi}\right).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla T_t\phi|^2}{T_t\phi}\,d\gamma_n\,dt &\leq \int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n T_t\left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi}\right)d\gamma_n\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n} T_t\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\right)d\gamma_n\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma_n\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t}\,dt\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma_n \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma_n,\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Σημείωση. Μπορούμε επίσης να δώσουμε μια απόδειξη του φράγματος

$$E_{\gamma_n}(\lambda) \leqslant \exp(\lambda^2/2)$$

για το συναρτησοειδές Laplace του γ_n, χρησιμοποιώντας απευθείας την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck: ορίζουμε

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda T_t F}\,d\gamma_n. \tag{7.3.25}$$

Τότε,

$$G(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F}d\gamma_n \quad \text{και} \quad G(\infty) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\int F\,d\gamma_n}d\gamma_n = 1. \tag{7.3.26}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}G(t) &= 1-\int_t^\infty G'(s)\,ds\\ &= 1-\int_t^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\lambda e^{\lambda T_sF}LT_s(F)\,d\gamma_n\,ds\\ &= 1+\lambda\int_t^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla e^{\lambda T_sF},\nabla T_sF\rangle\,d\gamma_n\,ds\\ &= 1+\lambda^2\int_t^\infty\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda T_sF}\|\nabla T_sF\|_2^2\,d\gamma_n\,ds\\ &= 1+\lambda^2\int_t^\infty\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda T_sF}e^{-2s}\|T_s(\nabla F)\|_2^2 d\gamma_n\,ds.\end{aligned}$$

Όμως, από την $\|\nabla F\|_2\leqslant 1$ έχουμε $\|T_s(\nabla F)\|_2^2\leqslant 1$. Άρα,

$$G(t)\leqslant 1+\lambda^2\int_t^\infty e^{-2s}G(s)\,ds. \tag{7.3.27}$$

Ορίζουμε

$$H(t):=\log\left(1+\lambda^2\int_t^\infty e^{-2s}G(s)\,ds\right). \tag{7.3.28}$$

Τότε,

$$H'(t)=-\frac{\lambda^2e^{-2t}G(t)}{1+\lambda^2\int_t^\infty e^{-2s}G(s)\,ds}\geqslant -\lambda^2e^{-2t}, \tag{7.3.29}$$

άρα

$$H(t)-H(0)\geqslant -\lambda^2\int_0^\infty e^{-2t}dt=-\frac{\lambda^2}{2}. \tag{7.3.30}$$

Όμως, $\lim\limits_{t\to\infty}H(t)=0$. Συνεπώς, $H(0)\leqslant\lambda^2/2$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda F}d\gamma_n=G(0)\leqslant e^{H(0)}\leqslant\exp(\lambda^2/2). \tag{7.3.31}$$

7.3δ΄ Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Ορισμός 7.3.5. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, η επιφάνεια του A ορίζεται να είναι η ποσότητα

$$\gamma^+(A)=\liminf_{r\to 0^+}\frac{\gamma(A_r)-\gamma(A)}{r} \tag{7.3.32}$$

όπου $A_r=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,A)\leq r\}$.

Θα δείξουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο του Gauss:

Θεώρημα 7.3.6. *Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $0 < \gamma(A) < 1$,*

$$\gamma^+(A) \geq \gamma^+(H), \tag{7.3.33}$$

όπου $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq a\}$ ημίχωρος με $\gamma(H) = \gamma(A)$.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 7.3.7. *Αν $U = \phi \circ \Phi^{-1}$ τότε*

$$U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(f) + |\nabla f|^2}\, d\gamma. \tag{7.3.34}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(T_t f) + |\nabla T_t f|^2}\, d\gamma \tag{7.3.35}$$

και δείχνουμε αρχικά ότι $J' \leq 0$. Τότε, η ανισότητα $J(0) \geq J(\infty)$ μας δίνει το ζητούμενο: παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma\right) &= U(T_\infty f) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(T_\infty f) + |\nabla T_\infty f|^2}\, d\gamma \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(T_0 f) + |\nabla T_0 f|^2}\, d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(f) + |\nabla f|^2}\, d\gamma. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της J: αν θέσουμε $g = T_t f$, τότε

$$J'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU')(g)L(g) + \langle \nabla g, \nabla(Lg)\rangle}{\sqrt{U^2(g) + |\nabla g|^2}}\, d\gamma. \tag{7.3.36}$$

Θέτουμε $K(g) = U^2(g) + |\nabla g|^2$ και θεωρούμε χωριστά τα

$$(I) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU')(g)L(g)}{\sqrt{K(g)}}\, d\gamma \ \text{ και } \ (II) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \nabla g, \nabla(Lg)\rangle}{\sqrt{K(g)}}\, d\gamma. \tag{7.3.37}$$

Για ευκολία στο συμβολισμό υποθέτουμε ότι $n = 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε τις

(i) $\int \alpha L\beta = -\int \alpha'\beta'$.

(ii) $L\beta = \beta'' - x\beta'$, άρα

$$\langle \nabla g, \nabla(Lg)\rangle = g'(g'' - xg')' = g'L(g') - (g')^2. \tag{7.3.38}$$

(iii) $K' = 2(UU')(g) \cdot g' + 2g'g''$.

(iv) $UU'' \equiv -1$. Πράγματι, παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$U'(x) = -\Phi^{-1}(x), \tag{7.3.39}$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$U''(x) = -\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(x))} = -\frac{1}{U(x)}. \tag{7.3.40}$$

Για το (I) γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU'(g)}{\sqrt{K(g)}} L(g) = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{(UU')(g)}{\sqrt{K(g)}}\right)' g' \tag{7.3.41}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{UU'}{\sqrt{K}}\right)' g' = \frac{\big((U')^2-1\big)(g')^2}{\sqrt{K}} - \frac{(UU')(g')^2[UU'+g'']}{K^{3/2}}, \tag{7.3.42}$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU'(g)}{\sqrt{K(g)}} L(g) = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big((U')^2-1\big)(g')^2}{\sqrt{K}} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU')(g')^2[UU'+g'']}{K^{3/2}}. \tag{7.3.43}$$

Για το (II) χρησιμοποιώντας την

$$\frac{\langle \nabla g, \nabla (Lg)\rangle}{\sqrt{K(g)}} = \frac{g'Lg' - (g')^2}{\sqrt{K(g)}} \tag{7.3.44}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \nabla g, \nabla (Lg)\rangle}{\sqrt{K(g)}} &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g')^2}{\sqrt{K(g)}} - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{g'}{\sqrt{K(g)}}\right)' g'' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g')^2}{\sqrt{K(g)}} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g'')^2}{\sqrt{K(g)}} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g'g''[(UU')(g)g' + g'g'']}{K(g)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} J'(t) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(U')^2(g')^2}{\sqrt{K(g)}} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU')(g')^2[UU'+g'']}{K^{3/2}} \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g'')^2}{\sqrt{K(g)}} + int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g')^2 g''[(UU')(g)+g'']}{K(g)^{3/2}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{[(U')^2(g')^2 + (g'')^2][U^2+(g')^2] - (g')^2[(UU')+g'']^2}{K(g)^{3/2}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g''U(g) - (g')^2U'(g))^2}{K(g)^{3/2}}\, d\gamma \leq 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η J είναι φθίνουσα. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.6. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \gamma^+(H) &= \lim_{r\to 0}\frac{\gamma(H_r)-\gamma(H)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\Phi(a+r)-\Phi(a)}{r} \\ &= \phi(a) = \phi(\Phi^{-1}(\gamma(H))) = \phi(\Phi^{-1}(\gamma(H))) \\ &= U(\gamma(A)). \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\gamma^+(A) \geq U(\gamma(A)). \tag{7.3.45}$$

Για $r>0$ μικρό, ορίζουμε

$$f_r(x) = \left(1-\frac{1}{r}d(x,A)\right)^+. \tag{7.3.46}$$

Η f_r ισούται με 1 στο A και με 0 στο $\overline{A_r}^c$. Δηλαδή, $f_r \to \chi_A$ σχεδόν παντού. Επομένως, όταν το $r\to 0^+$ έχουμε

$$U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_r\, d\gamma\right) \to U\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A\, d\gamma\right) = U(\gamma(A)). \tag{7.3.47}$$

Επίσης, $U(f_r)=0$ γιατί $U(0)=U(1)=0$ και $|\nabla f|\leq 1/r$, $\nabla f = 0$ στα A, $\overline{A_r}^c$. Άρα,

$$\liminf_{r\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{U^2(f_r)+|\nabla f_r|^2}\, d\gamma \leq \liminf_{r\to 0^+}\frac{\gamma(A_r)-\gamma(A)}{r} = \gamma^+(A)). \tag{7.3.48}$$

Αφού

$$U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_r d\gamma\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{U^2(f_r)+|\nabla f_r|^2}\, d\gamma \tag{7.3.49}$$

για κάθε $r>0$, έπεται η $U(\gamma(A))\leq \gamma^+(A)$. $\square$

Κεφάλαιο 8

Υπερσυσταλτότητα στον διακριτό κύβο

8.1 Λογαριθμική ανισότητα Sobolev στον διακριτό κύβο

Σκοπός μας είναι να δείξουμε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για τον E_2^n. Αν $f : E_2^m \to \mathbb{R}^+$ τότε η εντροπία $\mathrm{Ent}(f)$ της f ορίζεται ως συνήθως από την

$$\mathrm{Ent}(f) = \mathbb{E}\,(f \ln f) - \|f\|_1 \ln \|f\|_1.$$

Παρατηρήστε ότι αν $\|f\|_1 = 1$ τότε $\mathrm{Ent}(f) = \mathbb{E}\,(f \ln f)$. Γενικά, αν ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον E_2^m τότε η εντροπία του ν είναι η ποσότητα

$$\mathrm{Ent}(\nu) = -\sum_{\varepsilon \in E_2^m} \nu(\{\varepsilon\}) \log_2 \nu(\{\varepsilon\}).$$

Αν θεωρήσουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_m$ στον E_2^m έχουμε $\mathrm{Ent}(\mathbb{P}_m) = m$ και

$$\mathrm{Ent}(\nu) \leq \mathrm{Ent}(\mathbb{P}_m)$$

για κάθε άλλο μέτρο πιθανότητας στον E_2^m. Κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}^+$ με $\|f\|_1 = 1$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας ν_f στον E_2^m μέσω της $\nu_f(\{\varepsilon\}) = f(\varepsilon)/2^m$. Τότε, η εντροπία $\mathrm{ent}(f)$ του ν_f με την έννοια της θεωρίας πληροφορίας ισούται με

$$\mathrm{ent}(\nu_f) = -\sum_{\varepsilon \in E_2^m} \frac{f(\varepsilon)}{2^m} \log_2 \left(\frac{f(\varepsilon)}{2^m} \right) = m - \frac{\mathrm{Ent}(f)}{\ln 2}.$$

Δηλαδή, η $\mathrm{Ent}(f)$ είναι μια *σχετική εντροπία* που μετράει πόσο απέχει η εντροπία του ν_f από τη μέγιστη δυνατή εντροπία m.

Θυμίζουμε τους ορισμούς της διακριτής Λαπλασιανής και της ενέργειας. Για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in E_2^m$, οι «γείτονες» του ε είναι εκείνα τα $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in E_2^m$ για τα οποία

$$|\{i \leq m : \varepsilon_i \neq \zeta_i\}| = 1.$$

Αν τα ε, ζ είναι γείτονες, γράφουμε $\varepsilon \sim \zeta$.

Θεωρούμε την *διακριτή Λαπλασιανή* $L(f)$ της f, η οποία ορίζεται από την

$$L(f)(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{\zeta\sim\varepsilon}[f(\zeta) - f(\varepsilon)].$$

Θεωρούμε επίσης την *ενέργεια* $E(f)$ της f, η οποία ορίζεται από την

$$E(f) = -\langle f, L(f)\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι: αν $\zeta \sim \varepsilon$ και $\zeta_i \neq \varepsilon_i$ τότε $w_A(\zeta) = w_A(\varepsilon)$ αν $i \notin A$ και $w_A(\zeta) = -w_A(\varepsilon)$ αν $i \in A$. Έπεται ότι

$$L(w_A) = -|A|w_A,$$

δηλαδή οι συναρτήσεις Walsh είναι ιδιοσυναρτήσεις της διακριτής Λαπλασιανής.

Θεώρημα 8.1.1 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev). *Για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq 2E(f).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια «ανισότητα υπερσυσταλτότητας» που βασίζεται στην ανισότητα της Bonami.

8.2 Η ανισότητα της Bonami

Θεώρημα 8.2.1. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $1 < p < \infty$ ορίζουμε*

$$F_p(x,y) = \left(\frac{1}{2}|x + r_p y|^p + \frac{1}{2}|x - r_p y|^p\right)^{1/p},$$

όπου

$$r_p := \frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

Τότε, η $F_p(x,y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p στο $(1,\infty)$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και $1 < p < q < \infty$. Η ανισότητα $F_q(x,y) \leq F_p(x,y)$ είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 1$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $1 < p < q \leq 2$ και ότι $0 \leq |r_p y| \leq 1$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2}|1 + r_q y|^q + \frac{1}{2}|1 - r_q y|^q = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (η οποία ισχύει για $0 < \alpha \leq 1$ και $x \geq 0$) με $\alpha = p/q$, παίρνουμε

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{p/q} \leq 1 + \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k .$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} F_q(1,y) &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{1/q} \\ &\leq \left(1 + \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}\binom{q}{2k}\left(\frac{1}{q-1}\right)^k &= \frac{p}{q}\,\frac{q(q-1)\cdots(q-2k+1)}{(2k)!\,(q-1)^k} \\ &= \frac{p(q-2)\cdots(q-2k+1)}{(2k)!\,(q-1)^{k-1}} \\ &= \frac{p(2-q)\cdots(2k-1-q)}{(2k)!\,(q-1)^{k-1}} \\ &\leq \frac{p(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!\,(p-1)^{k-1}} \\ &= \binom{p}{2k}\left(\frac{1}{p-1}\right)^k . \end{aligned}$$

[Παρατηρήστε ότι $(q-2)\cdots(q-2k+1) = (2-q)\cdots(2k-1-q)$ γιατί το πλήθος των όρων στο γινόμενο είναι άρτιο, και ότι $\frac{(2-q)\cdots(2k-1-q)}{(q-1)^{k-1}} \leq \frac{(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(p-1)^{k-1}}$ γιατί $p < q$.]

Επιστρέφοντας στην εκτίμηση για την $F_q(x,y)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} F_q(1,y) &\leq \left(1+\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{1/p} \\ &\leq \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{2k}\left(\frac{y^2}{p-1}\right)^k\right)^{1/p} \\ &= F_p(1,y). \end{aligned}$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $1<p<q\leq 2$ και ότι $|r_py|\geq 1$. Θέτουμε $\lambda=r_q/r_p$ και $\mu=1/|r_py|$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} F_q(1,y) &= \left(\frac{1}{2}|1+\lambda r_py|^q+\frac{1}{2}|1-\lambda r_py|^q\right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|\lambda+\mu|^q+\frac{1}{2}|\lambda-\mu|^q\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $0<\lambda,\mu\leq 1$. Άρα, $|\lambda-\mu|\leq 1-\lambda\mu$ και $\lambda+\mu\leq 1+\lambda\mu$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$F_q(1,y)\leq \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1+\lambda\mu|^q+\frac{1}{2}|1-\lambda\mu|^q\right)^{1/q}.$$

Έχουμε $\lambda\mu=r_qz$, όπου $z=\frac{1}{r_p|r_py|}$ και $|r_pz|=\frac{1}{|r_py|}\leq 1$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1+\lambda\mu|^q+\frac{1}{2}|1-\lambda\mu|^q\right)^{1/q} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1+r_qz|^q+\frac{1}{2}|1-r_qz|^q\right)^{1/q} \\ &\leq \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1+r_pz|^p+\frac{1}{2}|1-r_pz|^p\right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1+\mu|^p+\frac{1}{2}|1-\mu|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}\left|1+\frac{1}{\mu}\right|^p+\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{\mu}\right|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}\,|1+r_py|^p+\frac{1}{2}\,|1-r_py|^p\right)^{1/p} \\ &= F_p(1,y). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$F_q(1,y)\leq F_p(1,y).$$

(γ) Τέλος, υποθέτουμε ότι $2 \le p < q < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε δυϊσμό. Θεωρούμε τους συζυγείς εκθέτες p' και q' των p και q. Παρατηρήστε ότι $1 < q' < p' \le 2$. Αν $\lambda = r_{p'}/r_{q'} = \frac{\sqrt{q'-1}}{\sqrt{p'-1}}$ και αν $\kappa(1,1) = \kappa(-1,-1) = 1+\lambda$ και $\kappa(1,-1) = \kappa(-1,1) = 1-\lambda$, τότε τα (α) και (β) δείχνουν ότι για τον τελεστή $T : L^{q'}(E_2^1) \to L^{p'}(E_2^1)$, $1 < p' < q' \le 2$, που ορίζεται μέσω της

$$T(f)(\epsilon) = \int_{E_2^1} \kappa(\epsilon,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

ισχύει η ανισότητα

$$\|T(f)\|_{p'} \le \|f\|_{q'}.$$

Η κ είναι συμμετρική στον $E_2^1 \times E_2^1$, άρα $T^* = T$, όπου $T^* : L^p(E_2^1) \to L^q(E_2^1)$ είναι ο συζυγής τελεστής του T. Από την $\|T^*\| = \|T\|$ έπεται ότι

$$\|T(f)\|_q \le \|f\|_p$$

για κάθε $f : E_2^1 \to \mathbb{R}$. Παρατηρώντας ότι

$$\frac{q'-1}{p'-1} = \frac{p-1}{q-1}$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Η ανισότητα του Θεωρήματος 8.2.1 επεκτείνεται εύκολα στην περίπτωση που τα x, y είναι διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα.

Θεώρημα 8.2.2. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Για κάθε $x, y \in X$ και $1 < p < \infty$ ορίζουμε*

$$F_p(x,y) = \left(\frac{1}{2}\|x + r_p y\|^p + \frac{1}{2}\|x - r_p y\|^p\right)^{1/p},$$

όπου

$$r_p := \frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

Τότε, η $F_p(x,y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p στο $(1,\infty)$.

Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 8.2.3. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Αν $x, z \in X$ και $-1 \le \lambda < 1$, τότε*

$$\|x + \lambda z\| \le \frac{1}{2}\big(\|x+z\| + \|x-z\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|x+z\| - \|x-z\|\big).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$x + \lambda z = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(x+z) + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)(x-z),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\|x+\lambda z\| &\leq \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\|x+z\| + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\|x-z\| \\ &= \frac{1}{2}\big(\|x+z\|+\|x-z\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|x+z\|-\|x-z\|\big).\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.2. Έστω $1<p<q<\infty$. Θέτουμε $u=x+r_py$, $v=x-r_py$ και $\lambda=r_q/r_p$. Παρατηρήστε ότι $0<\lambda<1$, οπότε το λήμμα μας δίνει

$$\begin{aligned}\|x+\lambda r_py\| &\leq \frac{1}{2}\big(\|x+r_py\|+\|x-r_py\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|x+r_py\|-\|x-r_py\|\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\|u\|+\|v\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|u\|-\|v\|\big)\end{aligned}$$

και, εντελώς ανάλογα,

$$\|x-\lambda r_py\| \leq \frac{1}{2}\big(\|u\|+\|v\|\big) - \frac{\lambda}{2}\big(\|u\|-\|v\|\big).$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\left(\frac{1}{2}\|x+r_qy\|^q+\frac{1}{2}\|x-r_qy\|^q\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2}\|x+\lambda r_py\|^q+\frac{1}{2}\|x-\lambda r_py\|^q\right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}&\leq \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(\|u\|+\|v\|\big)+\frac{\lambda}{2}\big(\|u\|-\|v\|\big)\right)^q + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(\|u\|+\|v\|\big)-\frac{\lambda}{2}\big(\|u\|-\|v\|\big)\right)^q\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(\|u\|+\|v\|\big)+\frac{1}{2}\big(\|u\|-\|v\|\big)\right)^p + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(\|u\|+\|v\|\big)-\frac{1}{2}\big(\|u\|-\|v\|\big)\right)^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}\|u\|^p+\frac{1}{2}\|v\|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}\|x+r_py\|^p+\frac{1}{2}\|x-r_py\|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

όπου, για την δεύτερη ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 3.1.1 με $x=\frac{\|u\|+\|v\|}{2}$ και $y=\frac{1}{2r_p}\big(\|u\|-\|v\|\big)$. □

Θεώρημα 8.2.4. *Έστω $1<p<q<\infty$ και έστω $\{x_A : A\subseteq\{1,\ldots,N\}\}$ μια οικογένεια διανυσμάτων σε έναν χώρο με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$. Τότε,*

$$\left\|\sum_A r_q^{|A|}w_Ax_A\right\|_{L^q(X)} \leq \left\|\sum_A r_p^{|A|}w_Ax_A\right\|_{L^p(X)},$$

όπου w_A είναι οι συναρτήσεις Walsh.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς N. Για $N=1$ το ζητούμενο είναι ακριβώς η ανισότητα που αποδείξαμε στο Θεώρημα 3.1.1 (θεωρούμε $x_\emptyset = x$, $x_{\{1\}} = y$ και $w_{\{1\}}(-1)=1$, $w_{\{1\}}(1) = 1$.)

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $k=N-1$ και γράφουμε $E_2^N = E_2^{N-1}\times E_2^1$, $\mu_N = \mu_{N-1}\times\mu_{\{N\}}$. Γράφουμε $\mathcal{P}(N-1)$ για το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1,\dots,N-1\}$ και $\mathcal{P}(N)$ για το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1,\dots,N\}$. Για κάθε $B\in\mathcal{P}(N-1)$ ορίζουμε $B^+ = B\cup\{N\}$. Με αυτό τον συμβολισμό, $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(N-1)\cup\{B^+ : B\in\mathcal{P}(N-1)\}$. Γράφουμε

$$\sum_A r_p^{|A|} w_A(\omega)x_A = u_p(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_p v_p(\varepsilon),$$

όπου $\varepsilon\in E_2^{N-1}$, $\eta\in E_2^{\{N\}} = \{-1,+1\}$ και $\omega = (\varepsilon,\eta)\in E_2^N$. Ορίζουμε

$$u_p = \sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)} r_p^{|B|} w_B x_B \quad \text{και} \quad v_p = \sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)} r_p^{|B|} w_B x_{B^+}.$$

Εντελώς ανάλογα,

$$\sum_A r_q^{|A|} w_A x_A = u_q + \varepsilon_N r_q v_q,$$

όπου

$$u_q = \sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)} r_q^{|B|} w_B x_B \quad \text{και} \quad v_q = \sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)} r_q^{|B|} w_B x_{B^+}.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|u_q + r_q\varepsilon_N v_q\|_{L^q} \le \|u_p + r_p\varepsilon_N v_p\|_{L^p}.$$

Από την επαγωγική μας υπόθεση ισχύει

$$\begin{aligned}
\|u_q + r_q\varepsilon_N v_q\|_{L^q} &= \big(\mathbb{E}_{N-1}(\|u_q + r_q\varepsilon_N v_q\|^q)\big)^{1/q} \\
&= \left(\mathbb{E}_{N-1}\Big\|\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)} r_q^{|B|} w_B(x_B + \varepsilon_N r_q x_{B^+})\Big\|^q\right)^{1/q} \\
&\le \left(\mathbb{E}_{N-1}\Big\|\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)} r_p^{|B|} w_B(x_B + \varepsilon_N r_q x_{B^+})\Big\|^p\right)^{1/p} \\
&= \big(\mathbb{E}_{N-1}\|u_q + r_q\varepsilon_N v_p\|^p\big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ανισότητα: Αν $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ είναι χώροι μέτρου, $f:\Omega_1\times\Omega_2\to[0,+\infty]$, και $0<p\le q<+\infty$, τότε

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)^p\, d\mu(y)\right)^{q/p} d\mu_1(x)\right)^{1/q} \le \left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)^q\, d\mu_1(x)\right)^{p/q} d\mu_2(y)\right)^{1/p}.$$

Άρα αν $\varepsilon \in E_2^{N-1}, \eta \in \{-1, +1\}$, τότε

$$\begin{aligned}
\|u_q(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_q v_q(\varepsilon)\|_{L^q} &= \Big(\mathbb{E}_{\{N\}}(\mathbb{E}_{N-1}\|u_q(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_q v_q(\varepsilon)\|^q)\Big)^{1/q} \\
&\leq \Big(\mathbb{E}_{\{\mathbb{N}\}}(\mathbb{E}_{N-1}\|u_p(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_q v_p(\varepsilon)\|^p)^{q/p}\Big)^{1/q} \\
&\leq \Big(\mathbb{E}_{N-1}(\mathbb{E}_{\{N\}}\|u_p(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_q v_p(\varepsilon)\|^q)^{p/q}\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\mathbb{E}_{N-1}\,\mathbb{E}_{\{N\}}\|u_p(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_p v_p(\varepsilon)\|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\mathbb{E}_N\|u_p(\varepsilon) + \varepsilon_N(\eta) r_p v_p(\varepsilon)\|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Bigg\|\sum_{A\in\mathcal{P}(N)} r_p^{|A|} w_A x_A\Bigg\|_{L^p}
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την περίπτωση $k = 1$. □

Ορισμός 8.2.5. Γράφουμε $C(E_2^n)$ για το χώρο όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to \mathbb{R}$. Για κάθε $t \geq 0$ θεωρούμε τον τελεστή $P_t : C(E_2^n) \to C(E_2^n)$ με

$$P_t(f) = (e^{tL})(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j L^j(f)}{j!},$$

όπου $L^j = L \circ \cdots \circ L$ (j φορές). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$L^j(w_A) = (-1)^j |A|^j w_A$$

(αυτό προκύπτει επαγωγικά από την $L(w_A) = -|A| w_A$). Συνεπώς,

$$P_t(w_A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^j |A|^j w_A}{j!} = (e^{-t|A|})(w_A).$$

Τώρα, άμεση εφαρμογή του θεωρήματος 3.1.6 μας δίνει το εξής:

Θεώρημα 8.2.6 (υπερσυσταλτότητα στο διακριτό κύβο)**.** *Έστω $1 < p < \infty$ και $t \geq 0$. Θέτουμε*

$$q(t) = 1 + (p-1)e^{2t}.$$

Τότε, για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$,

$$\|P_t(f)\|_{q(t)} \leq \|f\|_p.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_A \hat{f}_a w_A$, τότε

$$\begin{aligned} P_t f = \sum_A \hat{f}_A e^{-t|A|} w_A &= \sum_A r_p^{|A|} e^{-t|A|} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}} \\ &= \sum_A r_{q(t)}^{|A|} e^{-t|A|} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}}, \end{aligned}$$

αφού $r_{q(t)} = e^{-t|A|} r_p^{|A|}$. Άρα από την γενικευμένη ανισότητα της Bonami (θεώρημα 8.2.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|P_t f\|_{q(t)} &= \left\| \sum_A r^{q(t)} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}} \right\|_{q(t)} \\ &\leq \left\| \sum_A r_p^{|A|} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}} \right\|_p = \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev στον διακριτό κύβο. Παίρνουμε $p = 2$ και, για κάθε $t \geq 0$, θεωρούμε τον $q(t) = 1 + e^{2t}$. Από την $P_t(w_A) = (e^{-t|A|})(w_A)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{dP_t(w_A)}{dt} = -|A|(e^{-t|A|})(w_A) = (L \circ P_t)(w_A),$$

άρα

$$\frac{dP_t(f)}{dt} = (L \circ P_t)(f)$$

για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι $\|f\|_2 = 1$. Από το θεώρημα **;;** έχουμε

$$\|P_t(f)\|_{q(t)} \leq 1,$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{E} \left[(P_t(f))^{q(t)} \right] \right) \leq 0$$

στο σημείο $t = 0$. Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P_t(f))^{q(t)} &= [P_t(f)]^{q(t)} \frac{d}{dt} \left(\ln[P_t(f)]^{q(t)} \right) \\ &= [P_t(f)]^{q(t)} \frac{d}{dt} (q(t) \ln(P_t(f))) \\ &= [P_t(f)]^{q(t)} q'(t) \ln(P_t(f)) + [P_t(f)]^{q(t)-1} q(t) (L \circ P_t)(f) \\ &= 2e^{2t} [P_t(f)]^{q(t)} \ln(P_t(f)) + (1 + e^{2t}) [P_t(f)]^{q(t)-1} (L \circ P_t)(f). \end{aligned}$$

Παίρνοντας μέση τιμή στην παραπάνω ανισότητα και θέτοντας $t = 0$ βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Ent}(f^2) - 2E(f) = \mathbb{E}\left(f^2 \ln(f^2)\right) + 2\mathbb{E}\left(fL(f)\right) \leq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Κεφάλαιο 9

Ισοτροπική σταθερά κυρτών σωμάτων

9.1 Ισοτροπικά κυρτά σώματα

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το 0. Δηλαδή,

$$\int_K x_i dx = 0, \tag{9.1.1}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ο γραμμικός τελεστής $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx \tag{9.1.2}$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο πίνακας $M(K)$ με

$$[M(K)]_{ij} = \langle Me_i, e_j\rangle = \int_K x_i x_j dx \tag{9.1.3}$$

που αντιστοιχεί στον M λέγεται πίνακας αδρανείας του K. Ο M έχει τετραγωνική ρίζα: υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος S τέτοιος ώστε $M = S^2$. Θεωρούμε την γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Το $\tilde{K}$ έχει κέντρο βάρους το 0, και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{K}}\langle x,y\rangle^2dx &= |\mathrm{det}S|^{-1}\int_K\langle S^{-1}x,y\rangle^2dx\\ &= |\mathrm{det}S|^{-1}\int_K\langle x,S^{-1}y\rangle^2dx\\ &= |\mathrm{det}S|^{-1}\langle\int_K\langle x,S^{-1}y\rangle x dx,S^{-1}y\rangle\\ &= |\mathrm{det}S|^{-1}\langle MS^{-1}y,S^{-1}y\rangle = |\mathrm{det}S|^{-1}\|y\|_2^2.\end{aligned}$$

Ορισμός 9.1.1. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $|K|=1$, κέντρο βάρους το 0, και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_K\langle x,y\rangle^2dx = A\|y\|_2^2 \tag{9.1.4}$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$, όπου $A>0$ σταθερά. Άμεσες συνέπειες της (9.1.4) είναι οι

$$\int_K x_i^2dx = A, \qquad i=1,\dots,n \tag{9.1.5}$$

και

$$\int_K\|x\|_2^2dx = nA. \tag{9.1.6}$$

Όπως είδαμε, κάθε κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 έχει γραμμική εικόνα που είναι ισοτροπική. Αρκεί να πάρουμε το $\tilde{K}$ όπως παραπάνω, και να κανονικοποιήσουμε τον όγκο του.

Λήμμα 9.1.2. *Το K είναι ισοτροπικό σώμα με σταθερά A αν και μόνο αν*

$$\int_K\langle x,Tx\rangle dx = A\cdot(\mathrm{tr}T) \tag{9.1.7}$$

για κάθε $T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A. Εφαρμόζοντας την (9.1.4) πρώτα με $\theta=e_j$ και μετά με $\theta=(e_i+e_j)/\sqrt{2}$, βλέπουμε ότι

$$\int_K x_ix_jdx = A\cdot\delta_{ij} \qquad i,j=1,\dots,n. \tag{9.1.8}$$

Αν $T=(t_{ij})$, τότε

$$\begin{aligned}\int_K\langle x,Tx\rangle dx &= \sum_{i,j=1}^n t_{ij}\int_K x_ix_jdx = \sum_{i,j=1}^n A\cdot t_{ij}\delta_{ij}\\ &= A\cdot\sum_{i=1}^n t_{ii} = A\cdot(\mathrm{tr}T).\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η (9.1.7) και την εφαρμόσουμε για τον $Tx = \langle x, \theta\rangle\theta$, $\theta \in S^{n-1}$, παίρνουμε

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx = A\cdot(\mathrm{tr}T) = A\cdot\|\theta\|_2^2 = A. \tag{9.1.10}$$

□

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι μέσα στη γραμμική κλάση ενός κυρτού σώματος με κέντρο βάρους το 0 υπάρχει ένα ουσιαστικά ισοτροπικό σώμα, το οποίο χαρακτηρίζεται ως λύση ενός προβλήματος ελαχίστου.

Θεώρημα 9.1.3. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν*

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \tag{9.1.11}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει ισοτροπική γραμμική εικόνα. Επιπλέον, η ισοτροπική αυτή εικόνα είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A. Έστω $T \in SL(n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{TK} \|x\|_2^2 dx &= \int_K \|Tx\|_2^2 dx = \int_K \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= A\cdot \mathrm{tr}(T^*T) \geqslant nA = \int_K \|x\|_2^2 dx,\end{aligned} \tag{9.1.12}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n[\det(T^*T)]^{1/n} \tag{9.1.13}$$

(το ίχνος είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών και η ορίζουσα το γινόμενό τους, και στη συγκεκριμένη περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί). Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $T^*T = I$, δηλαδή αν $T \in O(n)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το K είναι λύση του προβλήματος ελαχίστου (τέτοιες λύσεις υπάρχουν: κάθε ισοτροπική θέση του K είναι όπως είδαμε μια τέτοια λύση). Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε ο $(I+\varepsilon T)/[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Άρα,

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \frac{\|x+\varepsilon Tx\|_2^2}{[\det(I+\varepsilon T)]^{2/n}} dx. \tag{9.1.14}$$

Παρατηρούμε οτι $\|x+\varepsilon Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O(\varepsilon^2)$ και

$$[\det(I+\varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O(\varepsilon^2) \tag{9.1.15}$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Συνεπώς, η (9.1.14) παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon \frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \varepsilon \int_K \langle x, Tx\rangle dx + O(\varepsilon^2), \tag{9.1.16}$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$ καταλήγουμε στην

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \langle x, Tx\rangle dx. \tag{9.1.17}$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για τον $-T$, και λόγω γραμμικότητας παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx \tag{9.1.18}$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Από το Λήμμα 9.1.1, το K είναι ισοτροπικό με σταθερά $A = \frac{1}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx$.

Τέλος, αν έχουμε δύο ισοτροπικές θέσεις K, K' του ίδιου σώματος, τότε η μία είναι ορθογώνια εικόνα της άλλης. Για να το δούμε, παρατηρούμε ότι αν $K' = TK$, τότε ισχύει ισότητα στην

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_{TK} \|x\|_2^2 dx, \tag{9.1.19}$$

δηλαδή έχουμε ισότητα στην (9.1.13). Αυτό σημαίνει ότι $T^*T = I$, δηλαδή $T \in O(n)$. □

Το Θεώρημα 9.1.3 (πιο συγκεκριμένα, η μοναδικότητα της ισοτροπικής θέσης ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) εξασφαλίζει οτι η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n} \min\left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \;\Big|\; T \in GL(n)\right\} \tag{9.1.20}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό, τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2. \tag{9.1.21}$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται σταθερά ισοτροπίας της γραμμικής κλάσης του K.

Το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς διατυπώθηκε από τον Bourgain:

> **Εικασία**: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0.*

Στην επόμενη παράγραφο θα περιγράψουμε την απόδειξη του ακόλουθου άνω φράγματος για την ισοτροπική σταθερά.

Θεώρημα 9.1.4 (Bourgain, 1990). *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, ισχύει η ανισότητα*

$$L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n, \tag{9.1.22}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα οφείλεται στον Klartag (2006): $L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0.

Βασικό ρόλο στο επιχείρημα του Bourgain παίζει η συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών $x \mapsto \langle x, \theta\rangle$ πάνω στο K, η οποία περιγράφεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.1.5. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και αν $\theta \in \mathbb{R}^n$, τότε γιά κάθε $p > 1$ ισχύει η αντίστροφη ανισότητα Hölder*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leqslant cp\int_K |\langle x, \theta\rangle| dx. \tag{9.1.23}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski είναι ότι το μέτρο $\mu(A) = |A \cap K|$ είναι λογαριθμικά κοίλο. Επίσης, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $x \mapsto |\langle x, \theta\rangle|$ είναι ημινόρμα. Έτσι, το συμπέρασμα έπεται από την ανισότητα Kahane-Khinthcine για λογαριθμικά κοίλα μέτρα (Θεώρημα 6.4.5). □

Πόρισμα 9.1.6. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $p > 1$,*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leqslant cpL_K, \tag{9.1.24}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Θυμηθείτε επίσης ότι, χρησιμοποιώντας την ψ_1-νόρμα (δείτε την παράγραφο §6.3) μπορούμε να διατυπώσουμε το συμπέρασμα της Πρότασης 9.1.5 στην εξής ισοδύναμη μορφή:

Πρόταση 9.1.7. *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\int_K \exp(|\langle x, \theta\rangle|/CI(K, \theta))dx \leqslant 2, \tag{9.1.25}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά και $I(K, \theta) = \int_K |\langle x, \theta\rangle| dx$.

9.2 Αριθμοί κάλυψης: η ανισότητα του Sudakov και η δυική της

Ορισμός 9.2.1. Έστω A και B δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο *αριθμός κάλυψης* $N(A,B)$ του A από το B είναι ο ελάχιστος αριθμός μεταφορών του B που απαιτούνται για να καλυφθεί το A:

$$N(A,B) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n : A \subseteq \cup(x_i + B)\}. \tag{9.2.1}$$

Μια χρήσιμη παραλλαγή του $N(A,B)$ ορίζεται αν απαιτήσουμε από τα κέντρα x_i να ανήκουν στο A. Θέτουμε

$$\overline{N}(A,B) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in A : A \subseteq \cup(x_i + B)\}. \tag{9.2.2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης. Οι αποδείξεις τους είναι απλές και αφήνονται ως άσκηση.

Λήμμα 9.2.2. *Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων A, B και για κάθε αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισχύει $N(A,B) = N(T(A), T(B))$.*

Λήμμα 9.2.3. *Αν A, B και C είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $N(A,B) \leqslant N(A,C)N(C,B)$.*

Λήμμα 9.2.4. *Αν A, B και C είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $N(A+C, B+C) \leqslant N(A,B)$*

Λήμμα 9.2.5. *Αν A και B είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $N(A, 2(B \cap A)) \leqslant N(A,B)$.*

Λήμμα 9.2.6. *Αν D είναι μια Ευκλείδεια μπάλα, τότε $N(A, D \cap 2A) = N(A,D)$ για κάθε κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$.*

Ορίζουμε μία ακόμα παράμετρο $M(A,B)$ ως τον μέγιστο δυνατό πληθάριθμο ενός B-*διαχωρισμένου συνόλου* στο A, δηλαδή,

$$M(A,B) = \max\{N : \exists x_1, \dots, x_N \in A \quad \text{'wste } \forall j \neq i, x_j \notin (x_i + B).\}$$

Η παράμετρος αυτή συνδέεται στενά με τους αριθμούς κάλυψης. Ελέγχουμε εύκολα ότι

Λήμμα 9.2.7. *$M(A, 2B) \leqslant N(A,B) \leqslant M(A,B)$.*

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σκοπός μας είναι να δώσουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ και $N(B_2^n, tK)$. Στις εκτιμήσεις αυτές, βασικό ρόλο παίζει το *μέσο πλάτος* του K

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(x)\, d\sigma(x), \tag{9.2.3}$$

όπου $h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}$ είναι η *συνάρτηση στήριξης* του K. Αρχικά, υποθέτουμε ότι το K είναι συμμετρικό.

Ανισότητα Sudakov

Θεώρημα 9.2.8 (Sudakov)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$,*

$$\log N(K,tB_2^n)\leqslant cn\left(\frac{w(K)}{t}\right)^2, \tag{9.2.4}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα πάρουμε την ανισότητα του Sudakov από την δυϊκή της, η οποία αποδείχθηκε από τον Talagrand.

Θεώρημα 9.2.9 (Talagrand)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$,*

$$\log N(B_2^n,tK)\leqslant cn\left(\frac{w(K^\circ)}{t}\right)^2, \tag{9.2.5}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το επιχείρημα του Talagrand χρησιμοποιεί το μέτρο του Gauss γ_n.

Λήμμα 9.2.10. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $z\in\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\gamma_n(K+z)\geqslant \exp(-\|z\|_2^2/2)\gamma_n(K). \tag{9.2.6}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την συμμετρία του K βλέπουμε ότι

$$\gamma_n(K+z)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_K \exp(-\|z+x\|_2^2/2)dx \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_K \exp(-\|z-x\|_2^2/2)dx, \tag{9.2.7}$$

άρα,

$$\gamma_n(K+z)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_K \frac{\exp(-\|z+x\|_2^2/2)+\exp(-\|z-x\|_2^2/2)}{2}dx. \tag{9.2.8}$$

Από την κυρτότητα της εκθετικής συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma_n(K+z)&\geqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_K \exp(-[\|x+z\|_2^2+\|x-z\|_2^2]/4)dx\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_K \exp(-\|x\|_2^2/2-\|z\|_2^2/2)dx\\ &=\exp(-\|z\|_2^2/2)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_K \exp(-\|x\|_2^2/2)dx\\ &=\exp(-\|z\|_2^2/2)\gamma_n(K).\end{aligned} \tag{9.2.9}$$

□

Απόδειξη της δυϊκής ανισότητας Sudakov Έστω $x_1, \ldots, x_N$ σύνολο σημείων της B_2^n, μεγιστικό ως προς τον περιορισμό

$$\|x_i - x_j\|_K > t, \qquad i \neq j. \tag{9.2.10}$$

Τότε, τα σύνολα $x_i + \frac{t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda > 0$ τα σύνολα $\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά, και αφού το γ_n είναι μέτρο πιθανότητας,

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_n(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K) = \gamma_n\left(\cup_{i=1}^{N}(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K)\right) \leqslant 1. \tag{9.2.11}$$

Αφού $x_i \in B_2^n$, έχουμε $\|\lambda x_i\|_2 \leqslant \lambda$, $i = 1, \ldots, N$. Από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K) \geqslant \exp(-\lambda^2/2)\gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K) \quad , \quad i = 1, \ldots, N. \tag{9.2.12}$$

Έτσι, προκύπτει άνω φράγμα για το N: Για κάθε $\lambda > 0$,

$$N \leqslant \frac{\exp(\lambda^2/2)}{\gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K)}. \tag{9.2.13}$$

Επιλέγουμε $\lambda > 0$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) &\leqslant c\sqrt{n} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K \sigma(d\theta) \\ &= c\sqrt{n}w(K^\circ), \end{aligned} \tag{9.2.14}$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov έχουμε

$$\gamma_n(\|x\|_K \geqslant \lambda t/2) \leqslant \frac{2}{\lambda t}\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) \leqslant \frac{2c\sqrt{n}}{\lambda t}w(K^\circ), \tag{9.2.15}$$

δηλαδή,

$$1 - \gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K) \leqslant \frac{2c\sqrt{n}}{\lambda t}w(K^\circ). \tag{9.2.16}$$

Αν επιλέξουμε $\lambda = 4c\sqrt{n}w(K^\circ)/t$, έχουμε

$$\gamma_n\left(2c\sqrt{n}w(K^\circ)K\right) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{9.2.17}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$N \leqslant 2\exp\left(8c^2nw^2(K^\circ)/t^2\right). \tag{9.2.18}$$

Άρα,

$$\log N(B_2^n, tK) \leqslant \log \overline{N}(B_2^n, tK) \leqslant \log N \leqslant 8c^2 n \left(\frac{w(K^\circ)}{t}\right)^2. \tag{9.2.19}$$

□

Μια ισοδύναμη διατύπωση της δυϊκής ανισότητας Sudakov είναι η εξής:

$$\sup_{t>0} t\left(\log \overline{N}(B_2^n, tK)\right)^{1/2} \leqslant c\sqrt{n}w(K^\circ). \tag{9.2.20}$$

Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για το K°, παίρνουμε

$$A := \sup_{t>0} t\left(\log \overline{N}(B_2^n, tK^\circ)\right)^{1/2} \leqslant c\sqrt{n}w(K). \tag{9.2.21}$$

Η Tomczak-Jaegermann παρατήρησε ότι οι αριθμοί κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ και $N(B_2^n, tK^\circ)$ είναι ισοδύναμοι, με την εξής έννοια.

Θεώρημα 9.2.11. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν*

$$B = \sup_{t>0} t\left(\log N(K, tB_2^n)\right)^{1/2}, \tag{9.2.22}$$

τότε $B \leqslant 10A$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$2K \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ) \subseteq tB_2^n. \tag{9.2.23}$$

Πράγματι, αν $x \in 2K$ και $x \in (t^2/2)K^\circ$, τότε

$$|x|^2 = \langle x, x\rangle \leqslant \|x\|_K \|x\|_{K^\circ} \leqslant 2\frac{t^2}{2} = t^2. \tag{9.2.24}$$

Έπεται ότι

$$\overline{N}(K, tB_2^n) \leqslant \overline{N}(K, (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ)). \tag{9.2.25}$$

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι

$$\overline{N}(K, (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ)) = \overline{N}(K, \frac{t^2}{2}K^\circ). \tag{9.2.26}$$

Πράγματι, αν $x_1, \ldots, x_N \in K$ και $K \subseteq \cup_{i \leqslant N}(x_i + \frac{t^2}{2}K^\circ)$, τότε για κάθε $y \in K$ υπάρχει $i \leqslant N$ ώστε $y - x_i \in \frac{t^2}{2}K^\circ$, και λόγω της $y - x_i \in 2K$ έχουμε $y \in (x_i + (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ))$, δηλαδή

$$K \subseteq \cup_{i=1}^N (x_i + (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ)). \tag{9.2.27}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τις βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης, γράφουμε

$$\begin{aligned} N(K,tB_2^n) &\leqslant \overline{N}(K,tB_2^n) \leqslant \overline{N}(K,\frac{t^2}{2}K^\circ) \\ &\leqslant N(K,\frac{t^2}{4}K^\circ) \leqslant N(K,2tB_2^n)N(B_2^n,\frac{t}{8}K^\circ). \end{aligned} \tag{9.2.28}$$

Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι

$$\begin{aligned} t^2\log N(K,tB_2^n) &\leqslant \frac{1}{4}(2t)^2\log N(K,2tB_2^n) + 64(t/8)^2\log N(B_2^n,\frac{t}{8}K^\circ) \\ &\leqslant \frac{1}{4}(2t)^2\log N(K,2tB_2^n) + 64A^2, \end{aligned} \tag{9.2.29}$$

και παίρνοντας το sup πάνω από όλα τα $t>0$ καταλήγουμε στην $3B^2 \leqslant 256A^2$. □

Απόδειξη της ανισότητας του Sudakov. Από την δυϊκή ανισότητα Sudakov και την προηγούμενη παρατήρηση, για κάθε $t>0$ έχουμε

$$t^2\log N(K,tB_2^n) \leqslant 100A^2 \leqslant cnw^2(K), \tag{9.2.30}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Η ανισότητα Sudakov ισχύει και για μη συμμετρικά κυρτά σώματα.

Πρόταση 9.2.12. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$,*

$$t^2\log N(K,tB_2^n) \leqslant cnw^2(K), \tag{9.2.31}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K-K$ του K. Τότε,

$$\begin{aligned} w(K-K) &= 2\int_{S^{n-1}} h_{K-K}(u)\sigma(du) \\ &= 2\int_{S^{n-1}} [h_K(u)+h_{-K}(u)]\sigma(du) \\ &= 2\int_{S^{n-1}} [h_K(u)+h_K(-u)]\sigma(du) \\ &= 2w(K). \end{aligned} \tag{9.2.32}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι υπάρχει μεταφορά του K η οποία περιέχεται στο $K-K$ και την ανισότητα Sudakov για το $K-K$, παίρνουμε

$$t^2\log N(K,tB_2^n) \leqslant t^2\log N(K-K,tB_2^n) \leqslant cnw^2(K-K) = 4cnw^2(K). \tag{9.2.33}$$

□

9.3 Άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε το άνω φράγμα του Bourgain για την ισοτροπική σταθερά. Ξεκινάμε με τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη.

Μέση τιμή του maximum γραμμικών συναρτησοειδών σε κυρτά σώματα

Θεωρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Από την Πρόταση 9.1.7 γνωρίζουμε ότι ικανοποιείται η ψ_1-εκτίμηση

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant b\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \leqslant bL_K \tag{9.3.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $b > 0$ απόλυτη σταθερά.

Πρόταση 9.3.1. *Αν $\theta_1, \ldots, \theta_N \in S^{n-1}$, τότε*

$$\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle|\, dx \leqslant CbL_K(\log N), \tag{9.3.2}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Για κάθε $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle| \geqslant t\right) &\leqslant \sum_{i=1}^N \mathrm{Prob}\left(x\in K : |\langle x,\theta_i\rangle| \geqslant t\right)\\ &\leqslant 2N\exp\left(-(t/bL_K)^{\alpha}\right).\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

Συνεπώς, για κάθε $A > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle| dx &= \int_0^\infty \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle| \geqslant t\right) dt\\ &\leqslant A + \int_A^\infty \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle| \geqslant t\right) dt\\ &\leqslant A + 2N\int_A^\infty \exp\left(-t/bL_K\right) dt.\end{aligned} \tag{9.3.4}$$

Επιλέγοντας $A = 4bL_K(\log N)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_A^\infty \exp\left(-t/bL_K\right) dt &= 4bL_K(\log N)\int_1^\infty \exp(-4s\log N)ds\\ &\leqslant 4bL_K(\log N)\exp(-2\log N)\int_1^\infty e^{-s}ds\\ &\leqslant 4bL_K(\log N)N^{-2},\end{aligned} \tag{9.3.5}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\exp(-4s\log N) \leqslant \exp(-2\log N)\cdot e^{-s} \tag{9.3.6}$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Έπεται ότι

$$\int_K \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\langle x,\theta_i\rangle| dx \leqslant CbL_K(\log N), \tag{9.3.7}$$

με $C = 12$. □

Διάσπαση Dudley-Fernique

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $0 \in K$ και γράφουμε R για την περιγεγραμμένη ακτίνα του K. Δηλαδή, $R = \max\{\|x\|_2 : x \in K\}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο N_j του K ώστε

$$|N_j| = N(K,(R/2^j)B_2^n), \tag{9.3.8}$$

και

$$K \subseteq \bigcup_{y\in N_j} (y + (R/2^j)B_2^n). \tag{9.3.9}$$

Από την ανισότητα του Sudakov έχουμε

$$\log|N_j| \leqslant cn\left(\frac{2^j w(K)}{R}\right)^2. \tag{9.3.10}$$

Ορίζουμε $N_0 = \{0\}$ και

$$W_j = N_j - N_{j-1} = \{y - y' \mid y \in N_j, y' \in N_{j-1}\} \tag{9.3.11}$$

για κάθε $j \geqslant 1$.

Λήμμα 9.3.2. *Για κάθε $x \in K$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in W_j \cap (3R/2^j)B_2^n$, $j = 1,\dots,m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ ώστε*

$$x = z_1 + \cdots + z_m + w_m. \tag{9.3.12}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in K$. Από τον ορισμό του N_j, μπορούμε να βρούμε $y_j \in N_j$, $j = 1,\dots,m$, ώστε

$$\|x - y_j\|_2 \leqslant \frac{R}{2^j}. \tag{9.3.13}$$

Γράφουμε

$$x = 0 + (y_1 - 0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_m - y_{m-1}) + (x - y_m). \tag{9.3.14}$$

Θέτουμε $y_0 = 0$ και $w_m = x - y_m$, $z_j = y_j - y_{j-1}$ για $j = 1, \ldots, m$. Τότε, $\|w_m\|_2 = \|x - y_m\|_2 \leqslant R/2^m$, και $z_j \in N_j - N_{j-1} = W_j$. Επίσης,

$$\|z_j\|_2 \leqslant \|x - y_j\|_2 + \|x - y_{j-1}\|_2 \leqslant \frac{R}{2^j} + \frac{R}{2^{j-1}} = \frac{3R}{2^j}. \tag{9.3.15}$$

Τέλος, $x = z_1 + \cdots + z_m + w_m$. □

Θέτουμε $Z_j = W_j \cap (3R/2^j)B_2^n$. Τότε, παίρνοντας υπ' όψιν μας την (9.3.10), μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής.

Θεώρημα 9.3.3. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $0 \in K$ και περιγεγραμμένη ακτίνα R. Υπάρχουν $Z_j \subseteq (3R/2^j)B_2^n$, $j \in \mathbb{N}$, ώστε*

$$\log |Z_j| \leqslant cn \left(\frac{2^j w(K)}{R} \right)^2, \tag{9.3.16}$$

με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in K$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in Z_j$, $j = 1, \ldots, m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ ώστε $x = z_1 + \cdots + z_m + w_m$. □

Απόδειξη του άνω φράγματος

Θεώρημα 9.3.4. *Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n, \tag{9.3.17}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα δεχτούμε και θα χρησιμοποιήσουμε ένα βασικό θεώρημα του Pisier: υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος $T \in SL(n)$ ώστε

$$w(TK) \leqslant c\sqrt{n}\log n. \tag{9.3.18}$$

Γράφουμε

$$nL_K^2 = \int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 = \int_K \langle x, Tx\rangle dx. \tag{9.3.19}$$

Συνεπώς,

$$nL_K^2 \leqslant \int_K \max_{y \in TK} |\langle y, x\rangle| dx. \tag{9.3.20}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 9.3.3 για το TK. Αν R είναι η περιγεγραμμένη ακτίνα του TK, για κάθε $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $Z_j \subset (3R/2^j)B_2^n$ ώστε

$$\log |Z_j| \leqslant cn \left(\frac{w(TK)2^j}{R}\right)^2, \tag{9.3.21}$$

και κάθε $y \in TK$ να γράφεται στην μορφή $y = z_1 + \cdots + z_m + w_m$, όπου $z_j \in Z_j$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \max_{y \in TK} |\langle y, x\rangle| &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \max_{z \in Z_j} |\langle z, x\rangle| + \max_{w \in (R/2^m)B_2^n} |\langle w, x\rangle| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{3R}{2^j} \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| + \frac{R}{2^m}\|x\|_2, \end{aligned} \tag{9.3.22}$$

όπου $\overline{z}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του z. Δεδομένου ότι $\int_K \|x\|_2 dx \leqslant \sqrt{n}L_K$, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} nL_K^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| dx + \frac{R}{2^m} \int_K |x| dx \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| dx + \frac{R}{2^m}\sqrt{n}L_K. \end{aligned} \tag{9.3.23}$$

Από την Πρόταση 9.3.1 παίρνουμε

$$nL_K^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{3R}{2^j} c'' nL_K \left(\frac{w(TK)2^j}{R}\right)^2 + \frac{R}{2^m}\sqrt{n}L_K. \tag{9.3.24}$$

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος φράσσεται από

$$cL_K nw^2(TK)\frac{2^m}{R}. \tag{9.3.25}$$

Λύνοντας την εξίσωση

$$\frac{nw^2(TK)2^m}{R} = \frac{R\sqrt{n}}{2^m} \tag{9.3.26}$$

βλέπουμε ότι η βέλτιστη τιμή του m ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{R}{2^m} = \sqrt[4]{n}w(TK). \tag{9.3.27}$$

Επιστρέφοντας στην (), παίρνουμε

$$nL_K^2 \leqslant c_2\sqrt{n}\sqrt[4]{n}w(TK)L_K. \tag{9.3.28}$$

Αφού $w(TK) \leqslant c_3\sqrt{n}\log n$, έχουμε το συμπέρασμα. □