ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αλγοριθμικες Τεχνικες Στις Μαρκοβιανες Αλυσιδες

Μεθοδοι Πιθανογεννητριων Και Εφαρμογες

Διπλωματικη Εργασια Ειδικευσης στη Στατιστικη Και Επιχειρησιακη Ερευνα

ΣΠΥΡΙΔΟΥΛΑ ΚΑΝΤΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ,
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη
Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα
που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστήμιου Αθηνών

Εγκρίθηκε στις .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
Μπουρνέτας Απόστολος	Αναπληρωτής Καθηγητής	....
Οικονόμου Αντώνης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής	....
Φακίνος Δημήτριος	Αναπληρωτής Καθηγητής	....

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Οικονόμου για την πολύτιμη καθοδήγηση και στήριξη σε όλη τη διάρκεια τόσο της εκπόνησης της παρούσας εργασίας όσο και των σπουδών μου μέχρι σήμερα.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αναπληρωτές καθηγητές κύριο Δ. Φακίνο και Α. Μπουρνέτα για τη βοήθειά τους και την τιμή που μου έκαναν συμμετέχοντας στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Στη μητέρα μου

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **8**

1.1 Ιστορική Αναδρομή . . . 8

1.2 Βασικές έννοιες Μαρκοβιανών αλυσίδων . . . 11

1.3 Δομή της εργασίας . . . 23

2 Βασική Θεωρία **30**

2.1 Τυπική Θεωρία γεννητριών . . . 30

2.2 Αναλυτική Θεωρία γεννητριών . . . 42

2.3 Θεωρία Πιθανογεννητριών . . . 45

3 Αλγεβρικές Τεχνικές **49**

3.1 Ανάλυση σε απλά κλάσματα . . . 49

3.1.1 Εφαρμογή: Πρόβλημα Συλλογής Κουπονιών . . . 51

3.1.2 Εφαρμογή: Οι $M/E_s/1$ και $M^c/M/1$ Ουρές . . . 53

3.2 Επίλυση εξισώσεων διαφορών . . . 58

3.2.1 Λύσεις ειδικών εξισώσεων διαφορών k τάξης . . . 65

3.2.2 Εφαρμογές . . . 68

3.3 Αναδρομικές σχέσεις . . . 71

3.3.1 Εφαρμογές . . . 72

3.3.2 Αναδρομικό σχήμα του Adelson . . . 74

4 Αναλυτικές Τεχνικές **76**

4.1 Θεώρημα Rouché και εφαρμογές . . . 76

4.2 Ένα ασυμπτωτικό αποτέλεσμα . . . 85

4.3 Άθροισμα όρων ακολουθίας σε αριθμητική πρόοδο δεικτών 93

5 Εφαρμογές **96**

5.1 Η $M/M/1$ ουρά με χρόνο εκκίνησης του υπηρέτη - Λύση με πιθανογεννήτριες . 96

5.2 Η $M/M/1$ ουρά με χρόνο εκκίνησης του υπηρέτη - Λύση με εξισώσεις διαφορών 101

Βιβλιογραφία **105**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την ανάλυση τυχαίων φαινομένων. Η έκβαση ενός τυχαίου γεγονότος δεν μπορεί να καθοριστεί πριν αυτό συμβεί, αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις δυνατές εκβάσεις.

Αν και μερικές ιδέες πιθανοτήτων εμφανίζονται από πολύ παλιά, η συστηματική ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων ξεκίνησε μόλις τον 16^o με 17^o αιώνα. Η διαφωνία μεταξύ δύο τζογαδόρων γύρω στο 1654 οδήγησε στη δημιουργία της μαθηματικής θεωρίας πιθανοτήτων από δύο μεγάλους Γάλλους μαθηματικούς, τον Blaise Pascal(1623-1662) και τον Pierre de Fermat(1601-1665). Το πρόβλημα ήταν το εξής: Δύο ζάρια ρίπτονται ταυτόχρονα 24 φορές. Το ερώτημα ήταν να αποφασισθεί αν έπρεπε να στοιχηματίσουν στο ενδεχόμενο να εμφανιστεί τουλάχιστον μια φορά στις 24 ρίψεις 'εξάρες' ή όχι. Ένας φαινομενικά αποδοτικός κανόνας στοιχήματος έκανε τον Chavalie de Meré να πιστεύει ότι το να στοιχηματίσει θα είναι κερδοφόρο, αλλά ήταν ο ίδιος που με τους υπολογισμούς του απέδειξε το αντίθετο.

Σύντομα εξαιτίας του ενδιαφέροντος των παιχνιδιών τύχης, η Θεωρία Πιθανοτήτων έγινε δημοφιλής. Έτσι κατά τη διάρκεια του $18^{ου}$ αιώνα σημαντική ήταν η συνεισφορά του Jacob Bernoulli(1654-1705) και του Abraham de Moivre(1667-1754). (O Bernoulli ήταν το πιο διάσημο μέλος μιας διακεκριμένης οικογένειας Ελβετών μαθηματικών ενώ ο de Moivre γάλλος προτεστάντης ο οποίος διέφυγε στην Αγγλία για να αποφύγει το διωγμό.)

Διαρκώς επιταχυνόμενη ήταν η εξέλιξη των πιθανοτήτων τον 19^o αιώνα οπότε αναδείχθηκαν σπουδαίοι μαθηματικοί όπως ο Lvovich Chebishev και ο Pierre de Laplace(1749-1827). Ο τελευταίος στο βιβλίο του 'Αναλυτική Θεωρία Πιθανοτήτων'(1812) εισήγαγε μια σωρεία νέων ιδεών και μαθηματικών τεχνικών. Πριν τον Laplace, η θεωρία πιθανοτήτων είχε ως αντικείμενο τη μαθηματική ανάλυση των παιχνιδιών τύχης. Ο Laplace εφάρμοσε πιθανοθεωρητικές ιδέες σε απλά επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Η Θεωρία Σφαλμάτων,τα Αναλογιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική είναι μερικά μόνο παραδείγματα σημαντικών εφαρμογών που αναπτύχθηκαν το 19^o αιώνα. Το πρόβλημα της αξιωματικής θεμελίωσης της Θεωρίας Πιθανοτήτων λύθηκε μόλις τον 20^o αιώνα από τον Ρώσο μαθηματικό Andrei Nikolaevich Kolmogorov(1903-1987).

Τα άπειρα αθροίσματα κέντριζαν το ενδιαφέρον των μαθηματικών από την αρχαιότητα. Το ερώτημα πώς ένα άπειρο άθροισμα θετικών όρων μπορεί να δώσει πεπερασμένο αποτέλεσμα ήταν ένα βαθύ φιλοσοφικό ερώτημα και ταυτόχρονα αποτελούσε ένα σημαντικό κενό στην κατανόηση του απείρου. Η συστηματική μελέτη των άπειρων αθροισμάτων (σειρών) ξεκινάει από τον Gauss. Ο Euler είχε ήδη θεωρήσει την υπεργεωμετρική σειρά $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x \ + \ \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$, πάνω στην οποία ο Gauss δημοσίευσε την πραγματεία του το 1812. Σε αυτή αναπτύσσει απλούστερα κριτήρια σύγκλισης και θέτει ζητήματα υπολοίπων και ακτίνας σύγκλισης. Ο Cauchy το 1821 μελετώντας θέματα σύγκλισης απέδειξε ότι το γινόμενο δύο συγκλινουσών σειρών δεν είναι κατ' ανάγκη συγκλίνουσα. Οι όροι 'σύγκλιση' και 'απόκλιση' είχαν εισαχθεί πολύ νωρίτερα, το 1668, από τον Gregory. Οι Euler και Gauss έδωσαν διαφορετικά κριτήρια σύγκλισης ενώ ο Maclaurin είχε προηγηθεί κάποιων ανακαλύψεων του Cauchy. Ο Cauchy προήγαγε τη θεωρία των δυναμοσειρών επιτυγχάνοντας την ανάλυση μιας ολόμορφης συνάρτησης σε αυτή τη μορφή. Ο Abel διόρθωσε κάποια από τα συμπεράσματα του Cauchy και έδειξε την ανάγκη να ληφθούν υπόψη θέματα συνέχειας σε ερωτήματα σύγκλισης. Ο Raabe(1832), ο DeMorgan(1842), ο Stokes(1847) είναι μερικοί μόνο που ασχολήθηκαν με το αντικείμενο αυτό.

Ιστορικά, μαθηματικοί όπως ο Leonard Euler, χειρίζονταν ελεύθερα τις άπειρες σειρές, ακόμα κι αν δεν συνέκλιναν. Με την ανάπτυξη της ανάλυσης το 19^o αιώνα αυστηρές αποδείξεις της σύγκλισης σειρών ήταν απαραίτητες. Παρόλα αυτά η τυπική χρησιμοποίηση μη συγκλινουσών σειρών επιτρέπεται στα πλαίσια του δακτυλίου των τυπικών δυναμοσειρών. Οι τυπικές δυναμοσειρές χρησιμοποιούνται στη Συνδυαστική για να περιγραφούν και να μελετηθούν ακολουθίες που διαφορετικά απαιτούν δύσκολους χειρισμούς. Αυτή είναι η μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων.

Ο Laplace ήταν αυτός που εισήγαγε τις γεννήτριες συναρτήσεις στο βιβλίο του 'Αναλυτική

Θεωρία των Πιθανοτήτων' και οι οποίες αποτελούν ένα σημαντικό μέσο για την αντιμετώπιση προβλημάτων Συνδυαστικής, Θεωρίας Πιθανοτήτων και πιο σύγχρονα της μελέτης των Μαρκοβιανών αλυσίδων και Στοχαστικών Μοντέλων. Σύμφωνα με τον H.S.Wilf "Μια γεννήτρια είναι ένα σκοινί στο οποίο κρεμάμε μια ακολουθία αριθμών για να τη βλέπουμε."(Generatingfunctionology, 1994). Στη Θεωρία Πιθανοτήτων και των Μαρκοβιανών αλυσίδων, το σκοινί είναι υφασμένο από αναλυτικό νήμα, τις σειρές Maclaurin.

Σημαντική είναι η χρήση των γεννητριών συναρτήσεων ακολουθιών που αποτελούν συναρτήσεις πιθανότητας. Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται πιθανογεννήτριες. Ο ρόλος τους είναι καθοριστικός στη μελέτη στοχαστικών μοντέλων και πιο συγκεκριμένα στη Θεωρία Ουρών και αποτελούν το βασικό αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Ο Agner Krarup Erlang έκανε την πρώτη του παρουσίαση στη θεωρία Ουρών το 1909. Η πρώτη εμφάνιση του όρου 'σύστημα εξυπηρέτησης' (queueing system) ήταν το 1951 στο περιοδικό 'Journal of the Royal Statistical Society' από τον David Kendal, ο οποίος εισήγαγε και τον συμβολισμό A/B/C των ουρών. Ο Kolmogorov και ο Alexander Khinchin (1894-1959) λίγο παλαιότερα, αλλά και σύγχρονοι μαθηματικοί όπως ο Marcel Neuts, έχουν συνεισφέρει στην ανάπτυξη της Θεωρίας Ουρών.

Στα πρώτα βήματα των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων οι ερευνητές δεν έδιναν ιδιαίτερο βάρος σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Κι αυτό ήταν αλήθεια και για τη Θεωρία Ουρών. Η ανάλυση ενός μοντέλου εθεωρείτο ολοκληρωμένη αν για την υπό μελέτη τυχαία μεταβλητή, όπως το μήκος της ουράς ή ο χρόνος αναμονής, γνωρίζουμε την γεννήτρια συνάρτηση ή το μετασχηματισμό Laplace. Με δεδομένες τεχνικές αντιστροφής των μετασχηματισμών αυτών προκύπτει η λύση στο πρόβλημα. Σύγχρονοι ερευνητές έδωσαν μεγαλύτερη βαρύτητα στις 'υπολογιστικές πιθανότητες' εισάγωντας αριθμητικές μεθόδους για την αντιστροφή των μετασχηματισμών και των υπολογισμό των αντίστοιχων κατανομών, γεγονός που έδωσε νέα πνοή ζωής στις γεννήτριες συναρτήσεις. Σημαντική είναι η προσφορά προς την κατεύθυνση αυτή σημαντικών σύγχρονων μαθηματικών όπως ο Joseph Abate, ο David Lucantoni, ο Ward Whitt κ.ά.

1.2 Βασικές έννοιες Μαρκοβιανών αλυσίδων

Κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t),\ t \in T\}$, ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) ονομάζεται στοχαστική διαδικασία(σ.δ.). Η παράμετρος t αναφέρεται ως χρόνος. Αν ο παραμετρικός χώρος T είναι αριθμήσιμο σύνολο (συνήθως το $\mathbb{N}_0$), η σ.δ. αναφέρεται ως διακριτού χρόνου και συμβολίζεται με $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Αν ο T είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, (συνήθως το $\mathbb{R}_0^+$), αυτή αναφέρεται ως συνεχούς χρόνου και συμβολίζεται με $\{X(t),\ t \geq 0\}$. Κάθε δυνατή τιμή των τ.μ. $X(t)$ λέγεται κατάσταση της διαδικασίας. Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων αναφέρεται ως χώρος καταστάσεων της σ.δ. και θα τον συμβολίζουμε με S.

Ορισμός 1. *Μια σ.δ. λέγεται Μαρκοβιανή διαδικασία αν, δεδομένης της παρούσας κατάστασης, η μελλοντική εξέλιξη της διαδικασίας είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν της. Πιο συγκεκριμένα, η σ.δ. $\{X(t),\ t \in T\}$ είναι Μαρκοβιανή αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$P(X(t_n) = j_n | X(t_{n-1}) = j_{n-1}, \ldots, X(t_1) = j_1) = P(X(t_n) = j_n | X(t_{n-1}) = j_{n-1})$$

για κάθε $t_1 < \ldots < t_n \in T$ και $j_1, \ldots, j_n \in S$.

Η πιθανότητα $P(X(t_n) = j_n)$ δηλώνει την πιθανότητα η σ.δ. τη χρονική στιγμή t_n να βρίσκεται στην κατάσταση j_n.

'Οταν ο χώρος καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι διακριτός τότε αυτή αναφέρεται ως Μαρκοβιανή αλυσίδα.

a. **Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου(Μ.α.δ.χ.)**

Ορισμός 2. *Η σ.δ. $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ με χ.κ. S καλείται Μ.α.δ.χ. αν για κάθε $n = 0, 1, \ldots$*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_0 = j_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

για κάθε $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S,\ n \geq 0$.

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ καλείται πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο $(n+1)$-οστό βήμα και συμβολίζεται με

$p_{ij}(n+1)$. Όταν οι πιθανότητες αυτές είναι ανεξάρτητες του n για κάθε $n=0,1,\ldots$ τότε η $\{X_n\}$ λέγεται χρονικά ομογενής και

$$p_{ij} = P(X_{n+1}=j|X_n=i) = P(X_1=j|X_0=i).$$

Σε τέτοιες αλυσίδες θα αναφερόμαστε στο εξής. Εφόσον οι πιθανότητες είναι μη αρνητικές και η διαδικασία πρέπει να κάνει μια μετάβαση σε κάποια κατάσταση, έχουμε ότι:

$$p_{ij} \geq 0,\ i,j \in S \quad \text{και} \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1,\ i \in S.$$

Οι πιθανότητες μετάβασης συνοψίζονται σε έναν πίνακα

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ο οποίος λέγεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης και είναι στοχαστικός πίνακας, δηλαδή είναι μη-αρνητικός και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του είναι ίσο με τη μονάδα, αφού όπως αναφέραμε $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1,\ i \in S$. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n,\ n=0,1,\ldots\}$ καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση πιθανότητας της αρχικής κατάστασης X_0, $p_i^{(0)} = P(X_0=i)$, $(i \in S)$ και τις πιθανότητες p_{ij}, δηλαδή τον πίνακα $\mathbb{P}$. Με $p_{ij}^{(m)}$ θα συμβολίζουμε την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε ακριβώς m βήματα και με $\mathbb{P}^{(m)}$ τον αντίστοιχο πίνακα. Λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση:

$$\mathbb{P}^{(m)} = \mathbb{P}^{(m-1)}\mathbb{P} = \cdots = \mathbb{P}^m.$$

Αναλυτικά ισχύουν οι εξισώσεις:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad i,j \in S.$$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως εξίσωση Chapman-Kolmogorov και εκφράζει το προφανές γεγονός ότι η πιθανότητα να μεταβεί η Μ.α. ξεκινώντας από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε $m+n$ βήματα, υπολογίζεται από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας δεσμεύοντας στην κατάσταση k στο m-οστό βήμα (οπότε από εκεί θα μεταβεί στην κατάταση j μετά από n επιπλέον βήματα).

Έστω

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j) = P(X_n = j | X_0 \sim p_i^{(0)}), \quad j \in S$$

η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. X_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Το διάνυσμα $\mathbf{p}^{(n)} = (p_j^n, \ j \in S)$ θεωρούμενο ως συνάρτηση του n, αναφέρεται ως μεταβατική κατανομή της Μ.α.

Προφανώς

$$p_j^{(n+1)} = \sum_i p_i^{(n)} p_{ij}$$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} \mathbb{P}.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{p} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(n)} = (p_j, \ j \in S)$ αναφέρεται ως οριακή κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας (όταν υπάρχει).

- **Χρόνοι εισόδου, Πιθανότητες πρώτης εισόδου και ανάλυση πρώτου βήματος**

Έστω A ένα σύνολο καταστάσεων, $A \subseteq S$. Θα συμβολίζουμε με H_A το χρόνο πρώτης εισόδου της διαδικασίας σε κάποια κατάσταση του συνόλου A, δηλ.

$$H_A = \inf\{n \geq 0 \ : \ X_n \in A\}.$$

Επιπλέον με h_i^A θα συμβολίζουμε την πιθανότητα εισόδου της Μ.α. στο A δεδομένου ότι αυτή ξεκινάει από την κατάσταση i, δηλ.

$$h_i^A = P(H_A < \infty \mid X_0 = i), \ i \in S$$

και k_i^A το μέσο χρόνο στον οποίο συμβαίνει αυτό, δηλ.

$$k_i^A = E[H_A \mid X_0 = i], \ i \in S.$$

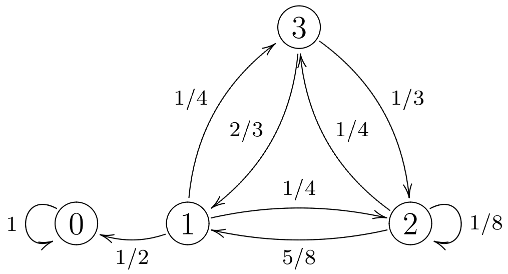
Θεώρημα 1. *Οι πιθανότητες h_i^A υπολογίζονται ως η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του συστήματος:*

$$\begin{aligned} h_i^A &= 1, \quad i \in A \\ h_i^A &= \sum_{j\in S} p_{ij} h_j^A, \quad i \in A^c. \end{aligned}$$

<u>Θεώρημα</u> 2. *Οι μέσοι χρόνοι* k_i^A *υπολογίζονται ως η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του συστήματος:*

$$\begin{aligned} k_i^A &= 0, \;\; i \in A \\ k_i^A &= 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} k_j^A, \;\; i \in A^c. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται εξισώσεις ανάλυσης πρώτου βήματος για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων πρώτης εισόδου και των αντίστοιχων μέσων χρόνων.
Παράδειγμα: Έστω Μ.α.δ.χ. με διάγραμμα το εξής:



και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 5/8 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Έστω α_i η πιθανότητα εισόδου στην κατάσταση 3 ξεκινώντας από την κατάσταση i. Τότε εφαρμόζοντας την ανάλυση πρώτου βήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$a_3 = 1 \;\text{ και} \qquad a_i = \textstyle\sum_k p_{ik} a_k \;\; {}_{,i \neq 3}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} a_3 &= 1 \\ \alpha_0 &= \alpha_0 \\ a_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \tfrac{1}{4}\alpha_2 + \tfrac{1}{4}\alpha_3 \\ a_2 &= \tfrac{5}{8}\alpha_1 + \tfrac{1}{8}\alpha_2 + \tfrac{1}{4}\alpha_3. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας την ελάχιστη λύση του τελευταίου συστήματος προκύπτει ότι $\alpha_0 = 0,\; \alpha_1 = 9/23, \alpha_2 = 13/23,\; \alpha_3 = 1$.

Μια τροποποίηση των παραπάνω εξισώσεων γίνεται στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες β_i επίσκεψης στην κατάσταση 0 πριν από κάποια κατάσταση N, ξεκινώντας από την κατάσταση i. Αυτές προκύπτουν ως η ελάχιστη λύση του συστήματος:

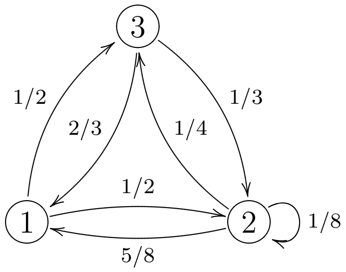
$$\beta_0 = 1, \quad \beta_N = 0$$
$$\beta_i = \sum_{j \in S} p_{ij}\beta_j, \quad i \neq 0, N.$$

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα, αν β_i είναι η πιθανότητα επίσκεψης στην κατάσταση 0 πριν την κατάσταση 3 ξεκινώντας από την κατάσταση i, τότε οι β_i υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{l} \beta_0 = 1, \quad \beta_3 = 0 \ \text{ και} \\ \beta_i = \sum_k p_{ik}\beta_k \ , i = 1, 2 \end{array} \qquad \text{δηλαδή} \qquad \begin{array}{l} \beta_0 = 1, \quad \beta_3 = 0 \\ \beta_1 = \frac{1}{2}\beta_0 + \frac{1}{4}\beta_2 + \frac{1}{4}\beta_3 \\ \beta_2 = \frac{5}{8}\beta_1 + \frac{1}{8}\beta_2 + \frac{1}{4}\beta_3. \end{array}$$

Με λύση του παραπάνω συστήματος παίρνουμε $\beta_0 = 1, \ \beta_1 = 14/23, \beta_2 = 10/23, \ \beta_3 = 0$.

Ας κάνουμε τώρα μια μικρή τροποποίηση στο παράδειγμά μας και να θεωρήσουμε τη Μ.α.δ.χ. με διάγραμμα



και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 5/8 & 1/8 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Αν τ_i είναι ο μέσος χρόνος επίσκεψης στην κατάσταση 2 ξεκινώντας από την κατάσταση i, τότε από τις εξισώσεις ανάλυσης πρώτου βήματος οι χρόνοι αυτοί υπολογίζονται με λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{l} \tau_2 = 0 \ \text{ και} \\ \tau_i = 1 + \sum_k p_{ik}\tau_k \ \ _{,i\neq 2} \end{array} \qquad \text{δηλαδή} \qquad \begin{array}{l} \tau_2 = 0 \\ \tau_1 = 1 + \frac{1}{2}\tau_2 + \frac{1}{2}\tau_3 \\ \tau_3 = 1 + \frac{2}{3}\tau_1 + \frac{1}{3}\tau_2 \end{array}$$

από το οποίο προκύπτει $\tau_1 = 9/4, \ \tau_2 = 0, \ \tau_3 = 5/2$.

Γενικά παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες ή οι χρόνοι επίσκεψης προκύπτουν με επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Αν ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος τότε το σύστημα μπορεί να επιλυθεί ακριβώς. Αν αυτός είναι άπειρος και ο $\mathbb{P}$ έχει κάποια δομή (p_{ij} ίδιες ή παρόμοιες για κάθε i) τότε είναι δυνατόν να προκύψουν συστήματα εξισώσεων διαφορών τα οποία μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Διαφορετικά απαιτούνται προσεγγιστικές ή επαναληπτικές μέθοδοι.

- **Κατάταξη καταστάσεων**

  Έστω
$$M_{ij} = \min\{n \in \mathbb{N} \;: X_n = j \mid X_0 = i\}$$
ο χρόνος (αριθμός βημάτων) που απαιτείται για να μεταβεί η Μ.α. στην κατάσταση j για πρώτη φορά δεδομένου ότι ξεκινάει από την κατάσταση i, δηλαδή ο χρόνος πρώτης επίσκεψης στη j όταν $X_0 = i$. Ορίζουμε $M_{ij} = \infty$ αν η μετάβαση από την i στη j δε γίνει ποτέ. Επιπλέον η πιθανότητα
$$f_{ij}^{(n)} = P(M_{ij} = n) = P(X_n = j,\; X_k \neq j,\; k = 1, 2, \ldots, n-1 \mid X_0 = i)$$
λέγεται πιθανότητα πρώτης επίσκεψης της Μ.α. στην κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i σε n βήματα. Αν $i = j$, τότε $f_j = f_{jj}$ είναι η πιθανότητα επανόδου στη j και $\mu_j = E[M_{jj}]$ ο μέσος χρόνος επανόδου στη j.

Ορισμός 3. *Αν $f_j < 1$ τότε η κατάσταση j λέγεται μεταβατική.*
Αν $f_j = 1$ τότε η κατάσταση j λέγεται επαναληπτική και θα αναφέρεται ως θετικά επαναληπτική αν επιπλέον $\mu_j < \infty$ και μηδενικά επαναληπτική αν $\mu_j = \infty$.

Ορισμός 4. *Η κατάσταση j λέμε ότι έχει περίοδο d_j αν $p_{jj}^{(n)} = 0$, εκτός αν $n = d, 2d, 3d, \ldots$ και d είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο συμβαίνει αυτό ή ισοδύναμα*
$d_j = MK\Delta\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}$.
Μια κατάσταση j με περίοδο 1 λέγεται απεριοδική διαφορετικά λέγεται περιοδική με περίοδο $d_j > 1$.
Αν η j είναι απεριοδική και θετικά επαναληπτική τότε αυτή λέγεται εργοδική.

Ορισμός 5. *Λέμε ότι η j είναι προσιτή από την i και συμβολίζουμε $i \to j$ αν $p_{ij}^{(n)} > 0$ για κάποιο $n \geq 0$.*
Αν $i \to j$ και $j \to i$ τότε λέμε ότι οι i και j επικοινωνούν και συμβολίζουμε $i \leftrightarrow j$.

Η επικοινωνία των καταστάσεων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα 3. *Αν οι i και j επικοινωνούν τότε αυτές είναι του ίδιου τύπου ως προς την επαναληπτικότητα και την περιοδικότητα.*

Έτσι αν π.χ. η i είναι θετικά επαναληπτική και $i \leftrightarrow j$ τότε και η j είναι θετικά επαναληπτική. Άμεσα λοιπόν προκύπτει ότι αν $i \leftrightarrow j$ τότε $f_{ij} = 1$.
Δύο καταστάσεις που επικοινωνούν θα λέμε ότι ανήκουν στην ίδια κλάση. Επιπλέον, εφόσον η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας, δύο κλάσεις ή θα είναι ξένες ή θα ταυτίζονται. Θα λέμε ότι η Μ.α. είναι αδιαχώριστη αν υπάρχει μόνο μια κλάση, δηλαδή αν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν.

- **Στάσιμη κατανομή Μ.α.δ.χ.**

Ορισμός 6. *Η $(\pi_j,\ j = 0, 1, \ldots)$ λέγεται στάσιμη κατανομή της Μ.α. με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P} = (p_{ij})$ αν*

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad j \in S \quad \textit{και} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

ή υπό μορφή πινάκων η $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{P} = \boldsymbol{\pi} \qquad \textit{και} \quad \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{1} = 1,$$

όπου $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Οι εξισώσεις $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij},\ j \in S$ λέγονται εξισώσεις ισορροπίας ενώ η $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ αναφέρεται ως εξίσωση κανονικοποίησης.

Θεώρημα 4. *Σε μια αδιαχώριστη απεριοδική Μ.α. με χώρο καταστάσεων S ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:*

a. *Όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή μηδενικά επαναληπτικές. Στην περίπτωση αυτή $\lim_{n\to\infty} p_{ij} = 0$, για κάθε $i, j \in S$ και δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή.*

b. *Όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει στάσιμη κατανομή, είναι μοναδική και δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j,\ j \in S)$, όπου*

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}, \quad j \in S.$$

Στην περίπτωση αδιαχώριστων και θετικά επαναληπτικών Μ.α., οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα υπάρχει στάσιμη κατανομή, ισχύουν επιπλέον τα εξής:

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ij}^{k} = \pi_j$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E\{\sum 1[X_k = j \mid X_0 = i]\}}{n} = \pi_j$

iii. αν η κατάσταση j είναι απεριοδική τότε

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = \pi_j.$$

b. Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου(Μ.α.σ.χ.)

<u>Ορισμός</u> 7. *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων* S *λέγεται Μ.α.σ.χ. αν*

$$P\{X(t_n) = i_n \mid X(t_0) = i_0, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = P\{X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}\},$$

για $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ *και* $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n \in S$.

Ανάλογα και με τις Μ.α.δ.χ. η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα αν με δεδομένη την παρούσα κατάσταση της αλυσίδας, η μελλοντική εξέλιξη αυτής δεν εξαρτάται από την παρελθούσα ιστορία της, αλλά μόνο από την παρούσα κατάσταση.

<u>Ορισμός</u> 8. *Η δεσμευμένη πιθανότητα* $P(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$ *λέγεται πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση* i *τη στιγμή* s, *στην κατάσταση* j *τη στιγμή* $t+s$. *Όταν οι πιθανότητες αυτές είναι ανεξάρτητες του χρόνου* s, *αλλά εξαρτώνται μόνο από τη διάρκεια* t, *δηλαδή*

$$p_{ij}(t) = P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i), \quad i, j \in S$$

τότε η $\{X(t)\}$ *λέγεται χρονικά ομογενής.*

Η $p_{ij}(t)$ θεωρούμενη ως συνάρτηση του χρόνου t, για δεδομένα $i, j \in S$, λέγεται συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης. Αντίστοιχα με τις Μ.α.δ.χ, όλες αυτές οι πιθανότητες συνοψίζονται σε έναν πίνακα

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ο οποίος λέγεται πίνακας συναρτήσεων πιθανοτήτων μετάβασης. Η Μ.α.σ.χ. $\{X(t)\}$ είναι πλήρως καθορισμένη αν δίνεται ο πίνακας $\mathbb{P}(t),\ t \geq 0$ και η αρχική κατανομή $p_i(0) = P(X(0) = i),\ i \in S$. Τότε, αν $p_i(t) = P(X(t) = i)$, με χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας προκύπτει

$$p_j(t) = \textstyle\sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t)$$

και το διάνυσμα $\mathbf{p}(t) = (p_i(t),\ i \in S)$ είναι η μεταβατική κατανομή της Μ.α.σ.χ. Η τελευταία σχέση υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbb{P}(t).$$

Λόγω της δυσκολίας χρήσης του $\mathbb{P}(t)$, ορίζουμε τις ποσότητες

$$q_{ij} = p'_{ij}(0^+) = \begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}, & i \neq j \\ \lim_{t\to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t}, & i = j \end{cases} \qquad i, j \in S. \tag{I}$$

Ο πίνακας $\mathbb{Q} = (q_{ij},\ i, j \in S)$ καλείται πίνακας ρυθμών μετάβασης ή απειροστός γεννήτορας της διαδικασίας. Υποθέτουμε ότι η Μ.α.σ.χ. είναι κανονική, δηλαδή $\sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1$, για κάθε $i \in S$. Ικανή συνθήκη γι αυτό είναι $\sup_i q_i < \infty$, όπου $q_i = -q_{ii}$. Στην περίπτωση κανονικών αλυσίδων, για τα στοιχεία του πίνακα $\mathbb{Q}$ ισχύουν τα εξής:

- Για $i \neq j$, $q_{ij} \geq 0$ και είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία μετακινείται από την κατάσταση i στην κατάσταση j.
- Για $i = j$, $q_{ii} \leq 0$ και $q_i = -q_{ii}$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία αναχωρεί από την κατάσταση i.
- $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i$. Δηλαδή ο πίνακας $\mathbb{Q}$ δεν είναι στοχαστικός αλλά το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του είναι μηδέν.

Θα ασχοληθούμε με κανονικές, χρονικά ομογενείς Μ.α.σ.χ. Έστω T_i ο χρόνος παραμονής της διαδικασίας στην κατάσταση i. Τότε αυτός έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο q_i. Μετά την πάροδο του χρόνου αυτού, η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση j με πιθανότητα

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad i \neq j.$$

Από τον ορισμό των q_{ij} προκύπτει ότι για $\delta t \to 0$ ισχύει

$$p_{kj}(\delta t) = \begin{cases} q_{kj}\delta t + o(\delta t), & k \neq j \\ 1 - q_k \delta t + o(\delta t), & k = j \end{cases}. \tag{II}$$

Επιπλέον με εφαρμογή του Θ.Ο.Π. προκύπτει (ανάλογα με τη διακριτή περίπτωση) άμεσα ότι:

$$p_{ij}(t + \delta t) = \textstyle\sum_{k\in S} p_{ik}(t)p_{kj}(\delta t).$$

Η τελευταία χρησιμοποιώντας τη (II) γράφεται:

$$\frac{p_{ij}(t+\delta t)-p_{ij}(t)}{\delta t}=\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}(t)q_j+\frac{o(\delta t)}{\delta t}.$$

Παίρνωντας $\delta t \to 0$ έπεται

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj},\quad i,j\in S.$$

Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται ως εξισώσεις Chapman-Kolmogorov και υπό μορφή πινάκων γράφονται $\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)\mathbb{Q}$. Λύνοντας την τελευταία διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$\mathbb{P}(t)=e^{\mathbb{Q}t},$$

όπου $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$.

Ορίζουμε M_{ij} το χρόνο πρώτης επίσκεψης της Μ.α.σ.χ. στην κατάσταση j δεδομένου ότι αυτή ξεκινάει από την i, δηλαδή

$$M_{ij}=\min\{t>0\ :\ X(t)=j\mid X(0)=i\}$$

και $f_{ij}=P(M_{ij}<\infty)$ η πιθανότητα πρώτης επίσκεψης στη j ξεκινώντας από την i. Ακριβώς όπως και στις Μ.α.δ.χ., για $i=j$, f_j είναι η πιθανότητα επανόδου στη j και $\mu_j=E[M_{jj}]$ ο μέσος χρόνος που συμβαίνει αυτό.

- *Αν $f_j<1$ τότε η κατάσταση j καλείται παροδική.*
- *Αν $f_j=1$ τότε η κατάσταση j καλείται επαναληπτική. Αν επιπλέον $\mu_j<\infty$ λέγεται θετικά επαναληπτική, ενώ αν $\mu_j=\infty$ τότε λέγεται μηδενικά επαναληπτική.*

Η επικοινωνία των καταστάσεων δεν διαφοροποιείται στην περίπτωση των Μ.α.σ.χ. Οπότε θα λέμε ότι οι καταστάσεις i,j επικοινωνούν αν για κάποιο $t>0$ ισχύει $p_{ij}(t)>0$ και $p_{ji}(t)>0$. Ομοίως, αν i,j επικοινωνούν τότε είναι του ίδιου τύπου και ορίζονται έτσι κλάσεις επικοινωνίας.

Λόγω της δυσκολίας υπολογισμού, στις περισσότερες περιπτώσεις, της μεταβατικής κατανομής μιας Μ.α., το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στον υπολογισμό της οριακής ή της στάσιμης κατανομής.

Έτσι ορίζουμε την οριακή κατανομή $\mathbf{p}(\infty) = (p_1(\infty), p_2(\infty), \ldots)$, όπου

$$p_i(\infty) = \lim_{t\to\infty} p_i(t), \quad i \in S,$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατανομή $\mathbf{p}(0)$.

Θεώρημα 5. *Αν η $\{X(t),\ t \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική, τότε $p_i(\infty) > 0$, για κάθε $i \in S$ και $\sum_{i\in S} p_i(\infty) = 1$, ενώ αν είναι μηδενικά επαναληπτική τότε $p_i(\infty) = 0$ για κάθε $i \in S$.*

Ορισμός 9. *Ορίζουμε ως στάσιμη κατανομή της $\{X(t),\ t \geq 0\}$, το διάνυσμα $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)$ που προκύπτει από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων:*

$$p_i \sum_{j\neq i} q_{ij} = \sum_{j\neq i} p_j q_{ji}, \quad i \in S \quad \text{και} \quad \sum_{i\in S} p_i = 1.$$

Οι πρώτες εξισώσεις καλούνται εξισώσεις ισορροπίας και η δεύτερη εξίσωση κανονικοποίησης, ενώ σε μορφή πινάκων γράφονται

$$\mathbf{p}\mathbb{Q} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{1} = 1,$$

όπου $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ και $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)^T$.

Θεώρημα 6. *Μια αδιαχώριστη, κανονική Μ.α.σ.χ. είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν αυτή έχει ακριβώς μία στάσιμη κατανομή $\mathbf{p} = (p_j,\ j \in S)$ όπου*

$$p_j = \frac{1}{q_j \mu_j},\ j \in S.$$

Διαφορετικά η αλυσίδα είναι μηδενικά επαναληπτική ή παροδική και δεν έχει στάσιμη κατανομή, ενώ η οριακή της κατανομή είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Στην περίπτωση της θετικής επαναληπτικότητας επιπλέον ισχύει ότι:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1\{X(u) = j\}du \ = p_j$$

και εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που περνάει η αλυσίδα στην κατάσταση j.

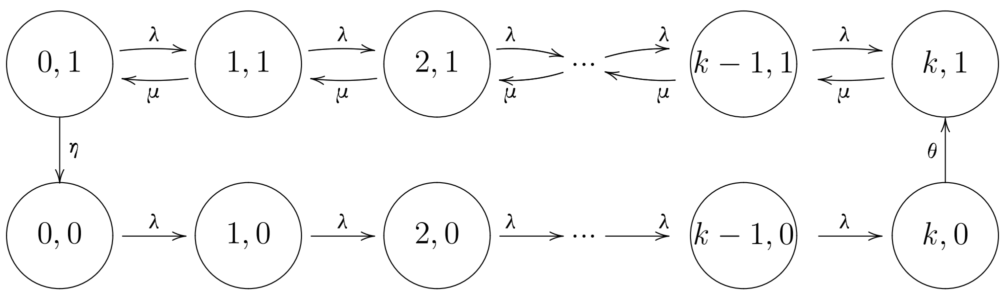
1.3 Δομή της εργασίας

Ας εξετάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson (λ). Το σύστημα διαθέτει έναν υπηρέτη και πεπερασμένη χωρητικότητα k θέσεων. Ο υπηρέτης με την έναρξη της λειτουργίας του συστήματος είναι απενεργοποιημένος, ενώ πελάτες φθάνουν κανονικά. Όταν συμπληρωθούν και οι k θέσεις, τότε αρχίζει η διαδικασία ενεργοποίησης του υπηρέτη, η οποία διαρκεί χρόνο εκθετικό(θ). Με το πέρας του χρόνου αυτού ο υπηρέτης αρχίζει να εξυπηρετεί τους παρευρισκόμενους πελάτες με σειρά προτεραιότητας, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη ακολουθεί την εκθετική(μ) κατανομή. Όσο ο υπηρέτης είναι ενεργοποιημένος οι αφίξεις πελατών συνεχίζονται κανονικά και αυτοί που βρίσκουν το σύστημα πλήρες αναχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν. Όταν το σύστημα αδειάσει, ξεκινάει η διαδικασία απενεργοποίησης του υπηρέτη, η οποία διαρκεί χρόνο εκθετικό(η). Η διαδικασία απενεργοποίησης διακόπτεται αν στο μεταξύ αφιχθεί κάποιος πελάτης.

Ορίζουμε τις καταστάσεις του συστήματος ως ζεύγη $(n, i),\ n = 0, 1, ..., k$ και $i = 0, 1$, όπου n είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα και i η κατάσταση του υπηρέτη, δηλ.

$$i = \begin{cases} 0 & ,\text{αν ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος} \\ 1 & ,\text{αν ο υπηρέτης είναι ενεργός.} \end{cases}$$

Το σύστημα περιγράφεται έτσι από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n, i),\ n = 0, 1, ..., k \quad i = 0, 1\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Έστω $(\pi(n,i))$ η στάσιμη κατανομή, όταν υπάρχει. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\lambda\pi(0,0) = \eta\pi(0,1) \tag{1.1}$$

$$\lambda\pi(n,0) = \lambda\pi(n-1,0) \quad n=1,...,k-1 \tag{1.2}$$

$$\theta\pi(k,0) = \lambda\pi(k-1,0) \tag{1.3}$$

$$(\lambda+\eta)\pi(0,1) = \mu\pi(1,1) \tag{1.4}$$

$$(\lambda+\mu)\pi(n,1) = \lambda\pi(n-1,1)+\mu\pi(n+1,1) \quad n=1,...,k-1 \tag{1.5}$$

$$\mu\pi(k,1) = \lambda\pi(k-1,1)+\theta\pi(k,0). \tag{1.6}$$

Από την (1.1) έχουμε

$$\pi(0,0) = \frac{\eta}{\lambda}\pi(0,1). \tag{1.7}$$

Από την (1.2)

$$\pi(k-1,0) = \pi(k-2,0)=\cdots=\pi(0,0) \overset{(1.7)}{=} \frac{\eta}{\lambda}\pi(0,1). \tag{1.8}$$

Από την (1.3) προκύπτει

$$\pi(k,0) = \frac{\lambda}{\theta}\pi(k-1,0) \overset{(1.8)}{=} \frac{\eta}{\theta}\pi(0,1). \tag{1.9}$$

Έτσι οι πιθανότητες $\pi(n,0),\ n=0,1,...,k$ έχουν όλες εκφρασθεί συναρτήσει της $\pi(0,1)$. Οπότε αρκεί ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων $\pi(n,1),\ n=0,1,...,k$ ώστε να καθοριστεί πλήρως η στάσιμη κατανομή.

Έστω $\Pi_1(z)=\sum_{n=0}^{k}\pi(n,1)z^n$, το πολυώνυμο βαθμού k με συντελεστές ακριβώς τις ζητούμενες πιθανότητες. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πολυώνυμο $\Pi_1(z)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η γεννήτρια των πιθανοτήτων $\pi(n,1),\ n=0,1,...,k$. Ο προσδιορισμός του πολυωνύμου αυτού ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό των συντελεστών του. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας και της εξίσωσης κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{k}\pi(n,0)+\sum_{n=0}^{k}\pi(n,1)=1. \tag{1.10}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1.5) με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n=1,...,k-1$ παίρνουμε

$$(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{k-1}\pi(n,1)z^n=\lambda\sum_{n=1}^{k-1}\pi(n-1,1)z^n+\mu\sum_{n=1}^{k-1}\pi(n+1,1)z^n$$

η οποία λόγω του ορισμού του $\Pi_1(z)$ γράφεται

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\left\{\Pi_1(z)-\pi(0,1)-\pi(k,1)z^k\right\} &= \lambda z\sum_{n=0}^{k-2}\pi(n,1)z^n+\frac{\mu}{z}\sum_{n=2}^{k}\pi(n,1)z^n\\ &= \lambda z\left\{\Pi_1(z)-\pi(k-1,1)z^{k-1}-\pi(k,1)z^k\right\}\\ &+ \frac{\mu}{z}\left\{\Pi_1(z)-\pi(0,1)-\pi(1,1)z\right\}.\end{aligned}$$

Με χρήση των εξισώσεων (1.4), (1.6) και (1.9), η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\left\{(\lambda+\mu)z-\lambda z^2-\mu\right\}\Pi_1(z) &= ((\lambda+\mu)z-\mu)\pi(0,1)+(\lambda+\mu-\lambda z)\frac{\lambda}{\mu}\pi(k-1,1)z^{k+1}\\ &+ (\lambda+\mu-\lambda z)\frac{\eta}{\mu}\pi(0,1)z^{k+1}-\lambda z^{k+1}\pi(k-1,1)-(\lambda+\eta)z\pi(0,1)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}\left\{\lambda z^2-(\lambda+\mu)z+\mu\right\}\Pi_1(z) &= \left\{\mu(1-z)+\eta z(1-z^k)-\frac{\eta}{\mu}\lambda(1-z)z^{k+1}\right\}\pi(0,1)\\ &- \frac{\lambda^2}{\mu}(1-z)z^{k+1}\pi(k-1,1). \qquad (1.11)\end{aligned}$$

Θέτοντας $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$ η τελευταία γίνεται

$$\begin{aligned}(\rho z^2-(1+\rho)z+1)\Pi_1(z) &= (1-z+\frac{\eta}{\mu}z(1-z^k)-\frac{\eta\rho}{\mu}(1-z)z^{k+1})\pi(0,1)\\ &- \rho^2(1-z)z^{k+1}\pi(k-1,1).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\rho z^2-(1+\rho)z+1=\rho(z-1)(z-\frac{1}{\rho}),\ \ \mu\neq\lambda$. Έτσι,

$$(\rho z-1)\Pi_1(z)=\left(\frac{\eta\rho}{\mu}z^{k+1}-\frac{\eta}{\mu}z(z^{k-1}+\cdots+1)-1\right)\pi(0,1)+\rho^2z^{k+1}\pi(k-1,1) \qquad (1.12)$$

ή

$$\Pi_1(z)=\frac{\left(\frac{\eta\rho}{\mu}z^{k+1}-\frac{\eta}{\mu}z(z^{k-1}+\cdots+1)-1\right)\pi(0,1)+\rho^2z^{k+1}\pi(k-1,1)}{\rho z-1}. \qquad (1.13)$$

όπου το $\pi(k-1,1)$ μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της $\pi(0,1)$ ως εξής: Θέτουμε στην (1.12) $z=\dfrac{1}{\rho}$ οπότε:

$$0=\left[\frac{\eta\rho}{\mu}\frac{1}{\rho^{k+1}}-\frac{\eta}{\mu\rho}\left(\frac{1}{\rho^{k-1}}+\cdots+1\right)-1\right]\pi(0,1)+\rho^2\frac{1}{\rho^{k+1}}\pi(k-1,1).$$

Το τελευταίο γράφεται ισοδύναμα

$$\pi(k-1,1)=A\pi(0,1) \qquad (1.14)$$

όπου

$$A = \rho^{k-1} + \frac{\eta}{\mu}(1 + \cdots + \rho^{k-2}). \tag{1.15}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την (1.14), η (1.13) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &= \frac{\frac{\eta\rho}{\mu}z^{k+1} - \frac{\eta}{\mu}z(z^{k-1} + \cdots + 1) - 1 + \rho^2 z^{k+1} A}{\rho z - 1}\pi(0,1) \qquad (1.16) \\ &\overset{(1.15)}{=} \frac{\eta\rho(1 + \cdots + \rho^{k-1})z^{k+1} - \eta z(1 + \cdots + z^{k-1}) - \mu\left(1 - (\rho z)^{k+1}\right)}{\mu(\rho z - 1)}\pi(0,1). \end{aligned}$$

Τέλος, η $\pi(0,1)$ θα βρεθεί από την εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{n=0}^{k} \pi(n,0) + \sum_{n=0}^{k} \pi(n,1) = 1.$$

Λόγω των (1.7), (1.8), (1.9) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\sum_{n=0}^{k} \pi(n,1) = \Pi_1(1)$ η τελευταία γράφεται

$$k\frac{\eta}{\lambda}\pi(0,1) + \frac{\eta}{\theta}\pi(0,1) + \Pi_1(1) = 1. \tag{1.17}$$

Θέτοντας $z = 1$ στην (1.16), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Pi_1(1) &= \frac{\dfrac{\eta\rho}{\mu} - \dfrac{\eta k}{\mu} - 1 + \rho^2 A}{\rho - 1}\pi(0,1) \\ \text{ή} \qquad \Pi_1(1) &= \frac{\mu + \eta(k - \rho) - \mu\rho^2 A}{\mu(1 - \rho)}\pi(0,1). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.17) και λύνοντας ως προς $\pi(0,1)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \pi(0,1) = B &= \left[\frac{k\eta}{\lambda} + \frac{\eta}{\theta} + \frac{\mu + \eta(k-\rho) - \mu\rho^2 A}{\mu(1-\rho)}\right]^{-1} \\ &\overset{(1.15)}{=} \left[\frac{k\eta}{\lambda} + \frac{\eta}{\theta} + \frac{\mu(1 - \rho^{k+1}) + \eta k - \eta\rho(1 + \cdots + \rho^{k-1})}{\mu(1-\rho)}\right]^{-1}. \qquad (1.18) \end{aligned}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στην (1.16), η $\Pi_1(z)$ παίρνει την τελική μορφή:

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta\rho z^{k+1} - \eta z(z^{k-1} + \cdots + 1) - \mu + \mu\rho^2 A z^{k+1}}{\mu(\rho z - 1)}\ B. \tag{1.19}$$

όπου τα A, B δίνονται από τις σχέσεις (1.15) και (1.18) αντίστοιχα.

Κάνοντας τη διαίρεση των πολυωνύμων στην (1.19) και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές παίρνουμε ακριβώς τις πιθανότητες $\pi(n,1)$. Έτσι π.χ. θα έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(0,1) &= B, \\ \pi(1,1) &= (\rho + \frac{\eta}{\mu})B = \frac{\lambda + \eta}{\mu}\ B \quad \text{κλπ.} \end{aligned}$$

Η περίπτωση $\lambda = \mu$ δηλ. $\rho = 1$ αντιμετωπίζεται ανάλογα. Συγκεκριμένα, αν $\rho = 1$ τότε $\lambda z^2 - (\lambda+\mu)z + \mu = \lambda(z-1)^2$ οπότε η (1.12) τώρα γράφεται

$$(z-1)\Pi_1(z) = \left[\frac{\eta}{\mu}z^{k+1} - \frac{\eta}{\mu}z(z^{k-1}+\cdots+1) - 1\right]\pi(0,1) + z^{k+1}\pi(k-1,1) \quad (1.20)$$

στην οποία θέτοντας $z = 1$ προκύπτει:

$$\pi(k-1,1) = A'\pi(0,1) \quad (1.21)$$

όπου

$$A' = 1 + (k-1)\frac{\eta}{\mu}. \quad (1.22)$$

Έτσι, στην περίπτωση αυτή, λόγω της (1.21) και αντικαθιστώντας το A', η (1.20) γίνεται

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &= \frac{\frac{\eta}{\mu}z^{k+1} - \frac{\eta}{\mu}z(1+\cdots+z^{k-1}) - 1 + \left(1+\frac{\eta}{\mu}(k-1)\right)z^{k+1}}{z-1}\pi(0,1) \\ &= \frac{(\mu+\eta k)z^{k+1} - \eta z(1+\cdots+z^{k-1}) - \mu}{\mu(z-1)}\pi(0,1). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Και πάλι η π(0,1) θα βρεθεί με την ίδια διαδικασία, μέσω της εξίσωσης κανονικοποίησης. Θέτοντας $z = 1$ στην (1.23) παρατηρούμε ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρανομαστής μηδενίζονται. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hospital, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Pi_1(1) &= \frac{(\mu+\eta k)(k+1) - \eta k - \eta\frac{k(k-1)}{2}}{\mu}\pi(0,1) \\ \text{ή} \quad \Pi_1(1) &= (k+1)(1+\frac{\eta k}{2\mu})\pi(0,1). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.17) και λύνοντας ως προς $\pi(0,1)$ παίρνουμε:

$$\pi(0,1) = B' = \left[\frac{k\eta}{\lambda} + \frac{\eta}{\theta} + (k+1)(1+\frac{\eta k}{2\mu})\right]^{-1}. \quad (1.25)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στην (1.23), η $\Pi_1(z)$ παίρνει την τελική μορφή:

$$\Pi_1(z) = \frac{(\mu+\eta k)z^{k+1} - \eta z(1+\cdots+z^{k-1}) - \mu}{\mu(z-1)}B' \quad (1.26)$$

όπου το B' δίνεται από τη σχέση (1.25).

Και στην περίπτωση αυτή κάνοντας τη διαίρεση των πολυωνύμων στην (1.26) και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές παίρνουμε ακριβώς τις πιθανότητες $\pi(n,1),\ n=0,1,...,k$. Έτσι π.χ. θα έχουμε

$$\begin{aligned}\pi(0,1) &= B',\\ \pi(1,1) &= (1+\frac{\eta}{\mu})\,B' \quad \text{κλπ.}\end{aligned}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο αριθμητής και ο παρανομαστής έχουν ρίζα τη μονάδα και ο κανόνας του L'Hospital έδωσε λύση. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που έχουν περισσότερες κοινές ρίζες και πιθανόν με κάποια πολλαπλότητα; Ποια είναι η απάντηση σε παρόμοια ερωτήματα στην περίπτωση άπειρου πλήθους καταστάσεων; Επιπλέον η διαίρεση των πολυωνύμων συνέβαλε στο να γράψουμε τα δεύτερα μέλη των (1.19) και (1.26) στη μορφή $\sum_{n=0}^{k}\alpha_n z^n$, οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των n-οστών δυνάμεων του z να εξάγουμε τις ζητούμενες πιθανότητες $\pi(n,1)=\alpha_n,\ n=0,1,...,k$, που είναι και ο τελικός μας σκοπός. Τι γίνεται στην περίπτωση που τα πολυώνυμα δεν επαρκούν για το χειρισμό των πιθανοτήτων, επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι άπειρος;

Λύση σε τέτοιου είδους ερωτήματα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε στην παρούσα εργασία. Έτσι, στο Κεφάλαιο 2, αρχικά αναπτύσσεται η τυπική θεωρία των γεννητριών, η οποία αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αντιμετωπίζουμε τους όρους μιας ακολουθίας, χωρίς να θέτουμε ζητήματα σύγκλισης, θεωρώντας ένα νέο διανυσματικό χώρο που εφοδιάζεται επιπλέον και με δομή δακτυλίου, το χώρο των τυπικών γεννητριών. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε και υπενθυμίζουμε βασικές αναλυτικές ιδιότητες των δυναμοσειρών γενικά και των πιθανογεννητριών ειδικότερα, αφού στα μοντέλα που μελετάμε ο προσδιορισμός της πιθανογεννήτριας συνάρτησης αποτελεί βασικό σκοπό μας.

Στα Κεφάλαια 3 και 4 παρουσιάζονται βασικές αλγεβρικές και αναλυτικές τεχνικές αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, στην παράγραφο 3.1 αναπτύσσεται η μέθοδος της ανάλυσης σε απλά κλάσματα, η οποία οδηγεί στην ακριβή εύρεση των συντελεστών μιας ρητής πιθανογεννήτριας $\Pi(z)$. Η επίλυση εξισώσεων διαφορών που εμφανίζονται αρκετά συχνά στις εξισώσεις ισορροπίας, αποτελεί έναν πιο άμεσο τρόπο υπολογισμού της στάσιμης κατανομής. Η γενική λύση τέτοιων εξισώσεων παρουσιάζεται στην παράγραφο 3.2. Τέλος, η 3.3 ασχολείται με την εξαγωγή αναδρομικών σχέσεων για τον υπολογισμό των ζητούμενων πιθανοτήτων, όπου αυτό βέβαια είναι εφικτό.

Όσον αφορά το Κεφάλαιο 4, απάντηση στο ερώτημα της ύπαρξης κοινών ριζών στον αριθμητή και τον παρανομαστή μιας πιθανογεννήτριας συνάρτησης, επιχειρεί να δώσει η παράγραφος 4.1 με την παρουσίαση του βασικού Θεωρήματος του Rouché. Στην περίπτωση που είναι δύσκολο να βρεθεί ακριβής τύπος για τη στάσιμη κατανομή, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται ορισμένες υποθέσεις, ένα βασικό ασυμπτωτικό αποτέλεσμα δίνει μια καλή προσέγγιση των πιθανοτήτων αυτών. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί το αντικείμενο της παραγράφου 4.2. Τέλος, η παράγραφος 4.3 παρουσιάζει μια σημαντική χρήση των γεννητριών συναρτήσεων για τον υπολογισμό αθροισμάτων όρων μιας ακολουθίας όταν οι δείκτες των όρων αυτών αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο της εργασίας, μερικές εφαρμογές των μεθόδων και των αποτελεσμάτων που έχουμε αναπτύξει, παρουσιάζονται σε συγκεκριμένο στοχαστικό μοντέλο.

Κεφάλαιο 2

Βασική Θεωρία

2.1 Τυπική Θεωρία γεννητριών

Στα μαθηματικά οι τυπικές δυναμοσειρές είναι εργαλεία που χρησιμοποιούν αρκετούς από τους αναλυτικούς μηχανισμούς των δυναμοσειρών σε χώρους οι οποίοι δεν διαθέτουν την έννοια της σύγκλισης. Μπορούν ακόμα να θεωρηθούν ως πολυώνυμα με άπειρους όρους. Μια τυπική δυναμοσειρά είναι μια άπειρη ακολουθία αριθμών $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots)$ την οποία χειριζόμαστε με συγκεκριμένους κανόνες που είναι ευκολότεροι να τους θυμηθούμε αν παραστήσουμε την ακολουθία με το συμβολισμό $\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots$.Με άλλα λόγια, μια τυπική δυναμοσειρά είναι απλά ένα αντικείμενο που καταγράφει τους συντελεστές μιας ακολουθίας. Αντιμετωπίζεται αλγεβρικά σαν να είναι δυναμοσειρά, είτε συγκλίνει είτε όχι, για οποιοδήποτε z. Στον παραπάνω συμβολισμό τίποτα δεν αθροίζεται και τίποτα δεν πολλαπλασιάζεται και το σημαντικότερο είναι ότι το z δεν παριστάνει καμία ποσότητα, επομένως δεν επιτρέπεται να αντικατασταθεί με κάποιο αριθμό. Η τυπική δυναμοσειρά δεν παριστάνει κάποια συνάρτηση.

Αν περιοριστούμε στις ακολουθίες $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ που μηδενίζονται από κάποιον όρο και μετά, τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε, σύμφωνα με το σκεπτικό που περιγράψαμε παραπάνω, μια τέτοια ακολουθία με το πολυώνυμο $\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$. Αυτό που επιθυμούμε να κάνουμε είναι να επεκτείνουμε το αλγεβρικό σύστημα των πολυωνύμων, προσθέτοντας νέα στοιχεία ενώ ταυτόχρονα προσπαθούμε στο νέο σύστημα να ικανοποιούνται όσο το δυνατόν περισσότεροι από τους 'κανόνες' του αρχικού. Συγκεκριμένα, επεκτείνουμε το δακτύλιο των πολυωνύμων σε ένα μεγαλύτερο δακτύλιο, αυτόν των τυπικών δυναμοσειρών τον οποίο θα συμβολίζουμε $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Γενικά όταν περνάμε από τα πολυώνυμα στις τυπικές σειρές χάνουμε την ικανότητα να αντιστοιχίσουμε στο z κάποια τιμή. Το z^n συμβολίζει στην περίπτωση αυτή το στοιχείο $(0, 0, ...0, 1, 0, ...)$ (1 στη n-οστή θέση) του $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Έτσι ο συμβολισμός $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ δείχνει πως αναλύεται ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου ως προς τη βάση $(z^0, z^1, z^2, ...)$.

Έτσι η τυπική θεωρία των δυναμοσειρών, αντίθετα με την αναλυτική, αντιμετωπίζει τις σειρές αυτές ως καθαρά αλγεβρικά αντικείμενα, χωρίς να τους δίνει υπόσταση αναλυτικής συνάρτησης. Μελετάμε τις τυπικές σειρές διότι συχνά, όταν προσπαθούμε να λύσουμε μια αναδρομική σχέση εισάγουμε μια γεννήτρια συνάρτηση και κάνουμε διάφορους χειρισμούς χωρίς να γνωρίζουμε εξ αρχής αν αυτή συγκλίνει και σε καταφατική περίπτωση, πού συμβαίνει αυτό (Μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων). Παρόλα αυτά αρκετές φορές μπορούμε να εξάγουμε ακόμα και την ακριβή μορφή των συντελεστών της σειράς.

Ορισμός 10. ***Τυπική γεννήτρια***

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Θα συμβολίζουμε με

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

την ακολουθία $(\alpha_0, \alpha_1, ...)$,όπου $(z^0, z^1, z^2, ...)$ είναι η κανονική βάση του χώρου. Η ακολουθία (α_n) λέγεται ακολουθία των συντελεστών.

Με αυτό το συμβολισμό έχουμε ότι αν $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ και $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ τότε

$$A(z) = B(z) \Longleftrightarrow \alpha_n = b_n \ , n \in \mathbb{N}_0.$$

Ως γνωστό, η πρόσθεση δύο ακολουθιών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ορίζει μια νέα ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ με όρους $c_n = \alpha_n + b_n$. Έτσι, στο σύνολο $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, από την πρόσθεση δύο στοιχείων $A(z), B(z)$ προκύπτει ένα νέο στοιχείο του συνόλου, $C(z)$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

πρόσθεση:

$$C(z) = A(z) + B(z) \Longleftrightarrow c_n = \alpha_n + b_n, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Η τυπική σειρά $\mathbf{0} = 0 + 0z + 0z^2 + \cdots = (0, 0, \ldots)$ αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης. Επιπλέον ορίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ ως εξής:

$$(\alpha_0, \alpha_1, ...) \cdot (b_0, b_1, ...) = (\alpha_0 b_0, \alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0, \alpha_0 b_2 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_0, ...)$$

$$\textit{πολλαπλασιασμός:} \quad C(z) = A(z)B(z) \Longleftrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k b_{n-k}, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Το παραπάνω γινόμενο είναι καλά ορισμένο, αφού κάθε όρος της ακολουθίας (c_n) ορίζεται μέσω πεπερασμένου πλήθους όρων των αρχικών ακολουθιών (α_n) και (b_n). Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι η μονάδα,δηλαδή η ακολουθία $\mathbf{1} = (1, 0, 0, ...)$. Με τον ορισμό των παραπάνω πράξεων, προκύπτει ότι το σύνολο $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα τη σειρά $\mathbf{1}(z) = \mathbf{1}$, δηλαδή $\mathbf{1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$, με $\alpha_0 = 1$ και $\alpha_n = 0, \; n > 0$. Το σύνολο $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται σύνολο των τυπικών γεννητριών και κάθε στοιχείο του $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ αναφέρεται ως τυπική δυναμοσειρά ή τυπική γεννήτρια.

Θα συμβολίζουμε $[z^n]A(z)$ το συντελεστή του z^n στη σειρά $A(z)$, δηλαδή το n-οστό όρο α_n της ακολουθίας των συντελεστών.

Ορίζουμε την εκθετική δυναμοσειρά $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots)$, την οποία θα συμβολίζουμε με e^z και ως στοιχείο του συνόλου $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ θα γράφεται στη μορφή $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Έτσι με βάση το συμβολισμό που θέσαμε παραπάνω είναι $\alpha_n = [z^n]e^z = \dfrac{1}{n!}$.
Ανάλογα σκεπτόμενοι

$$[z^n](1+z)^s = \binom{s}{n} \qquad (\; (1+z)^s = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n \;).$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, άμεσα προκύπτει ότι:

$$[z^n]\{z^k A(z)\} = [z^{n-k}]A(z).$$

<u>Ορισμός</u> 11. *Πολλαπλασιαστικός αντίστροφος*
Μια τυπική δυναμοσειρά $A(z)$ λέγεται πολλαπλασιαστικά αντιστρέψιμη αν υπάρχει τυπική δυναμοσειρά $B(z)$ τέτοια ώστε $A(z)B(z) = \mathbf{1}$. Τότε η $B(z)$ λέγεται πολλαπλασιαστικός αντίστροφος (reciprocal inverse) της $A(z)$.

<u>Θεώρημα</u> 7. *Μια τυπική δυναμοσειρά $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ είναι πολλαπλασιαστικά αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $\alpha_0 \neq 0$ και τότε ο αντίστροφος είναι μοναδικός.*

Απόδειξη:
Έστω ότι η $A(z)$ είναι αντιστρέψιμη. Τότε υπάρχει $B(z) \in \mathbb{C}^{N_0}$ τέτοια ώστε $A(z)B(z) = \mathbf{1}$.

Έτσι, από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{C}^{N_0}$ έπεται για $n = 0$ ότι $\alpha_0 b_0 = 1$ οπότε $\alpha_0 \neq 0$ και

$$b_0 = \frac{1}{\alpha_0}.$$

Για $n \geq 1$ είναι $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_{n-k} = 0$ και λύνοντας ως προς b_n

$$b_n = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Άρα τα $b_0, b_1, \ldots$ ορίζονται μονοσήμαντα.

Αντίστροφα, έστω $\alpha_0 \neq 0$. Αρκεί να βρούμε δυναμοσειρά $B(z)$ τέτοια ώστε $A(z)B(z) = \mathbf{1}$ Ορίζουμε

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\alpha_0} \qquad \textit{και} \\ b_n &= -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_{n-k}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Προφανώς

$$\alpha_0 b_0 = 1 \;\; \text{και} \;\; \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_{n-k} = 0.$$

Δηλ. $A(z)B(z) = (1, 0, 0, \ldots) = \mathbf{1}(z) = \mathbf{1}$. Άρα η $A(z)$ είναι πολλαπλασιαστικά αντιστρέψιμη.

Άμεσα επομένως προκύπτει ο παρακάτω νόμος της διαγραφής.

Πόρισμα:*Αν f, g, h είναι τυπικές δυναμοσειρές, όπου η h δεν είναι η μηδενική σειρά ($h \neq 0$) και $fh = gh$, τότε $f = g$.*

Παραδείγματα:

1. Ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος της τυπικής γεννήτριας $A(z) = 1 - z$ είναι η τυπική γεννήτρια $B(z) = (1, 1, ...) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

   Πράγματι, η $A(z)$ έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, εφόσον $\alpha_0 = 1 \neq 0$. Έστω $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ο αντίστροφος αυτός. Τότε, σύμφωνα με την παραπάνω απόδειξη $b_0 = \frac{1}{\alpha_0} = 1$. Έστω ότι $b_k = 1 \; \forall k < n$. Τότε,

   $$b_n = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_{n-k} = -\frac{1}{\alpha_0} \alpha_1 b_0 = -\frac{1}{1}(-1) = 1.$$

   Άρα $(1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

2. $[(1-z)^N]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} z^n.$

Πράγματι, από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι $(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Όμως $[(1-z)^{-1}]^N (1-z)^N = [(1-z)^{-1}(1-z)]^N = 1^N = 1$.

Άρα $[(1-z)^N]^{-1} = [(1-z)^{-1}]^N = (1-z)^{-N}$. Όμως

$(1-z)^{-N} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^N = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_N=n}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} z^n.$

3.

$$
\begin{aligned}
(cosz)^{-1} &= \frac{1}{cosz} = \frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right) + \left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)^2 + \cdots \\
&= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5z^4}{4!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Σύνθεση τυπικών γεννητριών

Η σύνθεση δύο τυπικών γεννητριών πρέπει να οριστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επεκτείνει τη σύνθεση πολυωνύμων. Έτσι, αν $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ και $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, τότε για να είναι καλά ορισμένη η νέα τυπική γεννήτρια που θα ονομάζουμε σύνθεση, θα πρέπει οι συντελεστές της να ορίζονται μέσω ενός πεπερασμένου αθροίσματος.

Ορισμός 12. *Ορίζουμε σύνθεση των τυπικών δυναμοσειρών $A(z), B(z)$:*

$$(A \circ B)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (B(z))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (b_0 + b_1 z + \ldots)^n.$$

Παρατηρούμε ότι $[z^0](A \circ B)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b_0^n$.

Αν η $B(z)$ έχει μη μηδενικό σταθερό όρο b_0, $(b_0 \neq 0)$, τότε κάθε συντελεστής της σειράς $(A \circ B)(z)$ δίνεται μέσω ενός άπειρου αθροίσματος. Τότε η σύνθεση θα έχει νόημα είτε αν το άθροισμα αυτό συγκλίνει (αλλά στην τυπική θεωρία θέματα σύγκλισης δεν τίθενται), είτε αν η $A(z)$ είναι πολυώνυμο. Αντίθετα, αν $b_0 = 0$, τότε $\alpha_n(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)^n = \alpha_n z^n (b_1 + b_2 z + \cdots)^n$ και ο υπολογισμός κάθε συντελεστή της σειράς $(AoB)(z)$ γίνεται μέσω του παρακάτω πεπερασμένου αθροίσματος:

$$[z^n](A \circ B)(z) = \sum_{r=1}^{n} r!\ a_r \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\geq(0,\ldots,0),\\ j_1+\ldots+j_n=r, 1j_1+\ldots+nj_n=n}} \frac{1}{j_1! \cdots j_n!}\ b_1^{j_1} \cdots b_n^{j_n}. \tag{2.1}$$

Άρα η σύνθεση δύο τυπικών δυναμοσειρών ορίζεται αν και μόνο αν $b_0 = 0$ ή η $A(z)$ είναι πολυώνυμο. Σημειώνουμε ότι στη θεωρία των τυπικών γεννητριών ως πολυώνυμο θα θεωρούμε μια τυπική δυναμοσειρά με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών συντελεστών. Επιπλέον ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$(A_1 + A_2) \circ B = A_1 \circ B + A_2 \circ B \tag{2.2}$$

$$(A_1 A_2) \circ B = (A_1 \circ B)(A_2 \circ B), \qquad \mathbf{1} \circ A = \mathbf{1} \tag{2.3}$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Γενικά *δεν* ισχύει ότι $B \circ (A_1 + A_2) = B \circ A_1 + B \circ A_2$.

Η τυπική σειρά $I(z) = z$ είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς τη σύνθεση τυπικών δυναμοσειρών:

$$S \circ I = S = I \circ S. \tag{2.4}$$

<u>Ορισμός</u> 13. ***Συναρτησιακός αντίστροφος***

Ο συναρτησιακός αντίστροφος (functional inverse) μιας τυπικής γεννήτριας $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, αν υπάρχει, είναι μια δυναμοσειρά $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ τέτοια ώστε

$$(A \circ B)(z) = A(B(z)) = B(A(z)) = I(z) = z.$$

Τότε και η $B(z)$ είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι η $A(z)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για να ορίζεται η $(A \circ B)$, θα πρέπει είτε $A(z)$ πολυώνυμο είτε $b_0 = 0$. Αντίστοιχα για να ορίζεται η $(B \circ A)$, είτε $B(z)$ πολυώνυμο είτε $\alpha_0 = 0$.

Στην περίπτωση που το $A(z)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, δηλαδή είναι της μορφής $A(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z$, τότε υπάρχει πάντα συναρτησιακός αντίστροφος. Συγκεκριμένα αυτός είναι επίσης πολυώνυμο πρώτου βαθμού $B(z) = b_0 + b_1 z$, όπου $b_0 = -\frac{a_0}{a_1}$ και $b_1 = \frac{1}{a_1}$.

Αντίθετα, αν $A(z)$ είναι πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού, τότε αν υπάρχει συναρτησιακός αντίστροφος, αποδεικνύεται εύκολα ότι αυτός δεν μπορεί να είναι πολυώνυμο, αλλά θα είναι τυπική δυναμοσειρά. Μάλιστα ισχύει ότι αν $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_1 \neq 0$, υπάρχει πάντα ένας συναρτησιακός αντίστροφος $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ με $b_0 = 0$. Το τελευταίο ισχύει και στην περίπτωση που το $A(z)$ δεν είναι πολυώνυμο αλλά τυπική γεννήτρια με $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_1 \neq 0$. Σχετικά με την ύπαρξη συναρτησιακού αντίστροφου αποδεικνύουμε το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 8. *Έστω η τυπική δυναμοσειρά* $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$*. Αν* $\alpha_0 = 0$*, τότε η* $A(z)$ *έχει συναρτησιακό αντίστροφο* $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *με* $b_0 = 0$ *αν και μόνο αν ο συντελεστής του* z *στην* $A(z)$ *είναι μη μηδενικός, δηλαδή* $\alpha_1 \neq 0$*.*

Απόδειξη:

Έστω $\alpha_0 = 0$ και ότι η $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ έχει συναρτησιακό αντίστροφο $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ με $b_0 = 0$. Έτσι $A(B(z)) = B(A(z)) = I(z)$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (B(z))^n = z$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} a_1 B(z) + a_2 (B(z))^2 + \cdots &= z \\ a_1(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) + a_2 (b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)^2 + \cdots &= z \\ a_1 z (b_1 + b_2 z + \cdots) + a_2 z^2 (b_1 + b_2 z + \cdots)^2 + \cdots &= z. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του z προκύπτει:

$$\alpha_1 b_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 \neq 0.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_1 \neq 0$. Αναζητούμε $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, με $b_0 = 0$ τέτοια ώστε $A \circ B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (B(z))^n = z$. Η σύνθεση ορίζεται εφόσον $b_0 = 0$ και γράφεται:

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + a_2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \Big)^2 + \cdots = z. \tag{2.5}$$

Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές του z προκύπτει $\alpha_1 b_1 = 1$. Εφόσον $\alpha_1 \neq 0$

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_1}.$$

Ομοίως για τους συντελεστές του z^2 παίρνουμε $a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0$ ή

$$b_2 = -\frac{a_2 b_1^2}{a_1}.$$

Η διαδικασία υπολογισμού των συντελεστών b_n, $n = 0, 1, ...$ συνεχίζεται κατά τον ίδιο τρόπο αναδρομικά. Γενικά για το συντελεστή του z^n, $n > 1$, στο πρώτο μέλος της (2.5), αυτός είναι μηδενικός. Δηλαδή ισχύει

$$a_1 b_n + P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0, \tag{2.6}$$

όπου P_n είναι γνωστό πολυώνυμο ως προς $a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}$ με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές, γραμμικό ως προς τα a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Οι συντελεστές b_n, $n > 1$, υπολογίζονται επαγωγικά από την (2.6). Έτσι έχουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της τυπικής δυναμοσειράς

$B(z)$, για την οποία ισχύει ότι $b_0 = 0$ και $b_1 \neq 0$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα που δείξαμε παραπάνω, η $B(z)$ έχει τυπική αντίστροφο, έστω $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ τέτοια ώστε

$$c_0 = 0 \ \text{ και } B \circ C = I.$$

Από το τελευταίο έπεται

$$C = I \circ C = (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = A \circ I = A. \tag{2.7}$$

Έτσι $A = C$ και κατά συνέπεια η B είναι η τυπική αντίστροφη της A. □

Γενικά ο υπολογισμός του συναρτησιακού αντίστροφου, λόγω της πολυπλοκότητας των πράξεων, είναι αρκετά δύσκολος.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε τους πρώτους όρους του συναρτησιακού αντίστροφου της τυπικής γεννήτριας $A(z) = z + z^3$.
Η $A(z)$ είναι πολυώνυμο και άρα υπάρχει ο συναρτησιακός αντίστροφος, έστω $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, τέτοιος ώστε $(AoB)(z) = (BoA)(z) = z$
$(AoB)(z) = z \Rightarrow B(z) + (B(z))^3 = z \Rightarrow (b_0 + b_1 z + \cdots) + (b_0 + b_1 z + \cdots)^3 = z$.
Κατόπιν πράξεων προκύπτει ότι:
$b_{2n} = 0,\ n = 0, 1, ...,\ b_1 = 1,\ b_3 = -1,\ b_5 = 3, \ldots$

Έστω ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, η οποία αντιστοιχεί στην τυπική γεννήτρια $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία με όρους $(\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, ...)$, τότε αυτή αντιστοιχεί στην τυπική γεννήτρια $\alpha_1 z^0 + 2\alpha_2 z^1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}$. Η τελευταία σχέση θυμίζει τη μορφή της παραγώγου μιας συνήθους δυναμοσειράς.

Ορισμός 14. ***Παράγωγος τυπικής γεννήτριας***
Η παράγωγος της τυπικής δυναμοσειράς $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ είναι η τυπική δυναμοσειρά

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, ...).$$

Για την τυπική παράγωγο ισχύουν οι συνήθεις ιδιότητες της παραγώγου.
Παράδειγμα 1: Αν $A'(z) = 0$ τότε $A(z) = c$, c σταθερά.

Πράγματι,από τον ορισμό

$$\begin{aligned} A'(z) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} = 0 \\ \text{ή ισοδύναμα} \quad (\alpha_1, 2\alpha_2, ...) &= (0, 0, ...) \\ \text{δηλαδή} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0 &\Leftrightarrow \alpha_n = 0, n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Άρα $A(z) = \alpha_0$=σταθερά.

Παράδειγμα 2: Αν $A'(z) = A(z)$ τότε $A(z) = ce^z$.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον ορισμό

$$A'(z) = A(z) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές

$$[z^n]\{\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}\} = [z^n]\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n\}$$

από το οποίο προκύπτει

$$(n+1)\alpha_{n+1} = \alpha_n \text{ ή ισοδύναμα } \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\alpha_n}.$$

Δηλαδή

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\frac{1}{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\alpha_{n-2} = \ldots = \frac{1}{n!}\alpha_0.$$

Άρα

$$A(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha_0 z^n = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \displaystyle\frac{z^n}{n!} = \alpha_0 e^z.$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω ιδιότητες των τυπικών γεννητριών εξάγονται, λόγω του ορισμού και της μορφής τους, μέσω των ιδιοτήτων των ακολουθιών για τις αντίστοιχες 'κλασικές' δυναμοσειρές, χωρίς όπως έχουμε ήδη αναφέρει να θέτουμε ζητήματα σύγκλισης. Βασιζόμενοι στην ιδέα αυτή θα αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένες ακόμα βασικές ιδιότητές τους.

Λογισμός τυπικών γεννητριών

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\{\alpha_n\} \longleftrightarrow A(z)$ για να δηλώσουμε ότι η $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ είναι η τυπική γεννήτρια της ακολουθίας $\{\alpha_n\}$.
Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\{\alpha_{n+k}\} \longleftrightarrow \dfrac{A(z) - \alpha_0 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+k} z^n &= \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n z^{n-k} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n z^n \\ &= \frac{1}{z^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n z^n\right).\\ \text{Δηλ.} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+k} z^n &= \frac{A(z) - \alpha_0 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_{k-1} z^{k-1}}{z^k}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα:΄Οπως έχουμε ήδη δείξει $\{1_{(n)}\} \longleftrightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$.
Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα

$$\{1_{(n+2)}\} \longleftrightarrow \frac{A(z) - \alpha_0 - \alpha_1 z}{z^2} = \frac{\frac{1}{1-z} - 1 - z}{z^2} = \frac{1 - (1+z)(1-z)}{z^2(1-z)} = \frac{1}{1-z}.$$

Γενικά

$$\begin{aligned}\{1_{(n+k)}\} &\longleftrightarrow \frac{A(z) - \alpha_0 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_{k-1} z^{k-1}}{z^k} \\ &= \frac{\frac{1}{1-z} - (1 + z + \cdots + z^{k-1})}{z^k} = \frac{1 - (1 - z^k)}{z^k(1-z)} = \frac{1}{1-z} = A(z).\end{aligned}$$

2. $\{n\alpha_n\} \longleftrightarrow (zD)A(z)$ ή γενικότερα $\{n^k \alpha_n\} \longleftrightarrow (zD)^k A(z)$

όπου ο συμβολισμός $(zD)A(z)$ σημαίνει ότι πρώτα παραγωγίζουμε την $A(z)$ ως προς z και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με z. Ανάλογα $(zD)^k$ σημαίνει ότι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία παραγώγιση-πολλαπλασιασμός διαδοχικά k φορές.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} = zA'(z) = (zD)A(z).$$

Με επανάληψη της διαδικασίας δύο φορές παίρνουμε διαδοχικά

$$D(A(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} \Longrightarrow (zD)A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n z^n \Longrightarrow$$
$$D((zD)A(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha_n z^{n-1} \Longrightarrow (zD)^2(A(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha_n z^n.$$

Άρα

$$\{n^2\alpha_n\} \longleftrightarrow (zD)^2(A(z)).$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά προκύπτει γενικά η ιδιότητα

$$\{n^k\alpha_n\} \longleftrightarrow (zD)^k A(z).$$

Παράδειγμα: Γνωρίζουμε ότι $\{1\} \longleftrightarrow A(z) = \frac{1}{1-z}$. Έστω $B(z)$ η τυπική γεννήτρια της ακολουθίας $\{n \cdot 1\}$, δηλαδή $\{n\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow B(z)$. Τότε εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει

$$B(z) = (zD)A(z) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

δηλ. $$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

3. Γενίκευση της παραπάνω ιδιότητας: Αν $f(n)$ πολυώνυμο τότε

$$\{f(n)\alpha_n\} \longleftrightarrow f(zD)(A(z)).$$

Παράδειγμα: $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z.$

Τότε

$$\begin{aligned} \left\{\frac{(3n^2+2n+1)}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty} &\longleftrightarrow \{3(zD)^2 + 2(zD) + 1\}A(z) \\ &= 3(ze^z + z^2e^z) + 2(ze^z) + e^z = (3z^2+5z+1)e^z. \end{aligned}$$

4. Αν $\{\alpha_n\} \longleftrightarrow A(z)$ και $\{b_n\} \longleftrightarrow B(z)$ τότε

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_{n-k}\right\} \longleftrightarrow A(z)B(z),$$

το οποίο προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των τυπικών γεννητριών $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$.

Παράδειγμα: Σε προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε ότι $\{n\} \longleftrightarrow A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$.
Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\left\{\frac{1}{n!}\right\} \longleftrightarrow B(z) = e^z$. Άρα

$$A(z)B(z) = \frac{ze^z}{(1-z)^2} \longleftrightarrow \left\{\sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{(n-k)!}\right\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n-k)!}\right\}.$$

5. Γενικά για τον πολλαπλασιασμό περισσότερων τυπικών δυναμοσειρών ισχύει ότι:
Αν $A_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{1n} z^n$, $A_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} z^n$, ..., $A_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{Nn} z^n$, τότε

$$\left\{\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_N=n} \alpha_{1i_1}\alpha_{2i_2}\ldots\alpha_{Ni_N}\right\} \longleftrightarrow A_1(z)A_2(z)\ldots A_N(z).$$

Παράδειγμα: Αν $A_1(z) = A_2(z) = \cdots = A_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, τότε

$$\frac{1}{(1-z)^N} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z}\cdots\frac{1}{1-z} \longleftrightarrow \left\{\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_N=n} 1\cdots 1\right\} = \binom{N+n-1}{n}.$$

6. $\left\{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\right\} \longleftrightarrow \dfrac{A(z)}{1-z}$.

Πράγματι,

$$\frac{A(z)}{1-z} = A(z)\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{I\delta 5}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^n.$$

Άρα

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right\} \longleftrightarrow \frac{A(z)}{1-z}.$$

Παράδειγμα: Όπως έχουμε ορίσει $\left\{\dfrac{1}{n!}\right\} \longleftrightarrow A(z) = e^z$.
Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \longleftrightarrow \frac{A(z)}{1-z} = \frac{e^z}{1-z}.$$

2.2 Αναλυτική Θεωρία γεννητριών

Η αναλυτική θεωρία των δυναμοσειρών, σε αντίθεση με την τυπική, για την εξαγωγή συμπερασμάτων απαιτεί οι εμπλεκόμενες σε κάθε πρόβλημα δυναμοσειρές να συγκλίνουν και εξετάζει που συμβαίνει αυτό. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε διάφορους ορισμούς καθώς και ορισμένες αναλυτικές ιδιότητες των δυναμοσειρών που θα μας χρησιμεύσουν παρακάτω.

Ορισμός 15. *Δυναμοσειρά με κέντρο* $z_0 \in \mathbb{C}$ *λέγεται κάθε σειρά της μορφής* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $\alpha_n \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$.

Ορισμός 16. *Μια συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{C},\ \ A \subseteq \mathbb{C}$ *λέγεται αναλυτική σε ένα σημείο* z_0 *του* A, *αν υπάρχει* $\varpi(z_0)$, *περιοχή του* z_0, *τέτοια ώστε η* f *να παραγωγίζεται σε κάθε* $z \in \varpi(z_0)$.

Ισοδύναμα η f είναι αναλυτική στο z_0 αν μπορεί να αναλυθεί σε δυναμοσειρά με κέντρο το z_0, δηλαδή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ σε ένα δίσκο $\{z : |z - z_0| < \rho\}$ για κάποιο $\rho > 0$. Οι συντελεστές α_n της σειράς δίνονται ως:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Ορισμός 17. *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ *μια δυναμοσειρά με* $\alpha_n \in \mathbb{C},\ n = 0, 1, \ldots$ *Ο αριθμός*

$$R = sup\{r : r \geq 0 \ \ \textit{και} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| r^n < \infty)\}$$

λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Ορισμός 18. *Έστω ακολουθία πραγματικών αριθμών* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. *Λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός* L *είναι το limit superior (ελάχιστο άνω φράγμα) της ακολουθίας* $\{x_n\}$ *αν:*

(a) *Το* L *είναι πεπερασμένο και*

  (i) *για κάθε* $\epsilon > 0$ *όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, ικανοποιούν τη σχέση* $x_n < L + \epsilon$

  (ii) *για κάθε* $\epsilon > 0$ *άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας ικανοποιούν τη σχέση* $x_n > L - \epsilon$

(b) *το* $L = +\infty$ *και για κάθε* $M > 0$, *υπάρχει ένα* n *τέτοιο ώστε* $x_n > M$

(c) *το* $L = -\infty$ *και για κάθε* m, *μόνο πεπερασμένο πλήθος όρων ικανοποιούν τη σχέση* $x_n > m$.

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός R εκφράζεται συναρτήσει των συντελεστών της σειράς μέσω της σχέσης

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα z με $|z| < R$ και αποκλίνει για όλα τα z με $|z| > R$.(Για απόδειξη βλέπε Σ.Νεγρεπόντης,(1993)).

Ορισμός 19. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική μη μηδενική συνάρτηση και $\alpha \in \Omega$ ρίζα της f. Τότε ο φυσικός αριθμός m για τον οποίο $f(z) = (z-\alpha)^m h(z)$, $h(\alpha) \neq 0$, h αναλυτική συνάρτηση στο Ω, λέγεται τάξη της ρίζας α (ή λέμε ότι η f έχει ρίζα τάξης m στο α).*

Από τον ορισμό της ακτίνας σύγκλισης R μιας δυναμοσειράς, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του *limit superior*, προκύπτει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ όλοι οι όροι της ακολουθίας $\{|\alpha_n|^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, ικανοποιούν τη σχέση

$$|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R} + \epsilon.$$

Έτσι υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall\ \epsilon > 0$ και $\forall\ n > N$, $\ |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R} + \epsilon$. Άρα

$$|\alpha_n| < \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n, \quad \forall\ n > N.$$

Σκεπτόμενοι ανάλογα

$$|\alpha_n| \geq \left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)^n, \text{για άπειρα } n.$$

Θεώρημα 9. *(Τύπος του Cauchy)*

Έστω αναλυτική συνάρτηση $A : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το μηδέν. Τότε η $A(z)$ αναλύεται σε δυναμοσειρά $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ με συντελεστές

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A(z)}{z^{n+1}}dz\ ,\ n = 0, 1, ...$$

όπου γ οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη γύρω από το μηδέν η οποία βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στην περιοχή στην οποία η $A(z)$ είναι αναλυτική.

Πόρισμα: (*Εκτιμήσεις Cauchy*)

Έστω αναλυτική συνάρτηση $A : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ οπότε η $A(z)$ αναλύεται σε δυναμοσειρά $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Αν $M(r) = \sup_{|z|\leq r} |A(z)| = \sup_{|z|=r} |A(z)|$ τότε

$$|\alpha_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}\ ,\ n = 0, 1, ... \quad 0 < r < R.$$

Απόδειξη:

Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A(z)}{z^{n+1}}dz\ ,\ n = 0, 1, ...$$

Παρατηρούμε ότι $|\frac{A(z)}{z^{n+1}}| \leq \frac{M(r)}{r^{n+1}}, \quad z \in \{z :\ |z| = r\}$.

Επομένως παίρνοντας για γ τον κύκλο ακτίνας r, δηλαδή $\gamma(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ έχουμε

$$|\alpha_n| = |\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A(z)}{z^{n+1}}dz| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}. \qquad \square$$

Έστω ότι διαθέτουμε τρεις αναλυτικές συναρτήσεις σε σύνολα που διαθέτουν σημείο συσσώρευσης, οπότε αυτές αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές, έστω $A(z),\ B(z),\ C(z)$. Αν $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, τότε όπως και στις τυπικές σειρές, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $A(z) = B(z) \iff \alpha_n = b_n,\ n = 0, 1, ...$
2. $C(z) = A(z) + B(z) \iff c_n = \alpha_n + b_n,\ n = 0, 1, ...$
3. $C(z) = A(z)B(z) \iff c_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_{n-k},\ n = 0, 1, ...$
4. Η $A(z)$ είναι παραγωγίσιμη και $A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}$ όπου η $A'(z)$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $A(z)$.

2.3 Θεωρία Πιθανογεννητριών

Ορισμός 20. *Έστω διακριτή, μη αρνητική, ακέραια τυχαία μεταβλητή X και (p_n) η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας. Ορίζουμε ως πιθανογεννήτρια συνάρτηση της X ή της αντίστοιχης κατανομής την*

$$P(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

η οποία συγκλίνει απόλυτα τουλάχιστον για $|z| \leq 1$.

Επειδή η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\{z : |z| < 1\}$, μπορούμε να παραγωγίσουμε εναλλάσσοντας τις πράξεις της παραγώγισης και της άθροισης.
Οι πιο σημαντικές ιδιότητες των πιθανογεννητριών συναρτήσεων είναι:

i. Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ πιθανογεννητριών και συναρτήσεων πιθανότητας. Συγκεκριμένα, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση πιθανότητας $\{p_n\}$ μέσω της σχέσης

$$P[X = n] = p_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(0), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

και αντίστροφα.

ii. Οι ροπές της τ.μ. X υπολογίζονται με διαδοχικές παραγωγίσεις της αντίστοιχης πιθανογεννήτριας συνάρτησης $P(z)$. Συγκεκριμένα, αν $E(|X^k|) < \infty$ τότε ορίζεται η $P^{(k)}(1)$ και η παραγοντική ροπή k-τάξης της τ.μ. X δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{(k)} = E[X_{(k)}] = E[X(X-1)...(X-k+1)] = P^{(k)}(1).$$

Έτσι, η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X υπολογίζονται ως

$$E[X] = E[X_{(1)}] = P^{(1)}(1)$$

$$Var[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 = P^{(2)}(1) + P^{(1)}(1) - (P^{(1)}(1))^2.$$

Η r-τάξης ροπή μιας μη αρνητικής τ.μ. X, $\mu_r' = E[X^r]$, μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει των παραγοντικών ροπών $\mu_{(k)}$ της X. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$\mu_r' = \sum_{k=1}^{r} S(r,k)\mu_{(k)}, \quad r = 1, 2, ...$$

όπου $S(r,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^r$ είναι ο αριθμός του Stirling δεύτερου είδους.
Έτσι, π.χ. $X^3=X_{(3)}+3X_{(2)}+X_{(1)}$ και άρα

$$\mu_3^{'}=\mu_{(3)}+3\mu_{(2)}+\mu_{(1)}.$$

Ομοίως

$$\mu_4^{'}=\mu_{(4)}+6\mu_{(3)}+7\mu_{(2)}+\mu_{(1)}.$$

(Για περισσότερα βλέπε Χαραλαμπίδης(1999).)

iii. Αν $X_j, j=1,2,...,n$ είναι μη αρνητικές, ακέραιες, ανεξάρτητες τ.μ. με πιθανογεννήτριες $P_{X_j}(z), j=1,2,...,n$ τότε η πιθανογεννήτρια $P_{S_n}(z)$ του αθροίσματος $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ δίνεται από τη σχέση

$$P_{S_n}(z)=P_{X_1}(z)P_{X_2}(z)...P_{X_n}(z).$$

iv. Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ διακριτές, ακέραιες, μη αρνητικές τ.μ. με πιθανογεννήτριες συναρτήσεις $P_{X_1}(z),P_{X_2}(z),\ldots,P_{X_n}(z)$ αντίστοιχα. Επιπλέον υποθέτουμε ότι με πιθανότητα p_i η τ.μ. X ισούται με την τ.μ. X_i, $i=1,2,...,n$, με $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ δηλ.

$$X=\begin{cases} X_1, & \text{με πιθανότητα } p_1\\ X_2, & \text{με πιθανότητα } p_2\\ \vdots & \\ X_n, & \text{με πιθανότητα } p_n.\end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι

$$P_X(z)=p_1P_{X_1}(z)+p_2P_{X_2}(z)+\cdots+p_nP_{X_n}(z).$$

v. Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων ακέραιων, μη αρνητικών τ.μ. με κοινή πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_X(z)$ και N μία μη αρνητική ακέραια τ.μ., ανεξάρτητη από τις X_i, με πιθανογεννήτρια $P_N(z)$. Τότε για το τυχαίο άθροισμα $S_N=X_1+...+X_N$ η πιθανογεννήτρια $P_{S_N}(z)$ δίνεται ως σύνθεση των πιθανογεννητριών συναρτήσεων $P_N(z)$, $P_X(z)$, δηλαδή υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{S_N}(z)=P_N(P_X(z)).$$

Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων βλέπε "Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές" Χαράλαμπου Α. Χαραλαμπίδη, (1999).

Στη συνέχεια παραθέτονται οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις μερικών βασικών κατανομών.

κατανομή	συνάρτηση πιθανότητας	πιθ/τρια συνάρτηση
Διωνυμική $Bin(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 1, ..., n$	$P(z) = (pz + 1 - p)^n$
Γεωμετρική $Geo(1-p)$	$p_k = p(1-p)^{k-s},\ k \geq s$	$P(z) = \frac{pz^s}{1-(1-p)z}$
Poisson(λ)	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k \geq 0$	$P(z) = e^{-\lambda(1-z)}$
Pascal(r, p)	$p_k = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r},\ k \geq r$	$P(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} z^k$

Παρακάτω αποδεικνύονται οι παραπάνω τύποι των πιθανογεννητριών συναρτήσεων ξεχωριστά για κάθε κατανομή.

1. Έστω X μη αρνητική τ.μ. η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p). Τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση υπολογίζεται ως εξής:
   $P(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + zp)^n$.

2. Έστω X μη αρνητική τ.μ. η οποία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και συνάρτηση πιθανότητας $p_k = (1-p)p^{k-s},\ k \geq s$. Τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση υπολογίζεται ως εξής:
   $P(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \sum_{k=s}^{\infty} z^k (1-p) p^{k-s} = (1-p) z^s \sum_{k=s}^{\infty} (zp)^{k-s} = (1-p) z^s \frac{1}{1-pz} = \frac{(1-p)z^s}{1-pz}$.

3. Έστω $X \sim Poisson(\lambda)$ και $P(z)$ η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια. Τότε
   $P(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \sum_{k=s}^{\infty} z^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{-\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$.

4. Έστω $X \sim Pascal(r, p)$ και $P(z)$ η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια. Τότε
   $$P(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \sum_{k=r}^{\infty} z^k \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{k-r} p^r (1-p)^{k-r} z^k,$$
   όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\binom{k-1}{r-1} = \binom{k-1}{k-r}$.

Παρατήρηση: Έστω $X_i, i = 1, ..., n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και $X_i \sim Bernoulli(p)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (iii) των πιθανογεννητριών για την τ.μ. $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ προκύπτει ότι

$$P_Y(z) = P_{X_1}(z)...P_{X_n}(z) = (P_X(z))^n = (pz + 1 - p)^n.$$

Δηλαδή $Y \sim Bin(n, p)$.

Εφαρμόζουμε την ίδια ιδιότητα στην περίπτωση που οι $X_i,\ i = 1, ..., r$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και $X_i \sim Geo(1 - p)$ με συνάρτηση πιθανότητας $p_k = p(1 - p)^{k-1},\ k \geq 1$. Τότε η πιθανογεννήτρια είναι $P_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$, ενώ η αντίστοιχη για την τ.μ. $Y = X_1 + X_2 + ... + X_r$ είναι

$$\begin{aligned} P_Y(z) &= P_{X_1}(z)...P_{X_r}(z) = (P_X(z))^r = \Big(\frac{pz}{1-(1-p)z}\Big)^r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (pz)^r((1-p)z)^k = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{k-r} p^r (1-p)^{k-r} z^k \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} z^k \end{aligned}$$

δηλαδή $Y \sim Pascal(r, p)$.

Σε αρκετές εφαρμογές δεν είναι δυνατός ο άμεσος υπολογισμός κατανομών πιθανότητας με χρήση στοιχειωδών πιθανοτήτων. Για το λόγο αυτό, συχνά για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων καταφεύγουμε στον υπολογισμό των πιθανογεννητριών συναρτήσεων και στη συνέχεια μέσω αυτών προσπαθούμε να εξάγουμε αναλυτικό τύπο για τις αντίστοιχες πιθανότητες. Βέβαια παρόλο που ο υπολογισμός της πιθανογεννήτριας μπορεί να είναι σε ορισμένες περιπτώσεις απλός, η εξαγωγή αναλυτικού τύπου για τις αντίστοιχες πιθανότητες μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκη.

Κεφάλαιο 3

Αλγεβρικές Τεχνικές

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η παρουσίαση αλγεβρικών μεθόδων για τον υπολογισμό είτε επακριβώς της συνάρτησης πιθανότητας μιας τ.μ. είτε μιας αναδρομικής σχέσης, δεδομένου ότι γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση.

3.1 Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην περίπτωση που η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλαδή της μορφής $P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, όπου $N(z)$ και $D(z)$ είναι πολυώνυμα βαθμού r και l αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι $N(z),\ D(z)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, ενώ ο παρανομαστής $D(z)$ έχει s ρίζες $z_1, z_2, ..., z_s$ με πολλαπλότητες $m_1, m_2, ..., m_s$ αντίστοιχα, $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = l$.

Αν $r \geq l$ τότε $P(z) = Q(z) + \dfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}$, όπου $deg(\widetilde{N(z)}) < deg(D(z))$.

Αν $r < l$ τότε $Q(z) = 0$ και $P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, όπου $deg(N(z)) < deg(D(z))$.
Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας θα αναφερόμαστε στη γενική περίπτωση που $r \geq l$.
Σύμφωνα με τη μέθοδο ο όρος $\dfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}$ επιδέχεται την εξής ανάλυση:

$$
\begin{aligned}
\frac{\widetilde{N(z)}}{D(z)} &= \frac{A_{11}}{z-z_1}+\frac{A_{12}}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1m_1}}{(z-z_1)^{m_1}}\\
&+ \frac{A_{21}}{z-z_2}+\frac{A_{22}}{(z-z_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2m_2}}{(z-z_2)^{m_2}}\\
&+ \cdots\\
&+ \frac{A_{s1}}{z-z_s}+\frac{A_{s2}}{(z-z_s)^2}+\cdots+\frac{A_{sm_s}}{(z-z_s)^{m_s}}\\
&= \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{kj}}{(z-z_k)^j},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

όπου οι συντελεστές $A_{kj},\ k=1,...,s,\ j=1,...,m_k$ υπολογίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
A_{1m_1} &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)^{m_1}\tfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}\\
A_{1m_1-1} &= \lim_{z\to z_1}\tfrac{1}{1!}\tfrac{d}{dz}\left[(z-z_1)^{m_1}\tfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}\right]\\
&\vdots\\
A_{11} &= \lim_{z\to z_1}\tfrac{1}{(m_1-1)!}\tfrac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}}\left[(z-z_1)^{m_1}\tfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}\right].
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Ομοίως}\quad A_{2m_2} &= \lim_{z\to z_2}\left[(z-z_2)^{m_2}\tfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}\right]\\
&\vdots\\
A_{21} &= \lim_{z\to z_1}\tfrac{1}{(m_2-1)!}\tfrac{d^{m_2-1}}{dz^{m_2-1}}\left[(z-z_2)^{m_2}\tfrac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}\right].
\end{aligned}
$$

$$
\text{Γενικά}\qquad A_{kj}=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{(m_k-j)!}\frac{d^{m_k-j}}{dz^{m_k-j}}\left[(z-z_k)^{m_k}\frac{\widetilde{N(z)}}{D(z)}\right],\quad k=1,...,s,\ j=1,...,m_k. \tag{3.3}
$$

Επιπλέον έστω $Q(z)=\sum_{n=0}^{r}q_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}q_nz^n,\quad q_n=0,\ n>r$. Υπενθυμίζουμε ότι $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n$ και $\dfrac{1}{(1-z)^j}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{j+n-1}{n}z^n$.

Άρα

$$
[z^n]P(z)=[z^n]Q(z)+[z^n]\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{kj}}{(z-z_k)^j}.
$$

Ή ισοδύναμα

$$
p_n=q_n+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}A_{kj}(-1)^j\binom{j+n-1}{n}\left(\frac{1}{z_k}\right)^{n+j},\quad n\geq 0. \tag{3.4}
$$

Το τελευταίο προέκυψε ως εξής:

$$[z^n]\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{kj}}{(z-z_k)^j}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}A_{kj}[z^n]\frac{1}{(z-z_k)^j}.$$

$$
\begin{aligned}
\text{Όμως}\qquad \frac{1}{(z-z_k)^j} &= \frac{1}{\left[-z_k\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\right]^j}=\left(-\frac{1}{z_k}\right)^j\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^j}\\
&= \left(-\frac{1}{z_k}\right)^j\sum_{n=0}^{\infty}\binom{j+n-1}{n}\left(\frac{1}{z_k}\right)^n z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^j\binom{j+n-1}{n}\left(\frac{1}{z_k}\right)^{n+j}z^n. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Άρα $[z^n]\dfrac{1}{(z-z_k)^j}=(-1)^j\dbinom{j+n-1}{n}\left(\dfrac{1}{z_k}\right)^{n+j}.$

3.1.1 Εφαρμογή: Πρόβλημα Συλλογής Κουπονιών

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τ διαφορετικοί τύποι κουπονιών και κάθε φορά που αποκτούμε ένα κουπόνι είναι το ίδιο πιθανό να είναι οποιουδήποτε από τους τ τύπους. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των κουπονιών που χρειάζεται να συγκεντρώσουμε μέχρι να αποκτήσουμε ένα από κάθε ένα από τα τ διαφορετικά κουπόνια. Έτσι, αν συμβολίσουμε με X την τυχαία μεταβλητή του αριθμού των κουπονιών μέχρι να συλλέξουμε τα τ κουπόνια, ζητάμε την κατανομή της X, έστω $p_n=P(X=n),\ n=0,1,....$

Ορίζουμε τις τ.μ. $Y_i,\ i=1,...,\tau$, όπου Y_i εκφράζει τον αριθμό των επιπλέον κουπονιών που χρειάζεται να αποκτήσουμε, αν διαθέτουμε $(i-1)$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι να τα αυξήσουμε σε i. Τότε προφανώς

$$X=Y_1+\cdots+Y_\tau, \qquad (3.6)$$

όπου οι τ.μ. $Y_1,\cdots,Y_\tau$ είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον $Y_1=1$.

Αν διαθέτουμε $(i-1)$ κουπόνια, τότε με πιθανότητα $\dfrac{i-1}{\tau}$ αποκτούμε ένα από αυτά που ήδη έχουμε και αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως αποτυχία. Την πρώτη φορά που θα βρούμε κάποιο από τα $\tau-(i-1)$ που μας λείπουν για να συμπληρώσουμε τα τ, με πιθανότητα $\dfrac{\tau-(i-1)}{\tau}$, αυτό είναι επιτυχία. Το πλήθος των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία είναι ακριβώς η τιμή της τ.μ. Y_i. Άρα η τ.μ. $Y_i \sim Geom(\frac{i-1}{\tau})$, δηλ.

$$P(Y_i = n) = \left(\frac{i-1}{\tau}\right)^{n-1}\left(1-\frac{i-1}{\tau}\right),\ n \geq 1.$$

Οι πιθανογεννήτριες των τ.μ. $Y_i,\ i = 1, ..., \tau$ είναι:

$$P_{Y_1}(z) = z \tag{3.7}$$

$$P_{Y_i}(z) = \frac{\left(1-\frac{i-1}{\tau}\right)z}{1-\frac{i-1}{\tau}z}\ , \quad i = 2, ..., \tau. \tag{3.8}$$

Έτσι, σύμφωνα με τις ιδιότητες των πιθανογεννητριών συναρτήσεων που έχουμε ήδη αναφέρει, η πιθανογεννήτρια της τ.μ. X, $P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, δίνεται από τη σχέση:

$$P_X(z) = P_{Y_1}(z) \cdots P_{Y_\tau}(z)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία τις (3.7), (3.8) προκύπτει

$$\begin{aligned} P_X(z) &= z\,\frac{\frac{\tau-1}{\tau}z}{1-\frac{z}{\tau}}\,\frac{\frac{\tau-2}{\tau}z}{1-\frac{2z}{\tau}}\cdots\frac{\frac{1}{\tau}z}{1-\frac{\tau-1}{\tau}z} \\ \text{ή}\quad P_X(z) &= z^\tau\,\frac{\tau!}{\tau^\tau}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\left(1-\frac{2z}{\tau}\right)\cdots\left(1-\frac{\tau-1}{\tau}z\right)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Θέτουμε $A(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\left(1-\frac{2z}{\tau}\right)\cdots\left(1-\frac{\tau-1}{\tau}z\right)}$. Σύμφωνα με τη μέθοδο της ανάλυσης σε απλά κλάσματα που αναπτύξαμε παραπάνω, αυτό αναλύεται ως εξής:

$$A(z) = \frac{a_1}{1-\frac{z}{\tau}} + \frac{a_2}{1-\frac{2z}{\tau}} + \cdots \frac{a_{\tau-1}}{1-\frac{\tau-1}{\tau}z} = \sum_{i=1}^{\tau-1}\frac{a_i}{1-\frac{iz}{\tau}}. \tag{3.10}$$

Οι συντελεστές α_i, σύμφωνα με τη σχέση (3.3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι όλες οι ρίζες του παρανομαστή είναι απλές, δηλαδή έχουν πολλαπλότητα ένα, υπολογίζονται μέσω της σχέσης

$$a_i = \lim_{z\to\frac{\tau}{i}} A(z)\left(1-\frac{i}{\tau}z\right),\ i = 1, 2, ..., \tau-1.$$

Αντικαθιστώντας το $A(z)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} a_i &= \prod_{j=1, j\neq i}^{\tau-1}\left(1-\frac{jz}{\tau}\right)^{-1}\Bigg|_{z=\frac{\tau}{i}} = \prod_{j=1, j\neq i}^{\tau-1}\left(1-\frac{j}{i}\right)^{-1} \\ &= \frac{i^{\tau-2}}{(i-1)!(\tau-i-1)!(-1)^{\tau-i-1}},\ i = 1, 2, ..., \tau-1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Έτσι, η (3.10), λόγω της (3.11), γίνεται

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{i=1}^{\tau-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_i \left(\frac{i}{\tau}\right)^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{i^{\tau-2}}{(i-1)!(\tau-i-1)!(-1)^{\tau-i-1}} \left(\frac{i}{\tau}\right)^n z^n. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, η πιθανογεννήτρια που δίνεται από την (3.9) γράφεται στη μορφή

$$
P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{\tau!}{\tau^\tau} \frac{i^{\tau-2}}{(i-1)!(\tau-i-1)!(-1)^{\tau-i-1}} \left(\frac{i}{\tau}\right)^n z^{n+\tau}. \qquad (3.13)
$$

Τελικά, η ζητούμενη κατανομή, προκύπτει από την (3.13) ως εξής:

$$
\begin{aligned}
p_n &= P[X=n] = [z^n]P_X(z) \\
&= [z^{n-\tau}] \left\{ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{\tau!}{\tau^\tau} \frac{i^{\tau-2}}{(i-1)!(\tau-i-1)!(-1)^{\tau-i-1}} \left(\frac{i}{\tau}\right)^n z^n \right\}
\end{aligned}
$$

ή ισοδύναμα

$$
p_n = \sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{\tau!}{\tau^\tau} \frac{i^{\tau-2}}{(i-1)!(\tau-i-1)!(-1)^{\tau-i-1}} \left(\frac{i}{\tau}\right)^{n-\tau}, \; n \geq \tau. \qquad (3.14)
$$

Συμπερασματικά, δείξαμε ότι η κατανομή του αριθμού των κουπονιών που θα χρειαστούν, μέχρι να συλλέξουμε ένα από το κάθε ένα από τα τ διαφορετικά είδη, είναι

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{\tau!}{\tau^\tau} \sum_{i=1}^{\tau-1} \alpha_i \left(\frac{i}{\tau}\right)^{n-\tau}, \; n \geq \tau \\
p_n &= 0, \; n < \tau,
\end{aligned}
$$

όπου οι συντελεστές α_i δίνονται από τη σχέση (3.11).

3.1.2 Εφαρμογή: Οι $M/E_s/1$ και $M^c/M/1$ Ουρές

Στην περίπτωση της $M/E_s/1$, αναφερόμαστε σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων έχουν την εκθετική (λ) κατανομή ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν τη *Γαμμα*$(s, s\mu)$ κατανομή και διαθέτει ένα υπηρέτη. Για την περιγραφή του συστήματος θεωρούμε ότι κάθε εξυπηρέτηση αποτελείται από s φάσεις, όπου οι χρόνοι παραμονής σε κάθε φάση είναι ανεξάρτητες και ισόνομες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο $(s\mu)$. Έτσι, η εξυπηρέτηση κάθε πελάτη αρχίζει με τη φάση 1, ενώ όταν αυτή τελειώσει αρχίζει αμέσως η φάση 2, κοκ.

Η εξυπηρέτηση θεωρείται ολοκληρωμένη όταν τελειώσει και η τελευταία φάση s, οπότε ο πελάτης αναχωρεί από το σύστημα και ένας νέος πελάτης αρχίζει την πρώτη φάση της εξυπηρέτησής του, εφόσον το σύστημα δεν είναι κενό.

Το σύστημα περιγράφεται από μια διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου

$\{(Q(t), S(t),\ t \geq 0)\}$, όπου

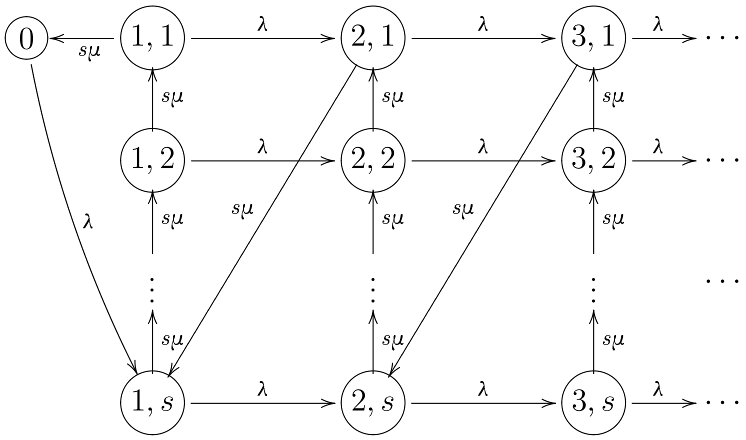
$Q(t)$: το μήκος της ουράς τη στιγμή t και

$S(t)$: το πλήθος των φάσεων που απομένουν μέχρι να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται τη στιγμή t.

Με βάση την περιγραφή αυτή ο χώρος καταστάσεων της Μ.α.σ.χ. είναι

$$S = \{(n, i),\ n = 0, 1, ...,\ \ i = 1, 2, ..., s\}$$

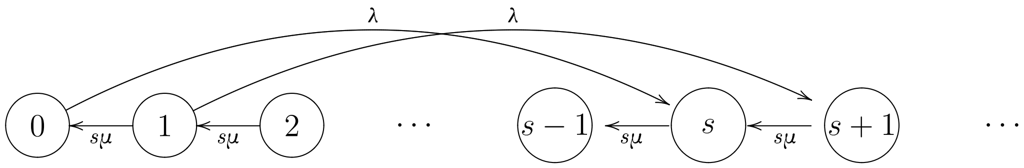
και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Μια απλούστερη Μαρκοβιανή περιγραφή επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε για κάθε $t \geq 0$, το συνολικό αριθμό υπολοιπόμενων φάσεων εξυπηρέτησης, έστω $M(t)$, για όλους τους πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t. Προφανώς οι τ.μ. $M(t),\ Q(t),\ S(t)$ συνδέονται με τη σχέση

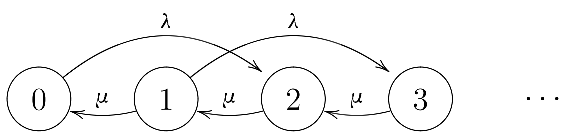
$$M(t) = \begin{cases} s\ max(Q(t)-1, 0) + (s+1-S(t)), & \text{αν } Q(t) > 0 \\ 0 & \text{αν } Q(t) = 0. \end{cases}$$

Η μονοδιάστατη στοχαστική διαδικασία $\{M(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια Μ.α.σ.χ. με χώρο καταστάσεων $S = \mathbb{N}_0$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Παρατηρούμε ότι η σ.δ. $\{M(t),\ t \geq 0\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια $M^c/M/1$ Ουρά, δηλαδή ένα σύστημα με ομαδικές αφίξεις πελατών σταθερού μεγέθους s και χρόνους εξυπηρέτησης εκθετικούς($s\mu$). Θα μελετήσουμε την τελευταία στην ειδική περίπτωση που οι πελάτες φθάνουν σε ομάδες μεγέθους 2. (Το οποίο είναι ισοδύναμο με τη $M/E_2/1$ Ουρά όπου η εξυπηρέτηση κάθε πελάτη ολοκληρώνεται σε δύο φάσεις.).

Ας θεωρήσουμε την $M^c/M/1$ Ουρά, δηλαδή ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson(λ) σε ομάδες των δύο ατόμων. Το σύστημα διαθέτει έναν υπηρέτη και ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη είναι εκθετικός(μ). Αν $Q(t)$ είναι το μήκος της Ουράς τη στιγμή t, τότε η σ.δ. $\{Q(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια Μ.α.σ.χ. με χώρο καταστάσεων $\mathbb{N}_0$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Έστω (p_n) η στάσιμη κατανομή, όταν υπάρχει και $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \tag{3.15}$$

$$(\lambda + \mu) p_1 = \mu p_2 \tag{3.16}$$

$$(\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-2} + \mu p_{n+1}, \quad n \geq 2. \tag{3.17}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη n-οστή εξίσωση με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n = 0, 1, ...$ προκύπτει:

$$(\lambda + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \mu p_0 = \lambda \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-2} z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n.$$

Η τελευταία ισοδύναμα γράφεται

$$(\lambda + \mu) P(z) - \mu p_0 = \lambda z^2 P(z) + \frac{\mu}{z}(P(z) - p_0)$$

από την οποία τελικά προκύπτει ότι η πιθανογεννήτρια δίνεται από τη σχέση

$$P(z) = \frac{\mu p_0}{\mu - \lambda z - \lambda z^2}. \tag{3.18}$$

Θέτοντας $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ η (3.18) γράφεται ως:

$$P(z) = \frac{p_0}{1 - \rho z - \rho z^2}. \tag{3.19}$$

Επιπλέον από την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = P(1) = 1$. Έτσι, θέτοντας στην παραπάνω σχέση $z = 1$ και λύνοντας ως προς p_0 προκύπτει ότι

$$p_0 = 1 - 2\rho \tag{3.20}$$

Αντικαθιστώντας στη (3.19) καταλήγουμε στη σχέση

$$P(z) = \frac{2\rho - 1}{\rho z^2 + \rho z - 1}. \tag{3.21}$$

Προφανώς θα πρέπει $p_0 > 0$ ή ισοδύναμα $\rho < \dfrac{1}{2}$. Αυτή είναι η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος. Έτσι, υπάρχει γνήσια στάσιμη κατανομή αν $\rho < \dfrac{1}{2}$, ενώ διαφορετικά $p_n = 0$, για κάθε $n \geq 0$.

Στην περίπτωση που $\rho < \dfrac{1}{2}$ παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής $\rho z^2 + \rho z - 1 = 0$ στην $P(z)$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες, έστω ρ_1, ρ_2, οπότε γράφεται $\rho z^2 + \rho z - 1 = \rho(z - \rho_1)(z - \rho_2)$. Η πιθανογεννήτρια είναι ρητή συνάρτηση και κατά συνέπεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Σύμφωνα με την τελευταία, η $P(z)$ επιδέχεται την εξής ανάλυση:

$$P(z) = \frac{A}{z - \rho_1} + \frac{B}{z - \rho_2}. \tag{3.22}$$

Οι σταθερές A, B ως γνωστό υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$A = \lim_{z \to \rho_1} P(z)(z - \rho_1) = \frac{2\rho - 1}{\rho(\rho_1 - \rho_2)} \tag{3.23}$$

$$\textit{και} \qquad B = \lim_{z \to \rho_2} P(z)(z - \rho_2) = \frac{2\rho - 1}{\rho(\rho_2 - \rho_1)}. \tag{3.24}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.22) παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{2\rho-1}{\rho(\rho_1-\rho_2)}\left(\frac{1}{z-\rho_1}-\frac{1}{z-\rho_2}\right)\\
&= \frac{2\rho-1}{\rho(\rho_1-\rho_2)}\left(-\frac{1}{\rho_1}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{\rho_1}}+\frac{1}{\rho_2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{\rho_2}}\right)\\
&= \frac{2\rho-1}{\rho(\rho_1-\rho_2)}\left(\frac{1}{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)^n z^n-\frac{1}{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^n z^n\right).
\end{aligned}
$$

$$
\text{Άρα}\quad p_n = [z^n]P(z)=\frac{2\rho-1}{\rho(\rho_1-\rho_2)}\left[\left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{n+1}\right],\ n\geq 0. \tag{3.25}
$$

Έτσι, με χρήση της μεθόδου της ανάλυσης σε απλά κλάσματα, υπολογίστηκε ακριβώς η στάσιμη κατανομή.

3.2 Επίλυση εξισώσεων διαφορών

Ορισμός 21. *Γραμμική εξίσωση διαφορών k-τάξης*
Μία αναδρομική σχέση της μορφής

$$z_{n+k} + a_1(n)z_{n+k-1} + a_2(n)z_{n+k-2} + \cdots + a_k(n)z_n = b_n$$

καλείται γραμμική εξίσωση διαφορών k-τάξης.

- Αν $b_n = 0$, για κάθε n, τότε η εξίσωση λέγεται ομογενής, ενώ διαφορετικά λέγεται μη ομογενής.
- Αν $a_i(n) = a_i$, για κάθε n, τότε λέγεται εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση $z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k = 0$ λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της εξίσωσης διαφορών.

π.χ. Η σειρά Fibonacci που αποτελείται από τους όρους $1, 1, 2, 3, 5, ...$ ορίζεται μέσω της σχέσης

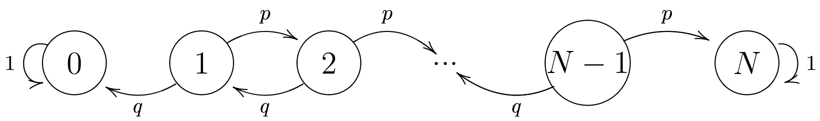
$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} - x_{n-2} &= 0,\ n \geq 2 \\ x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Η πρώτη είναι μια ομογενής γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με συντελεστές $a_1 = a_2 = -1$ και η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι $x^2 - x - 1 = 0$.

Η λύση των εξισώσεων αυτών δεν είναι μοναδική. Για να την κάνει κανείς μοναδική πρέπει να θέσει επιπλέον υποθέσεις. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να καθορίσει τις αρχικές συνθήκες $z_0, z_1, ..., z_{k-1}$. Τότε μιλάμε για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Η λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών είναι μοναδική. Είναι επίσης πιθανό να θέσουμε άλλες υποθέσεις. Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με δεδομένες τιμές σε δύο τερματικά σημεία z_0 και z_N. Τότε πρέπει να καθορίσουμε τα $z_1, ..., z_{N-1}$ δεδομένων των z_0, z_N. Τέτοιο πρόβλημα αναφέρεται ως πρόβλημα συνοριακών τιμών. Η λύση σ' ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να μην υπάρχει, αλλά ακόμα κι αν υπάρχει δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδική. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα: Πρόβλημα χρεοκοπίας του παίκτη

Ένας παίκτης ξεκινάει με 1 ευρώ να παίζει 'κορώνα - γράμματα' με ένα μη-αμερόληπτο κέρμα. Με πιθανότητα p εμφανίζεται κορώνα,οπότε ο παίκτης κερδίζει 1 ευρώ, ενώ με πιθανότητα $q = 1 - p$ εμφανίζονται γράμματα, οπότε ο παίκτης χάνει 1 ευρώ. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται είτε όταν ο παίκτης συγκεντρώσει N ευρώ και τότε θεωρείται νικητής είτε αν χρεοκοπήσει, δηλ. μείνει χωρίς χρήματα και τότε θεωρείται χαμένος. Τις καταστάσεις από τις οποίες περνάει ο παίκτης και τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ αυτών μπορούμε να τις παραστήσουμε στο παρακάτω διάγραμμα:



Έστω p_n η πιθανότητα να φτάσει στην κατάσταση N ξεκινώντας από την n. Εφαρμόζοντας την ανάλυση πρώτου βήματος για τις πιθανότητες p_n προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \quad p_N = 1 \\ p_n &= pp_{n+1} + qp_{n-1}, \quad n = 1, ..., N-1. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Η τελευταία ισοδύναμα γράφεται

$$pp_{n+1} - p_n + qp_{n-1} = 0. \tag{3.27}$$

Πρόκειται για μια ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έστω $P(z) = \sum_{n=0}^{N} p_n z^n$ η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων $(p_n)_{n=0,...,N}$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.27) με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n = 1, ..., N-1$ προκύπτει:

$$p \sum_{n=1}^{N-1} p_{n+1} z^n - \sum_{n=1}^{N-1} p_n z^n + q \sum_{n=1}^{N-1} p_{n-1} z^n = 0.$$

Η σχέση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της $P(z)$, γίνεται

$$\frac{p}{z}(P(z) - p_0 - p_1 z) - (P(z) - p_0 - p_N z^N) + qz(P(z) - p_{N-1} z^{N-1} - p_N z^N) = 0 \tag{3.28}$$

ή λόγω της (3.26)

$$(qz^2 - z + p)P(z) = pp_1 z + qp_{N-1} z^{N+1} - (1 - qz) z^{N+1}. \tag{3.29}$$

Θέτοντας στην τελευταία αρχικά $z = 1$ και στη συνέχεια $z = \dfrac{p}{q},\ p \neq q$ προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 0 &= pp_1 + qp_{N-1} - (1-q) \\ \text{και} \qquad 0 &= pp_1\frac{p}{q} + qp_{N-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{N+1} - (1-q\frac{p}{q})\left(\frac{p}{q}\right)^{N+1}. \end{aligned}$$

Λύνοντας το τελευταίο σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τις πιθανότητες p_1 και p_{N-1} παίρνουμε:

$$p_1 = \frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \tag{3.30}$$

$$\text{και} \qquad p_{N-1} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}. \tag{3.31}$$

Πλέον η πιθανογεννήτρια είναι πλήρως γνωστή και η (3.29) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{pp_1z + (qp_{N-1}-1)z^{N+1} + qz^{N+2}}{q(z-1)(z-\frac{p}{q})} \\ &= \frac{pp_1z + (qp_{N-1}-1)z^{N+1} + qz^{N+2}}{p(1-z)(1-\frac{q}{p}z)} && (3.32) \\ &= \frac{C(z)}{(1-z)(1-\frac{q}{p}z)} && (3.33) \end{aligned}$$

όπου τα $p_1,\ p_{N-1}$ δίνονται από τις (3.30) και (3.31) αντίστοιχα και $C(z) = p_1z + \frac{1}{p}(qp_{N-1} - 1)z^{N+1} + \frac{q}{p}z^{N+2}$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $N+2$.

Ο όρος $1/[(1-z)(1-\frac{q}{p}z)]$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{1}{(1-z)(1-\frac{q}{p}z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-\frac{q}{p}z}, \tag{I}$$

όπου τα $A,\ B$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z\to 1} A(z)(1-z) = \frac{p}{p-q} \\ B &= \lim_{z\to \frac{p}{q}} A(z)(1-\frac{q}{p}z) = \frac{q}{q-p}. \end{aligned}$$

Έτσι η (3.33) χρησιμοποιώντας την (I) γίνεται

$$\begin{aligned} P(z) &= C(z)\frac{A}{1-z} + C(z)\frac{B}{1-\frac{q}{p}z} \\ \text{ή} \qquad P(z) &= AC(z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n + BC(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^n z^n. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία το $C(z)$, τα $A,\ B$, τις $p_1,\ p_{N-1}$ και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές προκύπτει ότι οι πιθανότητες p_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$p_n \;=\; \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad n = 0, 1, ..., N. \tag{3.34}$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω πιθανότητες είναι της μορφής

$$p_n = c_1 1^n + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^n, \tag{3.35}$$

όπου 1 και $\frac{q}{p}$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\varphi(z) = pz^2 - z + q$ της αρχικής εξίσωσης διαφορών (3.27), στην περίπτωση που $p \neq q$. Επιπλέον παρατηρώντας την (3.29), ο συντελεστής της $P(z)$ είναι ακριβώς $qz^2 - z + p = z^2(q - 1/z + p/z^2) = z^2\varphi(z^{-1})$.

Η περίπτωση $p = q$ (αμερόληπτο νόμισμα) αντιμετωπίζεται ανάλογα. Έτσι αν $p = q = 1/2$ η (3.29) γίνεται

$$(z-1)^2 P(z) = p_1 z + p_{N-1} z^{N+1} - (2-z) z^{N+1}. \tag{3.36}$$

Θέτοντας $z = 1$ προκύπτει ότι

$$0 = p_1 + p_{N-1} - 1 \quad \text{ή} \quad p_{N-1} = 1 - p_1.$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (3.36) παίρνουμε:

$$P(z) = \frac{p_1 z - (1+p_1) z^{N+1} + z^{N+2}}{(z-1)^2}. \tag{3.37}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2+n-1}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Λαμβάνοντας αυτό υπόψη και εξισώνοντας τους συντελεστές στην (3.37) του όρου z^N προκύπτει ότι

$$p_N = p_1 N$$

το οποίο, λόγω της (3.26) δίνει ότι

$$p_1 = \frac{1}{N}.$$

Έτσι αντικαθιστώντας στην (3.37), εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και παίρνουμε για τις ζητούμενες πιθανότητες στην περίπτωση $p = q$ ότι:

$$p_n = \frac{n}{N}, \quad n = 0, 1, ..., N. \tag{3.38}$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δούμε ότι η λύση είναι της μορφής

$$p_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n, \tag{3.39}$$

όπου 1 είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\varphi(z) = \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(z-1)^2$ της αρχικής μας εξίσωσης διαφορών (3.27), στην περίπτωση που $p = q$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε με ανάλογο τρόπο το μέσο αριθμό βημάτων (ρίψεων του νομίσματος) $m_n, \ n = 0, 1, ..., N$ που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί το παιχνίδι, δεδομένου ότι ο παίκτης ξεκινάει με n ευρώ. Έστω $M(z) = \sum_{n=0}^{N} m_n z^n$ η γεννήτρια συνάρτηση των ζητούμενων αριθμών. Με ανάλυση πρώτου βήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} m_0 &= 0, \quad m_N = 0 \\ m_n &= p m_{n+1} + q m_{n-1} + 1, \quad n = 1, ..., N-1. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Η τελευταία ισοδύναμα γράφεται

$$p m_{n+1} - m_n + q m_{n-1} = -1, \tag{3.41}$$

η οποία είναι μια μη ομογενής εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με z^{n+1} και αθροίζοντας για $n = 1, ..., N-1$ προκύπτει:

$$p \sum_{n=1}^{N-1} m_{n+1} z^{n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} m_n z^{n+1} + q \sum_{n=1}^{N-1} m_{n-1} z^{n+1} = - \sum_{n=1}^{N-1} z^{n+1}.$$

Η σχέση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της $M(z)$, γίνεται

$$p(M(z) - m_0 - m_1 z) - z(M(z) - m_0 - m_N z^N) + q z^2 (M(z) - m_{N-1} z^{N-1} - m_N z^N) = -z^2 \sum_{n=0}^{N-2} z^n \tag{3.42}$$

η οποία λόγω της (3.40) γίνεται

$$\begin{aligned} (qz^2 - z + p) M(z) &= p m_1 z + q m_{N-1} z^{N+1} - z^2 \frac{1 - z^{N-1}}{1 - z} \\ q(z-1)(z - \frac{p}{q}) M(z) &= p m_1 z + q m_{N-1} z^{N+1} - z^2 (1 + z + \cdots + z^{N-2}). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Θέτοντας στην τελευταία αρχικά $z = 1$ και στη συνέχεια $z = \frac{p}{q}$, $p \neq q$ προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
0 &= pm_1 + qm_{N-1} - (N-1) \\
\text{και} \qquad 0 &= pm_1\frac{p}{q} + qm_{N-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{N+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}}{1-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}
$$

Λύνοντας το τελευταίο σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τις m_1 και m_{N-1} παίρνουμε:

$$
m_1 = \frac{N}{p}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} + \frac{1}{q-p} \tag{3.44}
$$

$$
\text{και} \qquad m_{N-1} = \frac{N}{p-q}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} + \frac{N-1}{N}. \tag{3.45}
$$

Τώρα η γεννήτρια είναι πλήρως γνωστή και η (3.43) παίρνει τη μορφή:

$$
\begin{aligned}
M(z) &= \frac{pm_1z + qm_{N-1}z^{N+1} - z^2(1+z+\cdots+z^{N-2})}{q(z-1)(z-\frac{p}{q})} \\
&= \frac{pm_1z + qm_{N-1}z^{N+1} - z^2(1+z+\cdots+z^{N-2})}{p(1-z)(1-\frac{q}{p}z)} \qquad (3.46)\\
&= \frac{C'(z)}{(1-z)(1-\frac{q}{p}z)}, \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

όπου τα m_1, m_{N-1} δίνονται από τις (3.44), (3.45) αντίστοιχα και

$$
\begin{aligned}
C'(z) &= m_1z + q/pm_{N-1}z^{N+1} - \frac{1}{p}z^2(1+z+\cdots+z^{N-2}) \\
&= m_1z - \frac{1}{p}z^2 - \frac{1}{p}z^3 - \cdots - \frac{1}{p}z^N + \frac{q}{p}m_{N-1}z^{N+1}.
\end{aligned}
$$

Ο όρος $1/(1-z)(1-\frac{q}{p}z)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα όπως προηγούμενα. Έτσι αντικαθιστώντας στην (3.46) και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές προκύπτει ότι:

$$
m_n = \frac{N}{p-q}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} - \frac{N}{p-q}\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} + \frac{n}{q-p}, \quad n = 0, 1, ..., N. \tag{3.48}
$$

Παρατηρούμε ότι η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής

$$
m_n = \frac{n}{q-p} + c_1^{'}1^n + c_2^{'}\left(\frac{q}{p}\right)^n \tag{3.49}
$$

όπου, όπως και στην ομογενή περίπτωση, οι $1,\ \frac{q}{p}$ είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\varphi(z)$.

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω για την περίπτωση $p = q$, προκύπτει τελικά ότι

$$m_n = n(N - n), \quad n = 0, 1, ..., N. \tag{3.50}$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε και στις δύο περιπτώσεις, υπολογίζοντας είτε τις πιθανότητες, είτε το μέσο χρόνο διάρκειας του παιχνιδιού, μέσω μιας εξίσωσης διαφορών χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις, γενικεύεται για τις εξισώσεις διαφορών k-τάξης και τελικά καταλήγουμε στη γενική τους λύση. Τη διαδικασία αυτή θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

3.2.1 Λύσεις ειδικών εξισώσεων διαφορών k τάξης

Ας θεωρήσουμε μια γραμμική μη ομογενή εξίσωση διαφορών k-τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \cdots + a_k y_n = b_n,\ n = 0, 1, ... \tag{3.51}$$

με γνωστές αρχικές συνθήκες $y_0,\ y_1, ..., y_{k-1}$. Έστω $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n,\ A(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ με $a_0 = 1$ και $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0},\ (a_n)_{n=0,\dots,k}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζοντας την (3.51) με z^{n+k} και αθροίζοντας για όλα τα $n \geq 0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+k} z^{n+k} + a_1 z \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+k-1} z^{n+k-1} + \cdots + a_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n &= z^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\ \text{ή} \quad \{Y(z) - \sum_{n=0}^{k-1} y_n z^n\} + a_1 z \{Y(z) - \sum_{n=0}^{k-2} y_n z^n\} + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} y_0 + a_k z^k Y(z) &= z^k B(z). \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$A(z)Y(z) = \sum_{n=0}^{k-1} y_n z^n + a_1 z \sum_{n=0}^{k-2} y_n z^n + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} y_0 + z^k B(z). \tag{3.52}$$

Θέτουμε

$$C(z) = \sum_{n=0}^{k-1} y_n z^n + a_1 z \sum_{n=0}^{k-2} y_n z^n + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} y_0.$$

Το $C(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$, το οποίο είναι γνωστό λόγω των αρχικών συνθηκών $y_0, ..., y_{k-1}$ και της ακολουθίας των συντελεστών $(a_n)_{n=0,\dots,k}$. Έτσι τελικά

$$Y(z) = \frac{C(z) + z^k B(z)}{A(z)}. \tag{3.53}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών (3.51) είναι

$$\varphi(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \cdots + a_{k-1} z + a_k.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A(z) = z^k \varphi(z^{-1}).$$

Έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει s διακεκριμένες ρίζες $\rho_1,\ \rho_2, \dots, \rho_s$ με πολλαπλότητες $m_1,\ m_2, \dots, m_s$ αντίστοιχα. Προφανώς $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = k$. Τότε η (3.53) γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{C(z)+z^k B(z)}{z^k(z^{-1}-\rho_1)^{m_1}(z^{-1}-\rho_2)^{m_2}\cdots(z^{-1}-\rho_s)^{m_s}} \\ &= \frac{C(z)+z^k B(z)}{(1-\rho_1 z)^{m_1}(1-\rho_2 z)^{m_2}\cdots(1-\rho_s z)^{m_s}}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{(1-\rho_1 z)^{m_1}(1-\rho_2 z)^{m_2}\cdots(1-\rho_s z)^{m_s}} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j}\frac{d_{hj}}{(1-\rho_j z)^h},$$

όπου οι συντελεστές d_{hj} υπολογίζονται κατά τα γνωστά. Έτσι

$$C(z) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j}\frac{c_{hj}}{(1-\rho_j z)^h}$$

και η (3.54) γίνεται

$$Y(z) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j}\frac{c_{hj}}{(1-\rho_j z)^h} + z^k B(z)\sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j}\frac{d_{hj}}{(1-\rho_j z)^h}.$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές προκύπτει ότι

$$[z^n]Y(z) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j} c_{hj}[z^n]\left\{\frac{1}{(1-\rho_j z)^h}\right\} + [z^{n-k}]B(z)\sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j} d_{hj}\frac{1}{(1-\rho_j z)^h}$$

δηλαδή

$$y_n = \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j} c_{hj}\binom{h+n-1}{n}\rho_j^n + \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j} d_{hj}\sum_{\ell=0}^{n-k} b_\ell\binom{h+n-k-\ell-1}{n-k-\ell}\rho_j^{n-k-\ell}. \tag{3.55}$$

Η εμφάνιση του δεύτερου όρου στο τελευταίο άθροισμα οφείλεται στην ύπαρξη του $B(z)$, δηλαδή του μη ομογενή όρου b_n στην αρχική εξίσωση διαφορών (3.51). Έτσι στην ομογενή περίπτωση, δηλαδή όταν $b_n = 0,\ n = 0, 1, ...$, η (3.51) έχει τη μορφή

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \cdots + a_k y_n = 0,\ n = 0, 1, ... \tag{3.56}$$

και στην περίπτωση αυτή η λύση είναι

$$y_n = \sum_{j=1}^{s}\sum_{h=1}^{m_j} c_{hj}\binom{h+n-1}{n}\rho_j^n$$

ή γενικά

$$y_n = \sum_{j=0}^{s} f_j(n)\rho_j^n$$

όπου $f_j(n)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m_j - 1,\ j = 1, ..., s$.

Τα αποτελέσματα της διαδικασίας που περιγράψαμε συνοψίζονται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 10. *Έστω $\rho_1, ..., \rho_s$ οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και υποθέτουμε ότι η ρίζα ρ_i έχει πολλαπλότητα $m_i,\ i = 1, ..., s$. Τότε οι ακολουθίες*

$\rho_1^n,\quad n\rho_1^{n-1},\quad \binom{n}{2}\rho_1^{n-2},\quad \ldots,\quad \binom{n}{m_1-1}\rho_1^{n-m_1+1},$

$\vdots$

$\rho_s^n,\quad n\rho_s^{n-1},\quad \binom{n}{2}\rho_s^{n-2},\quad \ldots,\quad \binom{n}{m_s-1}\rho_s^{n-m_s+1},$

αποτελούν βάση του συνόλου των λύσεων της εξίσωσης διαφορών (3.56).

Για τη μη ομογενή περίπτωση ισχύει ότι η γενική λύση της (y_n) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $(y_n^{\text{ομογ}})$ και μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς $(y_n^{\text{ειδ}})$. Δηλαδή

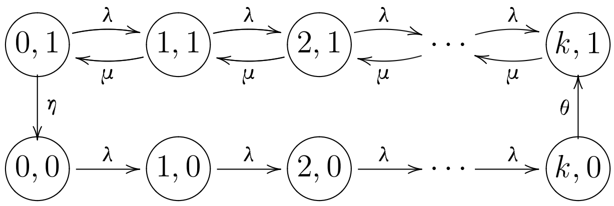
$$y_n = y_n^{\text{ομογ}} + y_n^{\text{ειδ}}.$$

Η μορφή της ειδικής λύσης της μη ομογενούς που αναζητάμε εξαρτάται από τη μορφή του μη ομογενή όρου b_n. Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται μερικές περιπτώσεις μη ομογενών όρων που εμφανίζονται σε προβλήματα και η αντίστοιχη μορφή της ειδικής λύσης που αναζητούμε σε κάθε περίπτωση.

b_n	$z_n^{\text{ειδ}}$
ca^n	$c'a^n$ ή $c'na^n$ ή $c'n^2a^n$ ή $\cdots$
cn^k	$c_0 + c_1n + \cdots + c_kn^k$
cn^ka^n	$(c_0 + c_1n + \cdots + c_kn^k)a^n$
$\sin(an)b^nn^k$	$(c_0 + c_1n + \cdots + c_kn^k)b^n\sin(an)+$ $+(c_0 + c_1n + \cdots + c_kn^k)b^n\cos(an)$

3.2.2 Εφαρμογές

Στην παράγραφο 1.3 περιγράψαμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης πεπερασμένης χωρητικότητας, το οποίο μελετήσαμε ως μια Μ.α.σ.χ. με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



και εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda\pi(0,0) = \eta\pi(0,1) \tag{3.57}$$

$$\lambda\pi(n,0) = \lambda\pi(n-1,0) \quad n = 1, ..., k-1 \tag{3.58}$$

$$\theta\pi(k,0) = \lambda\pi(k-1,0) \tag{3.59}$$

$$(\lambda+\eta)\pi(0,1) = \mu\pi(1,1) \tag{3.60}$$

$$(\lambda+\mu)\pi(n,1) = \lambda\pi(n-1,1) + \mu\pi(n+1,1) \quad n = 1, ..., k-1 \tag{3.61}$$

$$\mu\pi(k,1) = \lambda\pi(k-1,1) + \theta\pi(k,0). \tag{3.62}$$

Για τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας, η οποία υπάρχει πάντα, έχουμε ήδη αποδείξει τις σχέσεις:

$$\pi(0,0) = \frac{\eta}{\lambda}\pi(0,1)$$

$$\pi(k-1,0) = \pi(k-2,0) = \cdots = \pi(0,0) = \frac{\eta}{\lambda}\pi(0,1)$$

$$\pi(k,0) = \frac{\lambda}{\theta}\pi(k-1,0) = \frac{\eta}{\theta}\pi(0,1)$$

και με βάση αυτές, η εξίσωση κανονικοποίησης έχει πάρει τη μορφή

$$k\frac{\eta}{\lambda}\pi(0,1) + \frac{\eta}{\theta}\pi(0,1) + \sum_{n=0}^{k}\pi(n,1) = 1. \tag{3.63}$$

Μελετώντας προσεκτικά τις εξισώσεις ισορροπίας διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση (3.61) είναι μια ομογενής εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, η οποία γράφεται:

$$\mu\pi(n+1,1) - (\lambda+\mu)\pi(n,1) + \lambda\pi(n-1,1) = 0, \quad n = 1, ..., k-1. \tag{3.64}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\mu x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0,$$

η οποία θέτοντας $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ γράφεται

$$x^2 - (1 + \rho)x + \rho = 0$$

και έχει ρίζες $\rho_1 = \rho$ και $\rho_2 = 1$.

Αν $\rho \neq 1$, ή ισοδύναμα $\lambda \neq \mu$, τότε $\rho_1 \neq \rho_2$ και η γενική λύση της (3.61) είναι

$$\begin{aligned} \pi(n,1) &= c_1\rho_1^n + c_2\rho_2^n \\ &= c_1\rho^n + c_2, \quad n = 0, 1, \ldots, k \end{aligned} \tag{3.65}$$

όπου c_1, c_2 σταθερές οι οποίες προσδιορίζονται με χρήση των εξισώσεων ισορροπίας και της εξίσωσης κανονικοποίησης, ως εξής:

Η (3.60) λόγω της (3.65) δίνει

$$\begin{aligned} (\lambda + \eta)(c_1 + c_2) &= \mu(c_1\rho + c_2) \\ \text{ή} \quad c_2 &= \frac{\eta c_1}{\mu - \lambda - \eta} = \frac{\eta}{\mu(1-\rho) - \eta}\, c_1. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (3.65), αυτή γίνεται

$$\pi(n,1) = c_1\rho^n + \frac{\eta c_1}{\mu(1-\rho) - \eta} \quad n = 0, 1, \ldots, k. \tag{3.67}$$

Θέτοντας $n = 0$ προκύπτει ότι

$$\pi(0,1) = c_1 + \frac{\eta c_1}{\mu(1-\rho) - \eta} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) - \eta}\, c_1. \tag{3.68}$$

Η σταθερά c_1 θα υπολογιστεί από την εξίσωση κανονικοποίησης (3.63), χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις ως εξής:

$$\frac{k\eta}{\lambda}\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) - \eta}\, c_1 + \frac{\eta}{\theta}\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) - \eta}\, c_1 + \sum_{n=0}^{k}\left\{c_1\rho^n + \frac{\eta c_1}{\mu(1-\rho) - \eta}\right\} = 1$$

ή ισοδύναμα
$$\left(\frac{k\eta}{\lambda} + \frac{\eta}{\theta} + \frac{\eta(k+1)}{\mu(1-\rho)}\right)\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) - \eta}\, c_1 + \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}\, c_1 = 1.$$

Οπότε, τελικά

$$c_1 = \left\{1 + \rho + \cdots + \rho^k + \left(\frac{k\eta}{\lambda} + \frac{\eta}{\theta} + \frac{\eta(k+1)}{\mu(1-\rho)}\right)\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) - \eta}\right\}^{-1}. \tag{3.69}$$

Έτσι η $\pi(n,1)$, όπως υπολογίζεται από τη σχέση (3.67), έχει καθοριστεί πλήρως και η στάσιμη κατανομή είναι πλέον γνωστή. Μάλιστα αντικαθιστώντας τη σταθερά c_1 στην (3.68) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\pi(0,1) &= \left\{\frac{k\eta}{\lambda}+\frac{\eta}{\theta}+\frac{\eta(k+1)+\mu(1-\rho^{k+1})-\eta(1+\cdots+\rho^{k})}{\mu(1-\rho)}\right\}^{-1} \\ &= \left\{\frac{k\eta}{\lambda}+\frac{\eta}{\theta}+\frac{\mu(1-\rho^{k+1})+\eta k-\eta\rho(1+\cdots+\rho^{k-1})}{\mu(1-\rho)}\right\}^{-1}\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (1.15) που υπολογίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο με διαφορετικό τρόπο.

Στην περίπτωση που $\lambda=\mu$, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες $\rho_1=\rho_2=\rho=1$ και η γενική λύση της (3.61) θα δίνεται τώρα από τη σχέση:

$$\pi(n,1)=c_1^{'}\rho^n+c_2^{'}n\rho^n=c_1^{'}+c_2^{'}n \quad n=0,1,\ldots,k. \tag{3.70}$$

Εργαζόμενοι ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, θα προσδιορίσουμε τις σταθερές $c_1^{'}$ και $c_2^{'}$. Έτσι, η (3.60) λόγω της (3.70) δίνει

$$(\lambda+\eta)c_1^{'}=\mu(c_1^{'}+c_2^{'})$$

ή

$$c_2^{'}=\tfrac{\eta}{\mu}\, c_1^{'}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (3.70), αυτή γίνεται

$$\pi(n,1)=c_1^{'}+n\,\frac{\eta}{\mu}\,c_1^{'} \quad n=0,1,\ldots,k. \tag{3.71}$$

Θέτοντας $n=0$ προκύπτει ότι $\pi(0,1)=c_1^{'}$. Όπως και προηγουμένως, η σταθερά $c_1^{'}$ θα προκύψει από την εξίσωση κανονικοποίησης, αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις στην (3.63). Δηλαδή θα έχουμε:

$$k\frac{\eta}{\lambda}c_1^{'}+\frac{\eta}{\theta}c_1^{'}+\sum_{n=0}^{k}\{c_1^{'}+n\,\frac{\eta}{\mu}\,c_1^{'}\}=1$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{k\eta}{\lambda}+\frac{\eta}{\theta}+k+1\right)c_1^{'}+\frac{\eta}{\mu}\,c_1^{'}\,\frac{k(k+1)}{2}=1.$$

Οπότε, τελικά

$$c_1^{'}=\left\{\frac{k\eta}{\lambda}+\frac{\eta}{\theta}+(k+1)\left(1+\frac{\eta k}{2\mu}\right)\right\}^{-1}. \tag{3.72}$$

Έτσι η (3.71) έχει καθοριστεί πλήρως και η στάσιμη κατανομή και στην περίπτωση που $\lambda=\mu$ είναι πλέον γνωστή.

3.3 Αναδρομικές σχέσεις

Μέχρι τώρα οι μέθοδοι που έχουμε αναπτύξει καταλήγουν στον ακριβή υπολογισμό της στάσιμης κατανομής μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Αυτό δεν είναι πάντα απλό και υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες μας ενδιαφέρει ή αρκούμαστε στον υπολογισμό αναδρομικών σχέσεων. Η μέθοδος που θα αναπτύξουμε στην παρούσα παράγραφο στοχεύει ακριβώς προς αυτή την κατεύθυνση και εφαρμόζεται κυρίως όταν η πιθανογεννήτρια συνάρτηση είναι της μορφής $P(z) = e^{D(z)}$, όπου $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ και $D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$. Η τεχνική ονομάζεται $z\frac{d}{dz}\log$ και η ονομασία της μας υπενθυμίζει ακριβώς τη σειρά των βημάτων που πρέπει να ακολουθήσουμε. Συγκεκριμένα η διαδικασία είναι η εξής:

$$\begin{array}{rrcl}
 & P(z) & = & e^{D(z)} \\
\text{Λογαριθμίζουμε} & logP(z) & = & D(z) \\
\text{Παραγωγίζουμε ως προς z} & \dfrac{P'(z)}{P(z)} & = & D'(z) \\
\text{Πολλαπλασιάζουμε με z} & z\dfrac{P'(z)}{P(z)} & = & zD'(z) \\
 & zP'(z) & = & zD'(z)P(z) \\
\text{ή} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n z^n & = & \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nd_n z^n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\right) \\
\text{ή ισοδύναμα} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n z^n & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} kd_k p_{n-k} z^n.
\end{array}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του όρου z^n προκύπτει:

$$\begin{array}{rrcl}
 & [z^n]\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n z^n\right\} & = & [z^n]\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} kd_k p_{n-k} z^n\right\} \\
 & np_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kd_k p_{n-k}. \\
\text{Τελικά} & p_n & = & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kd_k p_{n-k}, \quad n \geq 1 \qquad (3.73) \\
\text{και} & p_0 & = & P(0) = e^{D(0)}. \qquad (3.74)
\end{array}$$

Η μέθοδος βέβαια εφαρμόζεται γενικά για την εύρεση αναδρομικών σχέσεων για τους όρους μια ακολουθίας χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση, αφού σε όλα τα παραπάνω δεν χρησιμοποιήσαμε κάποια ιδιότητα των πιθανογεννητριών συναρτήσεων.

3.3.1 Εφαρμογές

Στη συνέχεια θα δούμε μια πρώτη απλή εφαρμογή της μεθόδου. Έστω $X_1,\ X_2,\ldots,X_k$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανογεννήτρια $P(z)=1-p+pz$. Θεωρούμε την τ.μ. $Y=X_1+X_2+\cdots+X_k$ και έστω $P_Y(z)$ η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια. Από γνωστή ιδιότητα των πιθανογεννητριών

$$P_Y(z)=(P(z))^k.$$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Λογαριθμίζουμε} & logP_Y(z) & = & klogP(z) \\
\text{Παραγωγίζουμε ως προς z} & \dfrac{P_Y'(z)}{P_Y(z)} & = & k\dfrac{P'(z)}{P(z)} \\
\text{Πολλαπλασιάζουμε με z} & z\,P_Y'(z)P(z) & = & kzP'(z)P_Y(z) \\
 & \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n z^n\right)(1-p+pz) & = & kpz\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \\
\multicolumn{2}{r}{[z^n]\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)np_n z^n\right\}+\left[z^{n-1}\right]\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} npp_n z^n\right\}} & = & kp\left[z^{n-1}\right]\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\right\} \\
 & (1-p)np_n+(n-1)pp_{n-1} & = & kpp_{n-1},\quad n\geq 1.
\end{array}$$

Τελικά

$$p_n=\frac{k-n+1}{n}\ \frac{p}{1-p}\ p_{n-1},\quad n\geq 1 \tag{3.75}$$

και

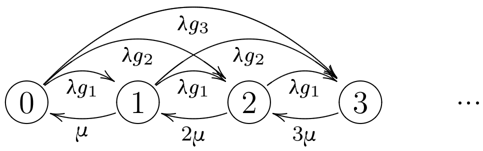
$$p_0=P_Y(0)=(1-p)^k. \tag{3.76}$$

Έτσι εξάγαμε μια αναδρομική σχέση για τις πιθανότητες $p_n=P(Y=n)$ από την οποία είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός των πιθανοτήτων και άρα της κατανομής της τ.μ. Y, η οποία ως γνωστό είναι η Διωνυμική με παραμέτρους (k,p).

Πράγματι, από την (3.75) συνεχίζοντας αναδρομικά έπεται

$$\begin{array}{rcl}
p_n & = & \dfrac{k-n+1}{n}\ \dfrac{p}{1-p}\ p_{n-1}=\dfrac{k-n+1}{n}\ \dfrac{p}{1-p}\ \dfrac{k-n+2}{n-1}\ \dfrac{p}{1-p}\ p_{n-2}=\cdots \\
 & = & \dfrac{(k-n+1)(k-n+2)\cdots k}{n(n-1)\cdots 1}\ \dfrac{p^n}{(1-p)^n}\ p_0=\dfrac{\frac{k!}{(k-n)!}}{n!}\ \dfrac{p^n}{(1-p)^n}\ (1-p)^k \\
\text{έτσι }\ p_n & = & \dbinom{k}{n}p^n(1-p)^{k-n},\quad n\geq 0.
\end{array} \tag{3.77}$$

Ας δούμε μια πιο σύνθετη εφαρμογή της μεθόδου. Θεωρούμε τη $M^c/M/\infty$ ουρά, δηλ. ένα σύστημα εξυπηρέτησης απεριόριστης χωρητικότητας στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σε ομάδες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ). Τα μεγέθη $Y_1,\ Y_2,\ldots$ των διαδοχικών ομάδων είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αντίστοιχη πιθανογεννήτρια $G(z)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$, με πεπερασμένη μέση τιμή $\overline{g}$ και ανεξάρτητες από από τους χρόνους αφίξεων. Το σύστημα διαθέτει απεριόριστους υπηρέτες. Έτσι όλα τα μέλη κάθε αφικνούμενης ομάδας ξεκινούν αμέσως την εξυπηρέτησή τους. Όλοι οι υπηρέτες είναι ισοδύναμοι, λειτουργούν παράλληλα και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν την εκθετική(μ) κατανομή. Το σύστημα περιγράφεται από μια Μ.α.σ.χ. με χώρο καταστάσεων $S=\mathbb{N}_0$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Έστω (p_n) η στάσιμη κατανομή, όταν αυτή υπάρχει και $P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned}\lambda p_0 &= \mu p_1\\ (\lambda+n\mu)p_n &= (n+1)\mu p_{n+1}+\sum_{j=0}^{n-1}\lambda g_{n-j}p_j.\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$P(z)=\exp\left\{-\rho\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u}du\right\} \tag{3.78}$$

(βλέπε Οικονόμου-Φακίνος (1999)).

Παρατηρούμε ότι η $P(z)$ είναι της μορφής $P(z)=e^{D(z)}$, με $D(z)=-\rho\int_z^1\frac{1-G(u)}{1-u}du$. Έτσι ενδείκνυται η εφαρμογή της μεθόδου $z\dfrac{d}{dz}\log$ προκειμένου να εξάγουμε μια αναδρομική σχέση για τη στάσιμη κατανομή (p_n). Ακολουθώντας τη διαδικασία όπως την περιγράψαμε θα πάρουμε διαδοχικά:

$$
\begin{aligned}
\log P(z) &= -\rho\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u}du \\
\frac{P'(z)}{P(z)} &= \rho\frac{1-G(z)}{1-z} \\
zP'(z) &= z\rho\ \frac{1-G(z)}{1-z}P(z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[z^n]\{zP'(z)\} &= \rho\left[z^{n-1}\right]\left\{\frac{P(z)}{1-z}\right\} - \rho\left[z^{n-1}\right]\left\{\frac{G(z)}{1-z}P(z)\right\} \\
np_n &= \rho\sum_{k=0}^{n-1} p_k \ - \ \rho\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} g_j p_{n-1-k}.
\end{aligned}
$$

$$
\text{Τελικά} \qquad p_n = \frac{\rho}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big[p_k - \sum_{j=1}^{k} g_j p_{n-1-k}\Big], \quad n \geq 1 \tag{3.79}
$$

$$
\text{και} \qquad p_0 = P(0) = \exp\Big\{-\rho\int_0^1 \frac{1-G(u)}{1-u}du\Big\}. \tag{3.80}
$$

3.3.2 Αναδρομικό σχήμα του Adelson

Ένα τελευταίο παράδειγμα εφαρμογής της τεχνικής $z\dfrac{d}{dz}\log$ που θα δούμε είναι ο υπολογισμός αναδρομικής σχέσης για τη συνάρτηση πιθανότητας μιας σύνθετης Poisson τ.μ. $Y = X_1 + \cdots + X_N$. Οι $X_1, X_2, ...$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ ενώ η N είναι μια τ.μ. ανεξάρτητη από τις X_i, $i = 1, 2, ...$ που ακολουθεί την Poisson(λ) κατανομή, οπότε η πιθανογεννήτρια είναι $P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$.

Η πιθανογεννήτρια της τ.μ. Y, έστω $P_Y(z)$, ως γνωστό δίνεται από τη σχέση $P_Y(z) = P_N(G(z))$. Αντικαθιστώντας προκύπτει

$$
P_Y(z) = e^{-\lambda(1-G(z))}.
$$

Εφόσον η $P_Y(z)$ είναι της μορφής $P(z) = e^{D(z)}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική $z\dfrac{d}{dz}\log$. Έτσι, αρχικά λογαριθμίζοντας και συνεχίζοντας τη διαδικασία παίρνουμε διαδοχικά:

$$
\begin{aligned}
\log P_Y(z) &= -\lambda(1 - G(z)) \\
\frac{P_Y^{'}(z)}{P_Y(z)} &= \lambda G'(z) \\
zP_Y^{'}(z) &= \lambda z G'(z) P_Y(z) \\
[z^n]\left\{zP_Y^{'}(z)\right\} &= \lambda\,[z^n]\left\{zG'(z)P_Y(z)\right\} \\
np_n &= \lambda \sum_{j=1}^{n} j g_j p_{n-j}.
\end{aligned}
$$

Από το τελευταίο

$$p_n = \frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n} j g_j p_{n-j}, \quad n \geq 1 \tag{3.81}$$

και

$$p_0 = P_Y(0) = e^{-\lambda(1-g_0)}. \tag{3.82}$$

Κεφάλαιο 4

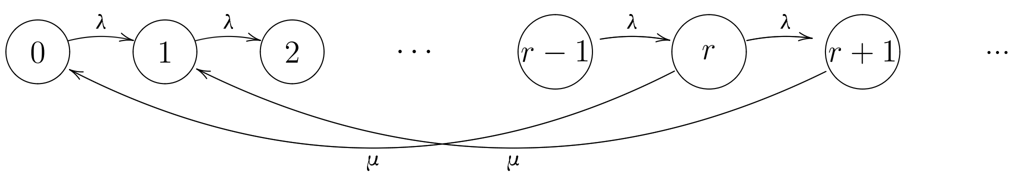
Αναλυτικές Τεχνικές

4.1 Θεώρημα Rouché και εφαρμογές

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή αδιαχώριστων, θετικά επαναληπτικών Μαρκοβιανών αλυσίδων, έχουμε ήδη δεί ότι πολλές φορές καταφεύγουμε στον υπολογισμό της αντίστοιχης πιθανογεννήτριας συνάρτησης. Στις περιπτώσεις αυτές, επειδή κάθε πιθανογεννήτρια πρέπει να συγκλίνει τουλάχιστον στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, τίθενται ζητήματα των συνθηκών κάτω από τις οποίες συμβαίνει αυτό.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η $M/M/1$ ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις μεγέθους r. Πρόκειται για ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ). Το σύστημα διαθέτει έναν υπηρέτη ο οποίος εξυπηρετεί ταυτόχρονα r πελάτες σε χρόνο που ακολουθεί την Εκθετική(μ) κατανομή. Αν στο σύστημα, το οποίο έχει απεριόριστη χωρητικότητα, δεν υπάρχουν r πελάτες, τότε ο υπηρέτης περιμένει μέχρι αυτοί να συμπληρωθούν ώστε να αρχίσει την εξυπηρέτησή τους.

Αν ορίσουμε $Q(t)$ τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t, τότε η $\{Q(t),\ t \geq 0\}$ είναι Μ.α.σ.χ. με διακριτό χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, ...\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Έστω $\{p_n\}_{n\in S}$ η στάσιμη κατανομή, όταν υπάρχει, και $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ η αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\lambda p_0 = \mu p_r \tag{4.1}$$

$$\lambda p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r}, \quad 1 \leq n \leq r-1 \tag{4.2}$$

$$(\lambda+\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r}, \quad n \geq r. \tag{4.3}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη n-οστή εξίσωση με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n = 0, 1, ...$ προκύπτει:

$$(\lambda+\mu)\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \mu \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+r} z^n.$$

Η τελευταία ισοδύναμα γράφεται

$$(\lambda+\mu)P(z) - \mu \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z^r}\left(P(z) - \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n\right)$$

από την οποία τελικά προκύπτει ότι η πιθανογεννήτρια δίνεται από τη σχέση

$$P(z) = \frac{\mu(z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(\lambda+\mu) z^r - \lambda z^{r+1} - \mu}. \tag{4.4}$$

Θέτοντας $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ η (4.4) γίνεται

$$P(z) = \frac{(z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(1+\rho) z^r - \rho z^{r+1} - 1}. \tag{4.5}$$

Η $P(z)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλαδή της μορφής $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, όπου $degN(z) = 2r-1$ και $degD(z) = r+1$. Έτσι, ο αριθμητής έχει $2r-1$ ρίζες ενώ ο παρανομαστής $r+1$. Αν $z_0 \in \{z : \ |z| \leq 1\}$ και είναι ρίζα του παρανομαστή αλλά όχι του αριθμητή, δηλαδή $D(z_0) = 0$ ενώ $N(z_0) \neq 0$, τότε η $P(z)$ θα έχει πόλο στο z_0 και άρα δεν θα συγκλίνει για κάθε $z \in \{z : \ |z| \leq 1\}$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει εφόσον είναι πιθανογεννήτρια συνάρτηση. Κατά συνέπεια είναι απαραίτητο, προκειμένου να βγάλουμε συμπεράσματα για τη σύγκλιση της $P(z)$, ο προσδιορισμός του πλήθους και της θέσης (εντός ή εκτός του μοναδιαίου δίσκου) των ριζών του παρανομαστή.

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά εφαρμόζοντας δύο χρήσιμα Θεωρήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Θεώρημα 11. ***Θεώρημα Rouché***

Έστω $f(z)$ και $g(z)$ αναλυτικές συναρτήσεις στο εσωτερικό και πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C με $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ στο C. Τότε οι $f(z)$, $g(z)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του C.

Θεώρημα 12. *Έστω ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\alpha_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq 1$ και $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση. Επιπλέον έστω N θετικός ακέραιος. Ορίζουμε $A(z) = z^N - a(z)$ και $k = MK\Delta\{j - N \mid$ για τους δείκτες j που $a_j \neq 0\}$. Τότε τα αποτελέσματα του Θεωρήματος, σχετικά με τις ρίζες της $A(z)$, συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:*

Συνθήκες	# ριζών στο $\{z: \ |z| < 1\}$	# ριζών στο $\{z: \ |z| = 1\}$	# ριζών στο $\{z: \ |z| \leq 1\}$
$a(1) < 1$	N	0	N
$a(1) = 1, \ A'(1) > 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n < \infty$	$N - k$	k(απλές, τις k-οστές ρίζες της 1)	N
$a(1) = 1, \ A'(1) = 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n < \infty, \ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n < \infty$	$N - k$	k(διπλές, τις k-οστές ρίζες της 1)	$N + k$
$a(1) = 1, \ A'(1) < 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n < \infty$	N	k(απλές, τις k-οστές ρίζες της 1)	$N + k$

Σημείωση: Και στα δύο θεωρήματα αν μια ρίζα έχει πολλαπλότητα s, τότε αυτή προσμετράται s φορές.

Το τελευταίο Θεώρημα διατυπώνεται με αρκετά γενικές συνθήκες. Λόγω της δυσκολίας της απόδειξης, αυτή θα γίνει εισάγωντας επιπλέον υποθέσεις και μόνο για τις πιο απλές περιπτώσεις. (Για πλήρη απόδειξη βλέπε Gail et al. 1996.)

Σχέδιο απόδειξης:

Έστω $f(z) = z^N$ και $g(z) = z^N - a(z) = A(z)$ ώστε $f(z) - g(z) = a(z)$.

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Rouché, αρκεί να δείξουμε ότι

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ στη μοναδιαία περιφέρεια ή ισοδύναμα } |a(z)| < |z^N|.$$

Αν $\alpha(1) < 1$, τότε το τελευταίο προκύπτει άμεσα αφού, για z με $|z| = 1$

$$\begin{aligned} |a(z)| &= |\sum a_n z^n| \leq \sum |a_n z^n| \\ &= \sum a_n |z|^n = a(|z|) = \alpha(1) < 1 = |z^N|. \end{aligned}$$

Εφόσον ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rouché στο $C = \{z : |z| = 1\}$, προκύπτει ότι αν $\alpha(1) < 1$, η $A(z)$ έχει N μηδενικά στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο (όσες και οι ρίζες της $f(z) = z^N$). Επιπλέον δεν έχει κανένα στη μοναδιαία περιφέρεια διότι, αν υπάρχει z με $|z| = 1$ και $A(z) = 0$ τότε $z^N - a(z) = 0$, δηλαδή $a(z) = z^N$ το οποίο είναι άτοπο αφού δείξαμε ότι $|a(z)| < |z^N|$.

Το παραπάνω σκεπτικό δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που το $a(1) = 1$, διότι ειδικά για $z = 1$, $\alpha(z) = 1 = |z|^N$. Έτσι, προκειμένου να αποδείξουμε ότι $|a(z)| < |z^N|$ θα χρησιμοποιήσουμε ένα οριακό επιχείρημα.

Υποθέτουμε ότι η $\alpha(z)$ είναι αναλυτική στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Έστω ότι $a(1) = 1$ και $A'(1) > 0$ ώστε $a'(1) = N - A'(1) < N$. Άρα η $g(z) = z^N - a(z)$ ικανοποιεί ότι $g(1) = 0$ και $g'(1) > 0$. Τότε ισχύει ότι η g είναι αύξουσα σε μια περιοχή του 1, δηλαδή υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η g να είναι αύξουσα στο $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ (με την προϋπόθεση ότι g' συνεχής στο 1) και άρα $g(1+\epsilon) > 0$. Εφόσον $a(z) = \sum a_n z^n$ και a_n μη αρνητικοί για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, τότε θα έχουμε ότι για κάθε z στο $C = \{z : |z| = 1 + \epsilon\}$, δηλ. πάνω στον κύκλο ακτίνας $1 + \epsilon$:

$$|z^N - A(z)| = |a(z)| \leq a(|z|) = a(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^N - g(1+\epsilon) < (1+\epsilon)^N = |z^N|.$$

Άρα λόγω του Θεωρήματος Rouché η $A(z)$ έχει N ρίζες στο εσωτερικό του C, δηλ. στον ανοικτό δίσκο $\{z : \ |z| < 1+\epsilon\}$. Αν θεωρήσουμε $\epsilon \to 0$, τότε η $A(z)$ έχει N ρίζες στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο.

Έστω τώρα ότι $\alpha(1) = 1$ και $A'(1) < 0$, οπότε $\alpha'(1) = N - A'(1) > N$. Εφαρμόζοντας σκεπτικό ανάλογο με την προηγούμενη περίπτωση, η $g(z) = z^N - a(z)$ ικανοποιεί ότι $g(1) = 0$ και $g'(1) = A'(1) < 0$. Έτσι, η $g(z)$ είναι φθίνουσα σε μια περιοχή του 1, δηλαδή υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η g να είναι φθίνουσα στο $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ (με την προϋπόθεση ότι g' συνεχής στο 1) και άρα $g(1-\epsilon) > 0$. Για κάθε z στο C=$\{z : \ |z| = 1 - \epsilon\}$ δηλ. στην περιφέρεια του κύκλου ακτίνας $1 - \epsilon$, θα έχουμε:

$$|z^N - A(z)| = |a(z)| \leq a(|z|) \leq a(1-\epsilon) = (1-\epsilon)^N - g(1-\epsilon) < (1-\epsilon)^N = |z^N|.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rouché η $A(z)$ έχει N ρίζες στον ανοικτό δίσκο $\{z: \ |z| < 1-\epsilon\}$. Αν θεωρήσουμε $\epsilon \to 0$, τότε η $A(z)$ έχει N ρίζες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο.

Έτσι δείξαμε για την περίπτωση που $\alpha(1) = 1$ ότι η $A(z)$ έχει N μηδενικά στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο αν $A'(1) > 0$ και N μηδενικά στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο αν $A'(1) < 0$. Στην πρώτη περίπτωση απαιτήσαμε η $A(z)$ να είναι αναλυτική στον κλειστό δίσκο (αντί για απλά αναλυτική στον ανοικτό) και συνεχής στην κλειστότητα. Επιπλέον εκτός του ότι το $z = 1$ είναι ρίζα, δεν εξάγαμε καμία επιπρόσθετη πληροφορία για ρίζες πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Όμως μπορεί να προκύψουν περισσότερα μηδενικά με $|z| = 1$.
Έχουμε ορίσει

$$k = \max\{d : d \text{ διαιρεί } j - N \text{ για όλα τα } a_j \neq 0\}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα μηδενικά του $A(z)$ στη μοναδιαία περιφέρεια είναι οι k-οστές ρίζες της μονάδας. Επιπλέον έχουν όλα την ίδια πολλαπλότητα με το $z = 1$.

Όταν $A'(1) \neq 0$, τότε ως γνωστό το $z = 1$ είναι απλή ρίζα του $A(z)$. Άρα και οι k-οστές ρίζες της μονάδας είναι απλές. Έτσι, αν $A'(1) > 0$ δείξαμε ότι το $A(z)$ έχει N μηδενικά στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο και σύμφωνα με τα προηγούμενα τα $N - k$ βρίσκονται στον ανοικτό, ενώ τα υπόλοιπα είναι οι απλές k-οστές ρίζες της μονάδας.

Αν $A'(1) < 0$ δείξαμε ότι το $A(z)$ έχει N μηδενικά στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο και επιπλέον k απλές, τις k-οστές ρίζες της μονάδας πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια.

Αν όμως $A'(1) = 0$ η ρίζα $z = 1$ έχει πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας. Θα δείξουμε ότι η πολλαπλότητά της είναι ακριβώς δύο όταν $A(z) = z^N - a(z)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.

$$\begin{aligned} A''(1) &= \frac{d^2}{dz^2}[z^N - a(z)]\bigg|_{z=1} = N(N-1) - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k \\ &= N^2 - N - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k. \end{aligned}$$

(Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k < \infty$.)
Λόγω του ότι $A'(1) = 0$ έπεται ότι $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k = N$. Άρα

$$A''(1) = N^2 - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=0}^{\infty}(k-N)^2 a_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k - 2N\sum_{k=0}^{\infty} k a_k + N^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k - 2N^2 + N^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k - N^2 = -A''(1).
\end{aligned}$$

Δηλαδή $$A''(1) \leq 0. \tag{4.6}$$

Αν $A''(1) = 0$ τότε η $A(z)$ έχει μηδενικό στο $z = 1$ πολλαπλότητας τουλάχιστον 2 και τότε $\sum_{k=0}^{\infty}(k-N)^2 a_k = 0$ ή $\alpha_k = 0,\ \forall k \neq N$. Εφόσον $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, κατά συνέπεια $a_N = 1$ οπότε $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z^N$. Άρα $A(z) = z^N - a(z) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η $A(z) = z^N - a(z)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Έτσι η ρίζα $z = 1$ είναι τάξης 2. Το ίδιο και οι k-οστές ρίζες της μονάδας. Έτσι στην περίπτωση που $A'(1) = 0$, η $A(z)$ έχει k διπλές ρίζες, τις k-οστές ρίζες της μονάδας πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια.

Έτσι ολοκληρώθηκε για μερικές απλές περιπτώσεις η απόδειξη του Θεωρήματος. □

Επιστρέφουμε στο παράδειγμα της $M/M/1$ ουράς με ομαδικές εξυπηρετήσεις, για το οποίο έχουμε ήδη υπολογίσει την πιθανογεννήτρια:

$$P(z) = \frac{(z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(1+\rho)z^r - \rho z^{r+1} - 1}. \tag{4.7}$$

Αυτή είναι της μορφής $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ και ο παρανομαστής γράφεται στη μορφή

$$D(z) = (1+\rho)z^r - \rho z^{r+1} - 1 = (1+\rho)\left(z^r - \left(\tfrac{\rho}{1+\rho} z^{r+1} + \tfrac{1}{1+\rho}\right)\right).$$

Ορίζουμε

$$A(z) = z^r - \left(\frac{\rho}{1+\rho} z^{r+1} + \frac{1}{1+\rho}\right)$$

και την ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με $a_0 = \frac{1}{1+\rho},\quad a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0,\quad a_{r+1} = \frac{\rho}{1+\rho}$ και $a_n = 0,\ n \geq r+2$. Τότε

$$A(z) = z^r - a(z)$$

όπου $\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} z^{r+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = (r+1)\frac{\rho}{1+\rho} < \infty$ και $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n = (r+1)^2 \frac{\rho}{1+\rho} < \infty$.

Άρα ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 12 και ορίζουμε

$$\begin{aligned} k &= MK\Delta\{\ j-r\ |\text{για τους δείκτες } j \text{ με } a_j \neq 0\} \\ &= MK\Delta\{\ j-r\ |\text{για } j=0 \text{ και } j=r+1\ \} = MK\Delta\{-r,1\ \} = 1. \end{aligned}$$

Τότε $a(1) = \dfrac{1}{1+\rho} + \dfrac{\rho}{1+\rho} = 1$ και $A'(1) = r - a'(1) = \dfrac{r-\rho}{1+\rho}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. $A'(1) > 0$ ή $r > \rho$

Στην περίπτωση αυτή με βάση το Θεώρημα 12 προκύπτει ότι το $D(z)$ έχει $r-1$ ρίζες, έστω $z_1, ..., z_{r-1}$, στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο, μία απλή ρίζα τη μονάδα και άρα θα έχει και μία ρίζα, έστω z_0, με $|z_0| > 1$. Οπότε $D(z) = (z-1)(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{r-1})$. Δεδομένου ότι η πιθανογεννήτρια πρέπει να συγκλίνει στο $\{z: \ |z| \leq 1\}$, θα πρέπει οι $r-1$ ρίζες του $D(z)$ που βρίσκονται στον ανοικτό δίσκο να είναι και ρίζες του αριθμητή $N(z)$, ώστε αυτές να μην είναι πόλοι για την $P(z)$. Σημειώνουμε ότι το $z=1$ είναι ρίζα τόσο του αριθμητή όσο και του παρανομαστή αφού $D(1) = N(1) = 0$.

Έτσι η (4.7) γράφεται στη μορφή:

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c\ \frac{z^r - 1}{(z-1)(z-z_0)} = \frac{c(z^{r-1} + z^{r-2} + \cdots + 1)}{z-z_0}. \tag{4.8}$$

Η σταθερά c υπολογίζεται από την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ ή $P(1) = 1$ από το οποίο προκύπτει ότι $c = \dfrac{1-z_0}{r}$. Αντικαθιστώντας στην (4.8) η πιθανογεννήτρια έχει τελικά τη μορφή:

$$P(z) = \frac{1-z_0}{r}(1 + z + \cdots + z^{r-1})\frac{1}{z-z_0}.$$

Από την τελευταία σχέση θα προσδιορίσουμε τη στάσιμη κατανομή ως εξής:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{z_0-1}{r}(1+z+\cdots+z^{r-1})\frac{1}{z_0}\frac{1}{1-z/z_0} \\ &= \frac{(1+z+\cdots+z^{r-1})}{r}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z_0^n}z^n, \end{aligned}$$

οπότε

$$[z^n]\,P(z) = [z^n]\left\{\frac{(1+z+\cdots+z^{r-1})}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\frac{1}{z_0^n}z^n\right\}.$$

Άρα

$$p_n = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\frac{1}{z_0^{n-k}}, \quad n=0,1,...,r-1$$

και

$$p_n = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\frac{1}{z_0^{n-k}}, \quad n=r,r+1,...$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι αν $\rho < r$ το σύστημα είναι ευσταθές και άρα υπάρχει στάσιμη κατανομή, την οποία υπολογίσαμε.

ii. $A'(1) = 0$ ή $r = \rho$

Στην περίπτωση αυτή, με βάση το Θεώρημα 12, προκύπτει ότι το $D(z)$ έχει $r-1$ απλές ρίζες στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου και τη μονάδα με πολλαπλότητα 2. Άρα θα πρέπει και ο αριθμητής $N(z) = (z^r-1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ να έχει $(r-1)$ ρίζες στο εσωτερικό του δίσκου και διπλή τη μονάδα. Ο όρος (z^r-1) έχει τις r-οστές ρίζες της μονάδας. Άρα ο όρος $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ θα πρέπει να έχει απλή ρίζα τη μοναδα και άλλες $(r-1)$ στο εσωτερικό του δίσκου, δηλαδή θα έχει συνολικά r ρίζες. Αλλά πρόκειται για πολυώνυμο βαθμού $(r-1)$. Κατά συνέπεια αυτό είναι ταυτοτικά το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα $P(z) = 0$ και $p_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Συνεπώς στην περίπτωση που $r = \rho$, το σύστημα είναι ασταθές.

iii. $A'(1) < 0$ ή $r < \rho$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 12 διαπιστώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή το $D(z)$ έχει r ρίζες στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου και μια απλή τη μονάδα. Έτσι, όπως και προηγουμένως, θα πρέπει το πολυώνυμο $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ βαθμού $(r-1)$ να έχει r ρίζες και κατά συνέπεια αυτό είναι ταυτοτικά μηδέν. Άρα και στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι ασταθές και $p_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το Θεώρημα 12, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως πόρισμα του Θεωρήματος του Rouché, χρησιμεύει αφενός για να προσδιορίσουμε άγνωστες παραμέτρους που υπεισέρχονται στην πιθανογεννήτρια και αφετέρου να εξάγουμε τη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος.

4.2 Ένα ασυμπτωτικό αποτέλεσμα

Υποθέτουμε ότι έχουμε βρεί τη γεννήτρια συνάρτηση $f(z)$ μιας ακολουθίας. Στην παράγραφο αυτή μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ακολουθίας αυτής, δηλαδή να βρούμε μια απλή συνάρτηση που να αποτελεί καλή προσέγγιση της ακολουθίας για μεγάλα n.

Για το σκοπό αυτό, αρχικά ξεκινάμε με την αναζήτηση των πόλων της $f(z)$. Η ακτίνα του μεγαλύτερου δίσκου ο οποίος δεν περιέχει κανένα πόλο είναι ακριβώς η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $f(z)$, δηλ. η $f(z)$ είναι αναλυτική μέσα στο δίσκο αυτό. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε μερόμορφες συναρτήσεις, δηλαδή σε συναρτήσεις οι οποίες είναι αναλυτικές σε μια περιοχή εκτός από πεπερασμένο πλήθος πόλων. Παρακάτω θα μελετήσουμε την επίδραση των πόλων τέτοιων συναρτήσεων στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των συντελεστών τους.

Έστω $f(z)$ μερόμορφη σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου. Αν R είναι το μικρότερο από τα μέτρα των πόλων της, τότε η f είναι αναλυτική στο δίσκο $\{z : |z| < R\}$ και άρα η ακτίνα σύγκλισής της είναι ακριβώς R. Αντίστροφα, αν η δυναμοσειρά $f(z)$ συγκλίνει σ'ένα δίσκο $\{z : |z| < R\}$ αλλά όχι σε μεγαλύτερο (με το ίδιο κέντρο), τότε υπάρχουν μία ή περισσότερες ανωμαλίες της f στην περιφέρεια $|z| = R$. Η τακτική που θα ακολουθήσουμε είναι να προσπαθήσουμε να βρούμε μια άλλη συνάρτηση $g(z)$ με τις ίδιες ανωμαλίες με την f στην περιφέρεια $\{z : |z| = R\}$. Τότε η $f - g$ είναι αναλυτική σε ένα μεγαλύτερο δίσκο ακτίνας έστω $R' > R$. Η ιδέα είναι ότι κοντά σε ένα πόλο z_0, μια μερόμορφη συνάρτηση προσεγγίζεται καλά από το κύριο μέρος του αναπτύγματός της σε σειρά Laurent, δηλ. από πεπερασμένο πλήθος όρων που περιέχουν τον όρο $(z - z_0)$ υψωμένο σε αρνητική δύναμη.

Υπενθυμίζουμε μερικούς βασικούς ορισμούς από τη Μιγαδική Ανάλυση που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Ορισμός 22. ***Ανάπτυγμα Laurent***

Αν $f : S(z_0, r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ *αναλυτική, όπου* $S(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, *τότε υπάρχει ακολουθία* $\{\alpha_n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ *μιγαδικών αριθμών ώστε*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

όπου

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad n=0,1,...\\
a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} f(z)(z-z_0)^{n-1}dz \quad n=1,2,...
\end{aligned}
$$

και c_1, c_2 *είναι οι κύκλοι* $|z-z_0|=r_1$ *και* $|z-z_0|=r_2$ *αντίστοιχα.*
Ο πρώτος όρος $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *λέγεται κανονικό μέρος της σειράς, ενώ ο δεύτερος* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *λέγεται κύριο ή πρωτεύον μέρος. Προφανώς αν η συνάρτηση είναι αναλυτική στο* $|z-z_0|<r_1$, *τότε η σειρά Laurent εκφυλίζεται στο κανονικό της μέρος, δηλαδή σε σειρά Taylor.*

Ορισμός 23. *Η* f *έχει πόλο τάξης* $m \geq 1$ *στο* z_0 *τότε και μόνο τότε αν* $a_{-m} \neq 0$ *και* $a_{-n}=0$ *για κάθε* $n>m$.

Τότε η f αναλύεται ως

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}+\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j.$$

Στην περίπτωση αυτή, το κύριο μέρος του αναπτύγματος της f γύρω από το z_0, το οποίο θα συμβολίζουμε με $PP(f,z_0)$, είναι το πρώτο άθροισμα, δηλαδή

$$PP(f,z_0)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\cdots+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}.$$

Έτσι, αν f είναι μερόμορφη σε μια περιοχή $\Re$ και z_0 πόλος τάξης r, $1 \leq r < \infty$, τότε αναλύεται σε ένα δίσκο με κέντρο το z_0 ως:

$$f(z)=PP(f,z_0)+\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j.$$

Η συνάρτηση $f(z)-PP(f,z_0)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ είναι αναλυτική στο z_0. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι απαλείφουμε την ανωμαλία της f αφαιρώντας το κύριο μέρος της. Αν εκτός από το z_0 υπάρχουν κι άλλοι πόλοι πάνω στον ίδιο κύκλο ακτίνας $R=|z_0|$, έστω $z_1,...,z_s$, τότε η συνάρτηση

$$h(z)=f(z)-PP(f,z_0)-PP(f,z_1)-\cdots-PP(f,z_s)$$

είναι αναλυτική σε κάθε ένα από τα σημεία $z_0,z_1,...,z_s$ και γενικά σε ένα δίσκο ακτίνας $R'>R$.

Από γνωστό θεώρημα (βλέπε Κεφάλαιο 2) για τους συντελεστές, έστω h_n, του αναπτύγματος της $h(z)$ ισχύει ότι, για κάθε $\epsilon > 0$

$$|h_n| < \left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 \ \text{ για κάποιο } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, αν $f \leftrightarrow \{a_n\}$ και $g = PP(f, z_0) + \cdots + PP(f, z_s) \leftrightarrow \{b_n\}$ τότε

$$\alpha_n = b_n + O\Bigg(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n\Bigg), \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Αν z_0 πόλος τάξης r της $f(z)$, τότε

$$\begin{aligned} PP(f, z_0) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^j (1 - (z/z_0))^j} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} (z/z_0)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Bigg\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Έτσι, ένας πόλος τάξης r στο σημείο z_0 μιας συνάρτησης f, συνεισφέρει $\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{-j}}{z_0^{n+j}} \binom{n+j-1}{j-1}$ στο συντελεστή z^n της f. Στο βασικό Θεώρημα που ακολουθεί συνοψίζονται τα παραπάνω αποτελέσματα.

<u>Θεώρημα</u> 13. *Έστω f μερόμορφη συνάρτηση σε μια περιοχή $\Re$ που περιέχει το μηδέν. Έστω R το ελάχιστο μέτρο των πόλων της f. Αν $z_0, z_1, \ldots, z_s$ είναι οι πόλοι με το ίδιο μέτρο $R > 0$ και R' το αμέσως μεγαλύτερο μέτρο τους, τότε*

$$[z^n] f(z) = [z^n] \sum_{j=0}^{s} PP(f, z_j) + O\Bigg(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n\Bigg).$$

Απόδειξη:

Έστω $g_0(z) = f(z) - PP(f, z_0)$

Τότε η $g_0(z)$ προφανώς είναι αναλυτική στο z_0. Επιπλέον ισχύει ότι:

$$PP(g_0, z_1) = PP(f, z_1).$$

Το τελευταίο πράγματι ισχύει αν λάβουμε υπόψη ότι για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Laurent μιας συνάρτησης, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον τύπο της σε άθροισμα επιμέρους συναρτήσεων και να βρούμε τα αναπτύγματά τους χωριστά, οπότε

$$\begin{aligned} PP(g_0, z_1) &= PP(\ f - PP(f, z_0), z_1\ ) \\ &= PP(f, z_1) - PP(PP(f, z_0), z_1). \end{aligned}$$

Αλλά η $PP(f, z_0)$ είναι αναλυτική στο z_1. Άρα $PP(PP(f, z_0), z_1)$=0.
Έτσι,

$$PP(g_0, z_1) = PP(f, z_1).$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά προκύπτει ότι

$$f(z) = \sum_{j=0}^{s} PP(f, z_j) + h(z),$$

όπου η $h(z)$ δεν παρουσιάζει ανωμαλία στα $z_0,\ z_1, \ldots, z_s$ και άρα είναι αναλυτική σ'ένα μεγαλύτερο δίσκο $R' > R$ (R' είναι το μέτρο του πόλου με το αμέσως μεγαλύτερο μέτρο του R). Στο δίσκο αυτό μπορεί να γραφεί στη μορφή $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για τους συντελεστές h_n ισχύει ότι

$$|h_n| < \left(\tfrac{1}{R'} + \epsilon\right)^n.$$

Άρα

$$[z^n]f(z) = [z^n] \sum_{j=0}^{s} PP(f, z_j) + O\Bigg(\left(\frac{1}{R'} + \epsilon\right)^n \Bigg),$$

όπου όπως δείξαμε παραπάνω, αν z_j πόλος της f τάξης r, τότε

$$[z^n]PP(f, z_j) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^k a_{-k}}{z_j^{n+k}} \binom{n+k-1}{k-1}. \qquad \square$$

Το βασικό αυτό Θεώρημα βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση που η συνάρτηση που μελετάμε είναι η πιθανογεννήτρια μιας κατανομής πιθανότητας. Η πιθανογεννήτρια είναι πάντοτε αναλυτική στο δίσκο $\{z : |z| \leq 1\}$. Έτσι, αναζητούμε μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in N}$ η οποία αποτελεί καλή προσέγγιση της συνάρτησης πιθανότητας.

Πόρισμα:

Έστω η πιθανογεννήτρια $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ της κατανομής πιθανότητας $\{p_n,\ n = 0, 1, ...\}$, η οποία είναι ρητή συνάρτηση της μορφής $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. Αυτή ορίζεται για $|z| \leq 1$, αλλά επιπλέον υποθέτουμε ότι οι $N(z),\ D(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις τουλάχιστον σε κάποιο δίσκο $\{z :\ |z| < R\}$ στο μιγαδικό επίπεδο με $R > 1$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

i. Η εξίσωση $D(z) = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα z_0 στο διάστημα $(1, R)$.

ii. Η συνάρτηση $D(z)$ δεν έχει μηδενικά (ρίζες) στην περιοχή $1 < |z| < z_0$ του μιγαδικού επιπέδου.

iii. Η ρίζα $z = z_0$ της $D(z)$ έχει πολλαπλότητα 1 και είναι η μοναδική ρίζα της $D(z)$ στην περιφέρεια $\{z : |z| = z_0\}$.

Κάτω από τις υποθέσεις αυτές
$$p_n \sim\ -\frac{N(z_0)}{D'(z_0)}\left(\frac{1}{z_0}\right)^{n+1},$$
όπου $D'(z_0)$ η παράγωγος της $D(z)$ στο σημείο z_0.

Απόδειξη:

Άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα, εφόσον z_0 πόλος τάξης 1 και η ανάλυση της $P(z)$ σε σειρά Laurent είναι
$$P(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$$
όπου $\alpha_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)P(z) = \dfrac{N(z_0)}{D'(z_0)}$.

Παράδειγμα: Δύο παίκτες ρίχνουν ένα νόμισμα. Κατά τη ρίψη του νομίσματος η όψη 'κορώνα'(Κ) εμφανίζεται με πιθανότητα p, ενώ η όψη 'γράμματα'(Γ) με πιθανότητα $q = 1 - p$. Νικητής ανακηρύσσεται αυτός που θα καταφέρει στις N δοκιμές να εμφανιστούν s συνεχόμενες φορές η όψη (Κ). Έστω P_N η πιθανότητα νίκης, δηλαδή η πιθανότητα, σε N ανεξάρτητες δοκιμές με πιθανότητα επιτυχίας p, να εμφανιστεί μια ακολουθία από s διαδοχικές επιτυχίες.Τότε

$$P_N = \sum_{j=0}^{N} p_j$$

όπου p_j είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A να συμβεί μια ακολουθία από s διαδοχικές επιτυχίες για πρώτη φορά στη j δοκιμή, δηλ. $p_j = P(A)$. Ισχύουν οι προφανείς σχέσεις:

$$p_j = \begin{cases} 0, & j < s \\ p^s, & j = s \end{cases} . \tag{4.10}$$

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $p_j,\ j > s$. Έστω S ο αριθμός της ρίψης που εμφανίζεται για πρώτη φορά αποτυχία. Τότε η τ.μ. S ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Έτσι

$$P(S = n) = qp^{n-1},\ n \geq 1.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας προκύπτει

$$\begin{aligned} p_j &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|S = n)\ P(S = n) \\ &= \sum_{n=1}^{s} P(A|S = n)\ P(S = n) + \sum_{n=s+1}^{\infty} P(A|S = n)\ P(S = n). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Στο δεύτερο άθροισμα η πιθανότητα $P(A|S = n) = 0$ διότι, αν η αποτυχία έρθει μετά την s δοκιμή $(n > s)$, τότε ήδη θα έχουν προηγηθεί οι s συνεχόμενες επιτυχίες και το ενδεχόμενο A θα έχει πραγματοποιηθεί για $j \leq s$. Επιπλέον κάθε φορά που εμφανίζεται 'Γ', δηλ. έχουμε αποτυχία, αρχίζει εκ νέου η καταμέτρηση των επιτυχιών. Έτσι $P(A|S = n) = p_{j-n},\ n \leq s$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η (4.11) γίνεται

$$p_j = \sum_{n=1}^{s} qp^{n-1} p_{j-n},\ j > s. \tag{4.12}$$

Η τελευταία αποτελεί μία αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό των ζητούμενων πιθανοτήτων. Έτσι είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός τους. Για μεγάλα j, μπορούμε να αποκτήσουμε μια καλή προσέγγιση των πιθανοτήτων p_j, εφαρμόζοντας το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$ της $\{p_j\}$ λόγω των (4.10) και (4.12) γράφεται

$$\begin{aligned}P(z) &= \sum_{j=0}^{s-1} p_j z^j + p_s z^s + \sum_{j=s+1}^{\infty} p_j z^j \\ &= 0 + p_s z^s + \sum_{j=s+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} p_{j-n} z^j \\ &= p_s z^s + \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n \sum_{j=s+1}^{\infty} p_{j-n} z^{j-n} \\ &= p_s z^s + P(z) \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n.\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$P(z) = \frac{p_s z^s}{1 - \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n}. \tag{4.13}$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανογεννήτρια είναι ρητή συνάρτηση. Ο αριθμητής $N(z) = p_s z^s$ έχει ρίζα μόνο το μηδέν, το οποίο δεν είναι ρίζα του παρανομαστή $D(z) = 1 - \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n$. Επιπλέον η ακτίνα σύγκλισης και των δύο μπορεί να επεκταθεί μέχρι το άπειρο αφού πρόκειται για πολυώνυμα. Διαπιστώνουμε ότι ισχύουν τα εξής:

i. Η εξίσωση $D(z) = 0$ έχει μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1, \infty)$.
   Πράγματι, θέτοντας $z = 1$, $D(1) = p^s > 0$ και $\lim_{z\to\infty} D(z) = -\infty$. Άρα η $D(z)$ έχει μία ρίζα, έστω $z_0 \in (1, \infty)$.

ii. Η $D(z)$ δεν έχει ρίζες στην περιοχή $1 < |z| < z_0$.
   Πράγματι,
   $$|1 - D(z)| = |\sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n| \le \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} |z^n| < \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z_0^n = 1.$$
   Άρα $|1 - D(z)| < 1$, δηλ. $D(z) \neq 0$ στο $\{z : 1 < |z| < z_0\}$.

iii. Η ρίζα z_0 της $D(z) = 0$ είναι απλή, δηλαδή έχει πολλαπλότητα 1 και είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης στην περιφέρεια $\{z : |z| = z_0\}$.
   Πράγματι, έστω z ρίζα της $D(z)$ με $|z| = z_0$. Τότε $1 = \sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n$. Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη παίρνουμε
   $$1 = Re[\sum_{n=1}^{s} q p^{n-1} z^n]$$

από το οποίο προκύπτει

$$1 = \sum_{n=1}^{s} qp^{n-1} Re[z^n] \leq \sum_{n=1}^{s} qp^{n-1} |z^n| = \sum_{n=1}^{s} qp^{n-1} |z|^n = \sum_{n=1}^{s} qp^{n-1} z_0^n = 1.$$

Άρα όλες οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως ισότητες και εξισώνοντας τους συντελεστές για $n = 1$ παίρνουμε

$$Re(z) = |z| = z_0.$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός και επιπλέον $z = z_0$.
Τέλος, $D'(z) = -\sum_{n=1}^{s} nqp^{n-1} z^{n-1}$. Έτσι, $D'(z_0) \neq 0$ (αφού το z_0 είναι θετικός πραγματικός αριθμός) και κατά συνέπεια η ρίζα z_0 είναι απλή.

Έτσι δείξαμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Πορίσματος, σύμφωνα με το οποίο

$$\begin{aligned} p_n &\sim -\frac{N(z_0)}{z_0 D'(z_0)} \frac{1}{(z_0)^n} \\ &= \frac{p(pz_0)^{s-1}}{q \sum_{k=1}^{s} k(pz_0)^{k-1}} \frac{1}{(z_0)^n}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.3 Άθροισμα όρων ακολουθίας σε αριθμητική πρόοδο δεικτών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των πιθανογεννητριών συναρτήσεων στις περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε αθροίσματα σε δείκτες που σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο.

Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της μονάδας προκειμένου να ξεχωρίσουμε μια αριθμητική πρόοδο όρων από τη σειρά. Έτσι για παράδειγμα ας δούμε πως μπορούμε να διαλέξουμε μόνο τις άρτιες δυνάμεις μιας δυναμοσειράς. Αν η σειρά αντιστοιχεί στη συνάρτηση f, τότε ως γνωστό η $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ έχει μόνο τους όρους με τις άρτιες δυνάμεις του x, ενώ η $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ έχει μόνο τις περιττές. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι οι δύο τετραγωνικές ρίζες της μονάδας, 1 και -1, έχουν την ιδιότητα ότι

$$\frac{1^n+(-1)^n}{2}=\begin{cases} 1, & \text{αν n άρτιος} \\ 0, & \text{αν n περιττός} \end{cases}.$$

Αντίστοιχα για τις κυβικές ρίζες της μονάδας 1, ω_1, ω_2 (όπου $\omega_1=e^{2\pi\imath/3}$, $\omega_2=\omega_1^2=e^{4\pi\imath/3}$) ισχύει:

$$\frac{1^n+\omega_1^n+\omega_2^n}{3}=\begin{cases} 1, & \text{αν } 3|n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Έτσι, για κάθε συγκλίνουσα δυναμοσειρά $f=\sum_n a_n z^n$ ισχύει

$$\frac{f(z)+f(\omega_1 z)+f(\omega_2 z)}{3}=\sum_n a_{3n}z^{3n}.$$

Γενικότερα ισχύει η **ταυτότητα**:

Αν $\omega_j,\ j=0,1,\ldots,\tau-1$ είναι οι τ-οστές ρίζες της μονάδας τότε

$$\sum_{j=0}^{\tau-1}\omega_j^n=\begin{cases} \tau, & \text{αν } \tau|n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{\tau-1}\omega_j^n=\begin{cases} 1, & \text{αν } \tau|n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \quad (I)$$

Απόδειξη:

Ως γνωστό για τις τ-οστες ρίζες της μονάδας ισχύει ότι $\omega_1=e^{2\pi i/\tau}$ και $\omega_j=\omega_1^j,\ j=0,1,\ldots,\tau-1$.

Έτσι,

$$\sum_{j=0}^{\tau-1}\omega_j^n=\sum_{j=0}^{\tau-1}\omega_1^{jn}=\sum_{j=0}^{\tau-1}(e^{\frac{2\pi i}{\tau}})^{jn}=\sum_{j=0}^{\tau-1}(e^{\frac{2\pi n}{\tau}i})^j.$$

i. Αν $e^{\frac{2\pi n}{\tau}i} = 1$ το οποίο ισχύει ανν $\tau | n$, τότε
$\sum_{j=0}^{\tau-1} \omega_j^n = \tau$.

ii. Αν $e^{\frac{2\pi n}{\tau}i} \neq 1$ το οποίο ισχύει ανν $\tau \nmid n$, τότε
$\sum_{j=0}^{\tau-1} \omega_j^n = \dfrac{1-\left(e^{\frac{2\pi n}{\tau}i}\right)^{\tau}}{1-e^{\frac{2\pi n}{\tau}i}} = \dfrac{1-e^{2\pi n i}}{1-e^{\frac{2\pi n}{\tau}i}} = 0.$ $\square$

Έστω $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα, θα υπολογίσουμε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{\substack{n\pi o\lambda/\sigma\iota o\\ \tau o\upsilon\ \tau}} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k\tau} z^{k\tau}$ ως εξής:

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{\tau-1} P(\omega_j z) = \frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{\tau-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega_j z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{\tau-1}\omega_j^n\right) z^n \stackrel{(I)}{=} \sum_{\substack{n\pi o\lambda/\sigma\iota o\\ \tau o\upsilon\ \tau}} a_n z^n.$$

Στη συνέχεια θα δούμε μια εφαρμογή της διαδικασίας που περιγράψαμε. Υποθέτουμε ότι σε ένα σύστημα, π.χ. συνεργείο, φτάνουν εξαρτήματα προς επισκευή σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ). Μόλις συμπληρωθεί μια ομάδα από N, τότε τα παραλαμβάνει ο μηχανικός και αποχωρούν από το σύστημα. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα p τη χρονική στιγμή t να μην υπάρχει κανένα εξάρτημα σε αναμονή.

Έστω $X(t)$ ο αριθμός των εξαρτημάτων που έχουν μπει στο σύστημα μέχρι τη χρονική στιγμή t. Τότε $X(t) \sim Poisson(\lambda t)$. Η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

$$p = P(X(t) \text{ να είναι πολ/σιο του } N) = P(X(t) = 0\ modN) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X(t) = nN).$$

Επιπλέον η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Poisson(λt) είναι $P(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$. Αν $\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}$ είναι οι N-οστές ρίζες της μονάδας, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει:

$$p = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} P(\omega_j z)\bigg|_{z=1} = \frac{P(\omega_1) + \cdots + P(\omega_1^{N-1}) + P(1)}{N}.$$

π.χ. Για $N = 2$ οι τετραγωνικές ρίζες της μονάδας είναι 1 και -1, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$p = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2}.$$

Ομοίως στην περίπτωση που $N = 3$

$$p = \frac{P(1) + P(\omega_1) + P(\omega_1^2)}{3} = \frac{1 + P(e^{2\pi i/3}) + P(e^{4\pi i/3})}{3}.$$

Ας δούμε ένα ακόμα απλό παράδειγμα στο οποίο φαίνεται η χρησιμότητα του παραπάνω αποτελέσματος. Έστω X τ.μ. η οποία ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $(100, 1/3)$. Η πιθανότητα π, η X να είναι πολλαπλάσιο του 3 μπορεί να υπολογιστεί μέσω του αθροίσματος

$$\pi = \sum_{n=0}^{33} \binom{100}{3n} \left(\frac{1}{3}\right)^{3n} \left(\frac{2}{3}\right)^{100-3n}.$$

Ο υπολογισμός του τελευταίου αθροίσματος είναι αρκετά περίπλοκος. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της ζητούμενης πιθανότητας είναι εφαρμόζοντας τη θεωρία που περιγράψαμε. Η πιθανογεννήτρια της X είναι, ως γνωστό, $P(z) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z\right)^{100}$. Έτσι,

$$\pi = \frac{P(1) + P(e^{2\pi i/3}) + P(e^{4\pi i/3})}{3}.$$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

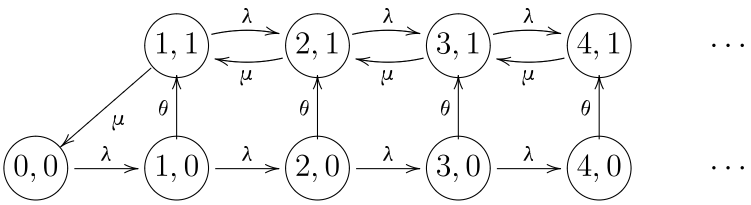
5.1 Η $M/M/1$ ουρά με χρόνο εκκίνησης του υπηρέτη - Λύση με πιθανογεννήτριες

Θα εξετάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ). Το σύστημα διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και εκθετικοί με παράμετρο μ. Όταν το σύστημα είναι άδειο ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Με την άφιξη πελάτη ο οποίος βρίσκει το σύστημα κενό, αρχίζει ένας χρόνος προετοιμασίας (setup time) του υπηρέτη ο οποίος ακολουθεί την εκθετική(θ) κατανομή. Μετά το πέρας του χρόνου αυτού ο υπηρέτης ξεκινάει να εξυπηρετεί τους παρόντες πελάτες, ενώ κατά τη διάρκειά του οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά.

Έστω $S(t)$ η κατάσταση του υπηρέτη τη στιγμή t, όπου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν ο υπηρέτης τη στιγμή t είναι απενεργοποιημένος} \\ 1, & \text{αν ο υπηρέτης τη στιγμή t είναι ενεργός.} \end{cases}$$

Αν $Q(t)$ είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t, τότε η $\{(Q(t), S(t)),\ t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n,i),\ i = 0,1,\ n = i, i+1, \ldots\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Έστω $(\pi(n,i): \ (n,i) \in S)$ η στάσιμη κατανομή, όταν υπάρχει. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned}
\lambda\pi(0,0) &= \mu\pi(1,1) &(5.1)\\
(\lambda+\theta)\pi(n,0) &= \lambda\pi(n-1,0), \quad n=1,2,\ldots &(5.2)\\
(\lambda+\mu)\pi(1,1) &= \mu\pi(2,1)+\theta\pi(1,0) &(5.3)\\
(\lambda+\mu)\pi(n,1) &= \lambda\pi(n-1,1)+\mu\pi(n+1,1)+\theta\pi(n,0), \quad n=2,3,\ldots &(5.4)
\end{aligned}$$

Ορίζουμε $\varPi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n,0)z^n$ και $\varPi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n,1)z^n$ τις γεννήτριες των ακολουθιών πιθανοτήτων $\{\pi(n,0), \ n=0,1,\ldots\}$ και $\{\pi(n,1), \ n=1,\ldots\}$ αντίστοιχα.

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις, πολλαπλασιάζοντας με z^n και αθροίζοντας για όλα τα $n \geq 0$ παίρνουμε

$$(\lambda+\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\pi(n,0)z^n - \theta\pi(0,0) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n-1,0)z^n + \mu\pi(1,1)$$

η οποία, λόγω του ορισμού της $\varPi_0(z)$ γράφεται

$$(\lambda+\theta)\varPi_0(z) - \theta\pi(0,0) = \lambda z\varPi_0(z) + \mu\pi(1,1)$$

και λόγω της (5.1)

$$(\lambda+\theta-\lambda z)\varPi_0(z) = (\lambda+\theta)\pi(0,0).$$

Άρα

$$\varPi_0(z) = \frac{(\lambda+\theta)}{\lambda(1-z)+\theta}\,\pi(0,0). \tag{5.5}$$

Ομοίως πολλαπλασιάζοντας την (5.3) με z και την (5.4) με z^n, $n \geq 2$ και αθροίζοντας προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n,1)z^n &= \lambda\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n-1,1)z^n + \mu\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n+1,1)z^n + \theta\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n,0)z^n\\
(\lambda+\mu)\varPi_1(z) &= \lambda z\varPi_1(z) + \frac{\mu}{z}(\varPi_1(z)-\pi(1,1)z) + \theta(\varPi_0(z)-\pi(0,0)).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.1) και (5.5) κατόπιν πράξεων η τελευταία σχέση γράφεται:

$$(\lambda z^2 - (\lambda + \mu)z + \mu)\Pi_1(z) = \frac{\lambda z(1-z)(\lambda+\theta)}{\lambda(1-z)+\theta}\ \pi(0,0).$$

Θέτοντας $\rho = \lambda/\mu$ η $\Pi_1(z)$ γράφεται ως:

$$\Pi_1(z) = \frac{\rho z(\lambda+\theta)}{(1-\rho z)(\lambda(1-z)+\theta)}\ \pi(0,0). \tag{5.6}$$

Για τον προσδιορισμό των $\Pi_0(z)$, $\Pi_1(z)$ απαιτείται ο υπολογισμός της πιθανότητας $\pi(0,0)$, η οποία θα βρεθεί μέσω της εξίσωσης κανονικοποίησης:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n,1) = 1. \tag{5.7}$$

Η τελευταία, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n,0) = \Pi_0(1)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \pi(n,1) = \Pi_1(1)$, θέτουμε $z = 1$ στις (5.5), (5.6) και αντικαθιστώντας στην (5.7) προκύπτει ότι:

$$\frac{\lambda+\theta}{\theta}\ \pi(0,0) + \frac{\rho(\lambda+\theta)}{\theta(1-\rho)}\ \pi(0,0) = 1. \tag{5.8}$$

Λύνοντας την τελευταία ως προς $\pi(0,0)$ παίρνουμε τελικά

$$\pi(0,0) = \frac{\theta(1-\rho)}{\lambda+\theta}. \tag{5.9}$$

Αν $\rho = 1$, τότε $\pi(0,0) = 0$ και κατά συνέπεια, λόγω των (5.5), (5.6), $\Pi_0(z) = \Pi_1(z) = 0$. Έτσι $\pi(n,0) = \pi(n,1) = 0,\ n \geq 1$. Άρα στην περίπτωση που $\rho = 1$, δεν υπάρχει γνήσια οριακή κατανομή. Επιπλέον, αν $\rho > 1$ τότε $\pi(0,0) < 0$, το οποίο είναι αδύνατο.

Έτσι το σύστημα είναι ευσταθές μόνο στην περίπτωση που $\rho < 1$, ή ισοδύναμα $\lambda < \mu$ και τότε υπάρχει στάσιμη κατανομή την οποία θα υπολογίσουμε στη συνέχεια. Αντικαθιστώντας την (5.9) στην (5.5) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\Pi_0(z) &= \frac{(\lambda+\theta)}{\lambda(1-z)+\theta}\ \frac{\theta(1-\rho)}{\lambda+\theta} = \frac{\theta(1-\rho)}{\lambda+\theta-\lambda z} \\ &= \frac{\theta(1-\rho)}{(\lambda+\theta)}\ \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}z} = \frac{\theta(1-\rho)}{(\lambda+\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)^n z^n.\end{aligned}$$

Άρα

$$\pi(n,0) = \frac{\theta(1-\rho)}{(\lambda+\theta)} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)^n, \quad n \geq 0. \tag{5.10}$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται και οι πιθανότητες $\pi(n,1),\ n \geq 1$. Έτσι αντικαθιστώντας την (5.9) στην (5.6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) = & \frac{\rho z(\lambda+\theta)}{(1-\rho z)(\lambda(1-z)+\theta)} \frac{\theta(1-\rho)}{\lambda+\theta} \\ = & \frac{\theta\rho(1-\rho)}{\lambda+\theta} \frac{z}{(1-\rho z)(1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}z)}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Θα συνεχίσουμε αναλύοντας τον τελευταίο όρο της σχέσης σε απλά κλάσματα. Πρέπει στο σημείο αυτό να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

a. Αν $\rho \neq \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$ ή ισοδύναμα $\mu \neq \lambda+\theta$, τότε

$$\frac{z}{(1-\rho z)(1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}z)} = \frac{A}{1-\rho z} + \frac{B}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}z}$$

όπου τα $A,\ B$ δίνονται από τις σχέσεις

$$A = \lim_{z\to 1/\rho}\left\{\frac{z(1-\rho z)}{(1-\rho z)(1-\frac{\lambda}{\lambda+\theta}z)}\right\} = \frac{\lambda+\theta}{(\lambda+\theta)\rho-\lambda}$$

και

$$B = \lim_{z\to \lambda/(\lambda+\theta)}\left\{\frac{z(1-\frac{\lambda}{\lambda+\theta}z)}{(1-\rho z)(1-\frac{\lambda}{\lambda+\theta}z)}\right\} = -\frac{\lambda+\theta}{(\lambda+\theta)\rho-\lambda}.$$

Αντικαθιστώντας τα A και B στην (5.11) τελικά η $\Pi_1(z)$ παίρνει τη μορφή:

$$\Pi_1(z) = \frac{\theta\rho(1-\rho)}{(\lambda+\theta)\rho-\lambda}\left(\frac{1}{1-\rho z} - \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}z}\right). \tag{5.12}$$

Από την τελευταία σχέση εξάγουμε ότι:

$$\pi(n,1) = \frac{\theta\rho(1-\rho)}{(\lambda+\theta)\rho-\lambda}\left(\rho^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)^n\right)\ ,\ n \geq 1. \tag{5.13}$$

b. Αν $\rho = \dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}$, ή ισοδύναμα $\mu = \lambda+\theta$, τότε η (5.11) γράφεται:

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &= \frac{\theta\rho(1-\rho)}{\lambda+\theta}\frac{z}{(1-\rho z)^2} = \frac{\theta\rho(1-\rho)}{\lambda+\theta} z \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2+n-1}{n}\rho^n z^n \\ &= \frac{\theta\rho(1-\rho)}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^n z^{n+1} = \frac{\theta(1-\rho)}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n z^n. \end{aligned}$$

Άρα

$$\pi(n,1) = \frac{\theta(1-\rho)}{\mu} n\rho^n, \quad n \geq 1. \tag{5.14}$$

Αν θέσουμε $\rho_1 = \rho$ και $\rho_2 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\theta}$ τότε, συνοψίζοντας, η στάσιμη κατανομή στην περίπτωση ευσταθούς συστήματος ($\rho < 1$) δίνεται από τις σχέσεις:

$$\pi(n,0) = \begin{cases} \dfrac{\theta(1-\rho_1)}{(\lambda+\theta)} \rho_2^n = (1-\rho_1)(1-\rho_2^n)\rho_2^n, & \text{αν } \rho_1 \neq \rho_2 \\ (1-\rho)^2 \rho^n, & \text{αν } \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases} \qquad n \geq 0$$

$$\pi(n,1) = \begin{cases} \dfrac{\theta\rho_1(1-\rho_1)}{(\lambda+\theta)\rho_1 - \lambda} (\rho_1^n - \rho_2^n) = C(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2^n - \rho_1^n), & \text{αν } \rho_1 \neq \rho_2 \\ \\ \dfrac{\theta(1-\rho)}{\mu} n\rho^n = C' n\rho^n, & \text{αν } \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases} \qquad n \geq 1$$

όπου $C = \dfrac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}$ και $C' = \dfrac{\theta(\mu-\lambda)}{\mu^2} = (1-\rho)^2$.

5.2 Η $M/M/1$ ουρά με χρόνο εκκίνησης του υπηρέτη - Λύση με εξισώσεις διαφορών

Θα μελετήσουμε το ίδιο μοντέλο με αυτό της προηγούμενης παραγράφου, κάνοντας όμως μια διαφορετική προσέγγιση. Θα υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή $(\pi(n,i),\ (n,i)\in S)$ χρησιμοποιώντας τη θεωρία των εξισώσεων διαφορών. Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda\pi(0,0) = \mu\pi(1,1) \tag{5.15}$$

$$(\lambda+\theta)\pi(n,0) = \lambda\pi(n-1,0)\ \ n=1,2,\ldots \tag{5.16}$$

$$(\lambda+\mu)\pi(1,1) = \mu\pi(2,1)+\theta\pi(1,0) \tag{5.17}$$

$$(\lambda+\mu)\pi(n,1) = \lambda\pi(n-1,1)+\mu\pi(n+1,1)+\theta\pi(n,0)\ \ n=2,3,\ldots \tag{5.18}$$

και την εξίσωση κανονικοποίησης (5.7)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi(n,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n,1)=1.$$

Η (5.16) είναι μια ομογενής εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Πράγμα-τι θεωρώντας $z_n=\pi(n,0)$ αυτή γράφεται $(\lambda+\theta)z_n=\lambda z_{n-1}$. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι $(\lambda+\theta)z^n-\lambda z^{n-1}=0$ ή $(\lambda+\theta)z-\lambda=0$ με λύση $\rho_2=\frac{\lambda}{\lambda+\theta}$. Έτσι η γενική λύση της (5.16) είναι

$$\pi(n,0)=c\rho_2^n.$$

Η τελευταία για $n=0$ δίνει $\pi(0,0)=c$. Άρα τελικά

$$\pi(n,0)=\pi(0,0)\rho_2^n,\ n\geq 0. \tag{5.19}$$

Η (5.18) είναι μια μη ομογενής εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Αυτή θέτοντας $y_n=\pi(n,1)$ και λόγω της (5.19), γράφεται ως:

$$\mu y_{n+1}-(\lambda+\mu)y_n+\lambda y_{n-1}=-\theta\pi(0,0)\rho_2^n. \tag{5.20}$$

Λύνοντας την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση $\mu y^2-(\lambda+\mu)y+\lambda=0$ αυτή έχει ρίζες $\rho_1=\frac{\lambda}{\mu}$ και $\rho_1^{'}=1$. Έτσι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (5.20) είναι

$$r_n=c_1\rho_1^n+c_2{\rho_1^{'}}^n=c_1\rho_1^n+c_2,\ n\geq 1\ \text{ αν } \rho_1\neq\rho_1' \tag{5.21}$$

ή

$$r'_n = C_1\rho_1^n + C_2 n\rho_1^n = C_1 + C_2 n,\ n \geq 1 \ \text{ αν } \rho_1 = \rho'_1 = 1. \tag{5.22}$$

Ως γνωστό για να βρούμε τη γενική λύση της (5.20) πρέπει να βρούμε μια ειδική της λύση, $y_n^{\text{ειδ}}$. Τότε η γενική της λύσης δίνεται ως το άθροισμα της ειδικής λύσης και αυτής της αντίστοιχης ομογενούς, δηλ.

$$y_n = r_n + y_n^{\text{ειδ}}.$$

Στην περίπτωση που $\rho_1 = \rho'_1 = 1$ ή ισοδύναμα $\lambda = \mu$ αναζητούμε ειδική λύση της μορφής $cn^2\rho_1^n = cn^2$ οπότε η γενική λύση θα είναι $y_n = \pi(n,1) = C_1 + C_2 n + cn^2$. Λόγω της εξίσωσης κανονικοποίησης, θα πρέπει $\sum_{n=1}^{\infty} \pi(n,1) < \infty$ από το οποίο άμεσα έπεται $C_1 = C_2 = c = 0$. Άρα $\pi(n,1) = 0,\ n \geq 1$ και αντικαθιστώντας στην (5.20) προκύπτει ότι $\pi(0,0) = 0$ και κατά συνέπεια $\pi(n,0) = 0,\ n \geq 0$. Έτσι στην περίπτωση που $\lambda = \mu$ δεν υπάρχει γνήσια οριακή κατανομή.

Εξετάζουμε λοιπόν την περίπτωση που $\rho \neq 1$ δηλαδή $\lambda \neq \mu$. Για την εύρεση της ειδικής λύσης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

a. Αν $\rho_1 \neq \rho_2$, ή ισοδύναμα $\mu \neq \lambda + \theta$, τότε δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $c\rho_2^n$. Αντικαθιστώντας στην (5.20) και λύνοντας ως προς c προκύπτει ότι

$$c = \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta}\pi(0,0).$$

Έτσι η ζητούμενη ειδική λύση είναι

$$y_n^{\text{ειδ}} = \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta}\ \rho_2^n \pi(0,0).$$

Άρα η γενική λύση της (5.20) θα είναι

$$\pi(n,1) = c_1\rho_1^n + c_2 + \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta}\ \rho_2^n \pi(0,0), \quad n = 1,2,... \tag{5.23}$$

Λόγω της εξίσωσης κανονικοποίησης, θα πρέπει $\sum_{n=1}^{\infty} \pi(n,1) < \infty$ από το οποίο άμεσα έπεται ότι $c_2 = 0$. Επιπλέον εφαρμόζοντας την (5.23) για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην (5.15) και λύνοντας ως προς c_1 προκύπτει ότι

$$c_1 = -\frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta}\pi(0,0).$$

Έτσι

$$\pi(n,1) = -\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\pi(0,0)\rho_1^n + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\,\rho_2^n\pi(0,0)$$

$$= \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\pi(0,0)(\rho_2^n-\rho_1^n) \quad n=1,2,... \tag{5.24}$$

Η πιθανότητα $\pi(0,0)$ θα υπολογιστεί με τη βοήθεια της εξίσωσης κανονικοποίησης. Αντικαθιστώντας τις (5.19) και (5.24) στην εξίσωση κανονικοποίησης (5.7) και λύνοντας ως προς $\pi(0,0)$ παίρνουμε

$$\pi(0,0) = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\,\frac{\theta}{\lambda+\theta} = (1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

Προφανώς θα πρέπει $\rho_1 < 1$ ή ισοδύναμα $\lambda < \mu$ για να έχει νόημα η $\pi(0,0)$. Τότε, από τις (5.19) και (5.24), η ζητούμενη κατανομή είναι:

$$\pi(n,0) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_2^n,\ n \geq 0$$

και

$$\pi(n,1) = \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_2^n-\rho_1^n),\ n \geq 1$$

που είναι ακριβώς οι σχέσεις που εξάγαμε και με τη μέθοδο των πιθανογεννητριών.

b. Αν $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, ή ισοδύναμα $\mu = \lambda+\theta$, τότε για την ειδική λύση της μη ομογενούς δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $c'n\rho^n$. Αντικαθιστώντας στην (5.20) και λύνοντας ως προς c' προκύπτει ότι

$$c' = \frac{\theta\rho}{\lambda-\mu\rho^2}\pi(0,0) = \pi(0,0).$$

Έτσι η ζητούμενη ειδική λύση είναι

$$y_n^{\text{ειδ}} = n\pi(0,0)\rho^n.$$

Άρα η γενική λύση της (5.20) θα είναι

$$\pi(n,1) = c_1^{'}\rho^n + c_2^{'} + n\rho^n\pi(0,0), \quad n=1,2,... \tag{5.25}$$

Όπως προηγούμενα, λόγω της εξίσωσης κανονικοποίησης, θα πρέπει $\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n,1) < \infty$ από το οποίο άμεσα έπεται $c_2^{'} = 0$.

Επιπλέον εφαρμόζοντας την (5.25) για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην (5.15) και λύνοντας ως προς $c_1^{'}$ προκύπτει ότι

$$c_1^{'} = 0.$$

Έτσι

$$\pi(n,1) = n\rho^n \pi(0,0), \quad n \geq 1. \tag{5.26}$$

Η πιθανότητα $\pi(0,0)$ θα υπολογιστεί και στην περίπτωση αυτή με τη βοήθεια της εξίσωσης κανονικοποίησης. Αντικαθιστώντας τις (5.19) και (5.26) στην (5.7) και λύνοντας ως προς $\pi(0,0)$ παίρνουμε

$$\pi(0,0) = (1-\rho)^2.$$

Έτσι η ζητούμενη κατανομή από τις (5.19) και (5.26) είναι

$$\pi(n,0) = (1-\rho)^2 \rho^n, \ n \geq 0$$

και

$$\pi(n,1) = (1-\rho)^2 n\rho^n, \quad n \geq 1$$

που είναι ακριβώς οι σχέσεις που εξάγαμε και στην περίπτωση αυτή με τη μέθοδο των πιθανογεννητριών.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

[1] Wilf, H. S.(1994) *Generatingfunctionology*, 2nd ed. , Academic Press, San Diego.

[2] Cartan, H. (1995) *Elementary Theory of Analytic Function of One or Several Complex Variables*, Dover.

[3] Economou A., Fakinos D.,(1999) The infinite server queue with arrivals generated by a non-homogenous compound Poisson process and heterogeneous customers, Commun.Statist.-Stochastic Models, **15**(5), 993-1002.

[4] Grassman, W. K. (1999) *Computational Probability*, 1st ed., Springer.

[5] Ivo Adan and Jan van der Wal, (1998) *Difference and Differencial Equations in Stochastic Operation Research*, Eidhoven.

[6] Ross, S. (1996) *Stochastic Processes*, 2nd ed., Wiley.

[7] Sirl, D. (2005) *Markov Chains: An Introduction/Review*, The universtity of Queensland, Australia.

[8] Tijms, H. C. (2003) *A First Course in Stochastic Models*, 1st ed., Wiley, Amsterdam.

Ελληνική Βιβλιογραφία - Ιστοσελίδες

[1] Νεγρεπόντη, Σ. Α.(1993) *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας μεταβλητής*, Συμμετρία, Αθήνα.

[2] Φακίνου, Δ. (2003) *Ουρές Αναμονής*, Αθήνα.

[3] Φακίνου, Δ. (2003) *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Αθήνα.

[4] Χαραλαμπίδη, Χ. Α. (2000) *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές*, τεύχος 1, Συμμετρία, Αθήνα.

[5] Encyclopedia Britannica: *Probability Theory.*

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Queueing_Theory, *Queueing Theory.*

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_series, *History of the theory of infinite series.*

[8] http://math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc3.html, *Selected Problems from the History of the Infinite Series.*

[9] http://www.answers.com/main, *formal power series.*

[10] http://www2.uwindsor.ca/ hlynka/qhist.html, *History of Queueing Theory.*