5/10/2023

Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

① Αρχές

1) Πολλαπλασιαστική
2) Προσθετική
3) Εγκλεισμός - Αποκλεισμός

} Απαρίθμηση Συνδυαστικών Σχηματισμών

4) Περιστεροφωλιάς (ή Dirichlet) → για ύπαρξη σχηματισμού

② Ανάλυση

Πολλαπλασιαστική Αρχή:

Αν ένας σχηματισμός γίνεται σε ν στάδια και

1ο στάδιο → κ_1 επιλογές.

2ο στάδιο → κ_2 επιλογές

⋮

νο στάδιο → κ_ν επιλογές.

Τότε το πλήθος των σχηματισμών είναι $\kappa_1 \kappa_2 \cdot \ldots \cdot \kappa_\nu$

* Η Αρχή ισχύει εφόσον:

Αν αρχίσω να αναρωτιέμαι ποια είναι η επόμενη επιλ. με βάση της προηγούμενης, η Αρχή καταρρέει.

1) Ο #επιλογών σε κάθε στάδιο είναι ο ίδιος ανεξάρτητα από τις προηγούμενες επιλογές. (δεν χρειάζεται να είναι και το ίδιο νούμερο)

2) Οι ν-άδες επιλογών είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τους σχηματισμούς (αλλιώς θα είχαμε διπλομέτρηση) ⇒ άρα πρέπει να είμαι βέβαιη πως δύο διαφορετικές επιλογές δεν καταλήγουν στο ίδιο αντικείμενο.

όχι 0 στην 1η θέση

πχ1 # 4-ψήφιων περιττών αριθμών.

Δεν μπορεί να είναι το 0 στην αρχή

1ο βήμα → Επιλογή 1ου ψηφίου (αριστερά) → 9 τρόποι

2ο βήμα → Επιλογή 2ου ψηφίου → 10 τρόποι

3ο βήμα → Επιλογή 3ου ψηφίου → 10 τρόποι

4ο βήμα → Επιλογή 4ου ψηφίου → 5 τρόποι

όλοι οι περιττοί διαθέσιμοι.

Άρα, ∃ (9·10·10·5) περιττοί 4-ψήφιοι.

πχ2 # 4-ψήφιων περιττών αριθμών με διαφορετικά ψηφία.

όλοι οι περιττοί διαθέσιμοι.

1ο βήμα → Επιλογή 4ου ψηφίου → 5 τρόποι

2ο βήμα → Επιλογή 3ου ψηφίου → 9 τρόποι

3ο βήμα → Επιλογή 2ου ψηφίου → 8 τρόποι

4ο βήμα → Επιλογή 1ου ψηφίου → 7 ή 6 τρόποι

ανάλογα με το αν το 0 έχει επιλεχθεί ή όχι

→ Δεν λειτουργεί η πολ/στική αρχή.

→ Εναλλακτικά:

περιττοί

1ο βήμα → Επιλογή 4ου ψηφίου → 5 τρόποι

2ο βήμα → Επιλογή 1ου ψηφίου → 8 τρόποι (όχι το 0 όχι το και 1ο)

3ο βήμα → Επιλογή 2ου ψηφίου → 8 τρόποι

4ο βήμα → Επιλογή 3ου ψηφίου → 7 τρόποι.

Άρα, ∃ (5·8·8·7) περιττοί 4-ψήφιοι χωρίς επανάληψη.

Προσθετική Αρχή

$A\cap B=\emptyset \Rightarrow N(A\cup B)=N(A)+N(B)$

πληθάριθμος

Παρ2 (Συνέχεια)

4-ψήφιοι περιττοί με διαφορ. ψηφία = # ... που το 0 ΔΕΝ εμφανίζεται + # ... που το 0 εμφανίζεται στην 2η θέση + # ... που το 0 εμφανίζεται στην 3η θέση

(1) (2) (3)

Για το (1): 4η 3η 2η 1η — 6 7 8 5 — $(6\cdot 7\cdot 8\cdot 5)$

Για το (2): 7 1 8 5 — $(7\cdot 1\cdot 8\cdot 5)$

Για το (3): 7 8 1 5 — $(7\cdot 8\cdot 1\cdot 5)$

4-ψήφιων με διαφ. ψηφία $= (6\cdot 7\cdot 8\cdot 5)+(7\cdot 1\cdot 8\cdot 5)+(7\cdot 8\cdot 1\cdot 5) =$

$= (7\cdot 8\cdot 5)(6+1+1) = 7\cdot 8\cdot 5\cdot 8$

Παρ3 Δυνητική λέξη της Ελληνικής γλώσσας.

(δηλ. πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων) π.χ. ΒΡΑΠΚ

δυνητικών λέξεων της Ελληνικής με ν το πολύ γράμματα

"το πολύ" "τουλάχιστον". δείχνουν προσθετική αρχή.

$$\sum_{k=1}^{\nu} \#\text{δυνητικών λέξεων με ακριβώς } k \text{ γράμματα} = \sum_{k=1}^{\nu} 24^k =$$

$$= 24+24^2+24^3+\dots+24^{\nu-1}+24^{\nu} = 24\,\frac{24^{\nu}-1}{24-1}$$

Σημείωση: $x = 1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{\nu-1} \Rightarrow$

$$\lambda x = \cancel{\lambda}+\cancel{\lambda^2}+\cancel{\lambda^3}+\ldots+\lambda^{\nu}$$

$$-x = -1-\cancel{\lambda}-\cancel{\lambda^2}-\cancel{\lambda^3}-\ldots-\lambda^{\nu-1}$$

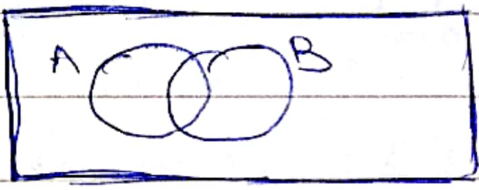
$$(\lambda-1)x = \lambda^{\nu}-1 \Rightarrow x = \frac{\lambda^{\nu}-1}{\lambda-1}$$

Εδώ έχουμε

$$24+24^2+\ldots+24^{\nu} = 24(1+24+24^2+\ldots+24^{\nu-1}) =$$

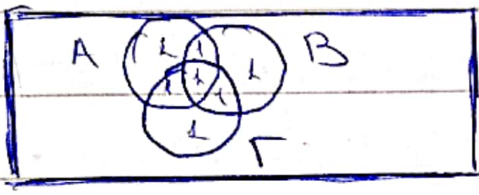
$$= 24\,\frac{24^{\nu}-1}{24-1}.$$

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού.



το βγάζω γιατί το έχω βάλει 2 φορές

$$N(A\cup B) = N(A)+N(B)-N(A\cap B)$$



$$N(A\cup B\cup \Gamma) = N(A)+N(B)+N(\Gamma)$$
$$-N(A\cap B)-N(A\cap \Gamma)$$
$$-N(B\cap \Gamma)+N(A\cap B\cap \Gamma)$$

Παραπέμπει σε ένωση ή τομή.
Αν τα σύνολα είναι ξένα,
τότε για προσθετική. Αν $A\cap B\neq\varnothing \Rightarrow$ πάμε για αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού.

Πχ: # 4-ψηφίων με διαφορετικά ψηφία που $\boxed{\text{είτε}}$ το 1ο είτε το 4ο είτε και τα 2 είναι περιττά.

↳ 4-ψήφια με διαφορ. ψηφία που είτε το 4ο είτε το 4ο είναι περιττοί (είτε και τα 2) $= N(A\cup B)$

αυτοί που είναι το 1ο

Αυτοί που είναι το 4ο.

Θα μπορούσα και $A\cup B\cup \Gamma$ και τα 2

Από Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

$N(A)$: $\underset{1^{o}}{5}\ \underset{2^{o}}{9}\ \underset{3^{o}}{8}\ \underset{4^{o}}{7}$ Στάδιο $\longrightarrow N(A) = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

$N(B)$: $\underset{2^{o}}{8}\ \underset{3^{o}}{8}\ \underset{4^{o}}{7}\ \underset{1^{o}}{5}$ Στάδιο $\longrightarrow N(B) = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$.

(όπως προηγούμενο παράδειγμα)

$N(A \cap B)$: $\underset{1^{o}}{5}\ \underset{3^{o}}{8}\ \underset{4^{o}}{7}\ \underset{2^{o}}{4}$ Στάδιο $\longrightarrow N(A \cap B) = 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7$.

Άρα,

$N(A \cup B) = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = (5 \cdot 8 \cdot 7)(9+8-4) \Rightarrow$

$$\boxed{N(A \cup B) = 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 13}$$

Αρχή Περιστεροφωλιάς (Dirichlet)

Αν έχω να μοιράσω $nk+1$ αντικείμενα σε n κελιά υπάρχει τουλάχιστον ένα κελί με τουλάχιστον $(k+1)$ αντικείμενα.

Πχ. # τρόπων να μπουν στη σειρά 10 αγόρια και 3 κορίτσια.

(i) χωρίς περιορισμό

(ii) όλα τα αγόρια στο τέλος

(iii) όλα τα αγόρια συνεχόμενα.

(iv) ένα αγόρι στην αρχή και ένα κορίτσι στο τέλος

(i) $\underset{1^{o}}{13}\ \underset{2^{o}}{12}\ \underset{3^{o}}{11}\ \dots\ \underset{13^{o}}{1} \rightarrow 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1 = 13!$

(ii) $\underbrace{\underset{1^{o}}{3}\ \underset{2^{o}}{2}\ \underset{3^{o}}{1}}_{\text{επιλέγω κορίτσια}}\ \underbrace{\underset{4^{o}}{10}\ 9\ \dots\ 1}_{\text{επιλέγω αγόρια}} \rightarrow 3! \cdot 10!$

(iii) __1ο βήμα:__ Βάζω τα κορίτσια στη σειρά → 3! τρόποι

__2ο βήμα:__ Βάζω τα αγόρια στη σειρά → 10! τρόποι.

__3ο βήμα:__ Επιλογή θέσης για το "μπλοκ" των αγοριών πριν, ανάμεσα (2) ή μετά τα κορίτσια ⇒ 4 τρόποι

Άρα, από πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $(3! \cdot 10! \cdot 4)$ τοποθετήσεις.

(iv) $\underset{2^{o}}{10}\ \underbrace{\dots\ 11!\ \dots}_{3^{o}}\ \underset{1^{o}}{3}$

Από πολλαπλασιαστική αρχή

$(3 \cdot 10 \cdot 11!)$ τοποθετήσεις.