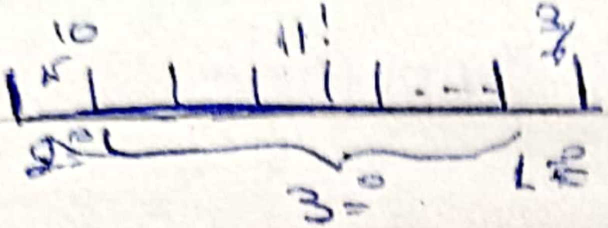
(iv) 

Από πολλαπλασιαστική αρχή

(3·10·11!) τοποθετήσεις.

$\boxed{10/10/2023}$

Διατάξεις - Συνδυασμοί - Μεταθέσεις

① Ορισμοί:

$\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$

▶ Μια διάταξη ν ανά κ του $\underline{\Omega}$ είναι μια διατεταγμέ νη κ-άδα στοιχείων του Ω $(a_1, a_2, \dots, a_\kappa)$, $a_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$. Παίρνω κ από ν στοιχεία και τα βάζω σε σειρά.

Διάταξη

Απλή (χωρίς επανάληψη) — Επαναληπτική

$a_i \neq a_j$, για $i \neq j$

Διάταξη ≡ Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά

- Μια μετάθεση στοιχείων του Ω είναι μια (απλή) διάταξη ν ανά ν. Βάζω τα ν στοιχεία σε σειρά.

- Συνδυασμός ν ανά κ του Ω είναι μια μη διατεταγμένη συλλογή κ στοιχείων του Ω: $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\kappa\}$. Επιλέγω κ από ν στοιχεία

Συνδυασμός

Απλός — Επαναληπτικός

Συνδυασμός ≡ Επιλογή Στοιχείων

π.χ. να έχω τετάρτη (στα χαρτιά).

δεν έχει νόημα/σημασία αν τα κρατάω J-Q-K-1 ή J-K-1-Q ή με άλλον τρόπο. Είναι το ίδιο πράγμα όλα.

② Παράδειγμα:

Διατάξεις του $\Omega = \{1,2,3,4\}$

4 ανά 2: (παίρνω 2 από 4 στοιχεία και τα βάζω σε σειρά)

απλές →

12	31
13	32
14	34
21	41
23	42
24	43

$\parallel$

12

επαναληπτικές → απλές

↳ όχι απαραίτητα μόνο επαναλαμβανόμενα, αλλά σε αυτή την κατηγορία επιτρέπονται και τα επαναλαμβανόμενα. Είναι ουσιαστικά η χωρίς περιορισμούς διάταξη.

+

11, 22, 33, 44

$\parallel$

16

Μια διάταξη (χωρίς επανάληψη) 4 ανά 2 γίνεται σε 2 στάδια:

1ο: Επιλογή 1ου στοιχείου → 4 τρόποι

2ο: Επιλογή 2ου στοιχείου → 3 τρόποι

Από πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\#\underset{4 \text{ ανά } 2}{\text{διατάξεων}} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ομοίως,

$$\#\underset{4 \text{ ανά } 2}{\text{επαναλ. διατάξεων}} = 4 \cdot 4 = 16.$$

③ Πλήθος διατάξεων (απλών + επαναληπτικών)

$$\#_{\substack{\text{διατάξεων} \\ \nu \text{ ανά } k}} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot\ldots\cdot(\nu-(k-1)) =$$
$$= \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot\ldots\cdot(\nu-k+1) =$$
$$= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(\nu-k)(\nu-k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$$
$$\overset{(\text{συμβ})}{=} (\nu)_k = P(\nu,k) \rightarrow \text{permutation.}$$

Απόδειξη:

Μια διάταξη (χωρίς επανάληψη) ν ανά κ γίνεται σε κ στάδια.

1^o: Επιλογή $1^{ου}$ στοιχείου → ν τρόποι

2^o: Επιλογή $2^{ου}$ στοιχείου → (ν−1) τρόποι

3^o: Επιλογή $3^{ου}$ στοιχείου → (ν−2) τρόποι

⋮

k^o: Επιλογή $k^{ου}$ στοιχείου → $\underbrace{\nu-(k-1)}_{\nu-k+1}$ τρόποι.

Άρα, από πολ/κή αρχή:

$$\#\text{ διατ. } \nu \text{ ανά } k = \nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-k+1).$$

$$\#_{\substack{\text{διατάξεων} \\ \nu \text{ ανά } k \\ \text{με επανάληψη}}} = \nu^k$$

Απόδειξη: Ίδια με τις απλές διατάξεις αλλά με ν τρόπους σε κάθε στάδιο.

$$\#\text{ μεταθέσεων } \nu \text{ στοιχείων} = \nu! = P(\nu) = \frac{\nu!}{(\nu-\nu)!} = \frac{\nu!}{\boxed{0!}}$$

→ εξ ορισμού: **$0! = 1$**

④ **Παράδειγμα:**

Συνδυασμοί 5 ανά 3 του $\{1,2,3,4,5\}$.

το $\{1,3,2\}$ πχ είναι ο ίδιος

Απλοί:

$\{1,2,3\}$	$\{1,4,5\}$
$\{1,2,4\}$	$\{2,3,4\}$
$\{1,2,5\}$	$\{2,3,5\}$
$\{1,3,4\}$	$\{2,4,5\}$
$\{1,3,5\}$	$\{3,4,5\}$

$= 10$

Επαναληπτικοί: Απλοί + $\{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,1,4\}, \{1,1,5\},$
$\{2,2,1\}, \{2,2,3\}, \{2,2,4\}, \{2,2,5\}$

$\vdots$

$\{5,5,1\}, \{5,5,2\}, \{5,5,3\}, \{5,5,4\},$
$\{1,1,1\}, \{2,2,2\}, \{3,3,3\}, \{4,4,4\}, \{5,5,5\}$

$= 35$

Ιδέα: Να συνδέσω (# συνδ. 5 ανά 3) με το (# διατάξ. 5 ανά 3).

* Από κάθε συνδυασμό 5 ανά 3 προκύπτουν πολλές διατάξεις.

$\{1,2,3\} \to 123, 132, 213, 231, 312, 321 \to 3! = 6$

$\{1,2,4\} \rightarrow$ 124, 142, 214, 241, 412, 421 $\rightarrow 3! = 6$

$\vdots$

$\{3,4,5\} \rightarrow$

Διατάξεις 5 ανά 3

Συνδυασμοί 5 ανά 3

Από 1 συνδυασμό 5 ανά 3 έχω 3! διατάξεις 5 ανά 3.

Άρα,

$$\left(\#\,\text{συνδ. } 5 \text{ ανά } 3\right) \cdot 3! = \#\,\text{διατάξεων } 5 \text{ ανά } 3 = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Άρα,

$$\#\,\text{συνδ. } 5 \text{ ανά } 3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \binom{5}{3}$$

Δουλεύει η ίδια για να βρω # επαν. συνδ. 5 ανά 3;

$\{1,2,3\} \rightarrow$ 6 διατάξεις

$\{1,1,2\} \rightarrow$ 3 διατάξεις (112, 121, 211)

$\{1,1,1\} \rightarrow$ 1 διάταξη (111).

5) Πλήθος συνδυασμών (απλών + επαναλ.)

$$\#\,\text{συνδυασμών } \nu \text{ ανά } \kappa = \#\,\text{υποσυνόλων με } \kappa \text{ στοιχεία ενός συνόλου } \nu \text{ στοιχείων} =$$

$$= \frac{\#\,\text{διαταξ. } \nu \text{ ανά } \kappa}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} \overset{\text{ορισ}}{=} \binom{\nu}{\kappa} = C(\nu,\kappa)$$

combination

2) Απόδειξη:

Από 1 συνδυασμό ν ανά κ, έχω κ! διατάξεις ν ανά κ.

Άρα,

$$\left(\begin{matrix}\#\text{συνδ.}\\ \text{ν ανά κ}\end{matrix}\right)\cdot k! = \begin{matrix}\#\text{διατάξεων}\\ \text{ν ανά κ}\end{matrix}$$

Στο παράδειγμα,

$$\begin{matrix}\#\text{συνδυασμών}\\ 5 \text{ ανά } 3\end{matrix} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot2\cdot1} = 10$$

μη διαδεδομένος συμβολισμός

$$\begin{matrix}\#\text{επαναλ.}\\ \text{συνδυασμ.}\\ \text{ν ανά κ}\end{matrix} = \binom{\nu+k-1}{k} = \frac{(\nu+k-1)!}{k!\,(\nu-1)!} = \left[\begin{matrix}\nu\\ k\end{matrix}\right]$$

Η απόδειξη στο επόμενο μάθημα.

Στο παράδειγμα,

$$\begin{matrix}\#\text{επαν. συνδ.}\\ 5 \text{ ανά } 3\end{matrix} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot3\cdot2\cdot1} = 35$$

(6) Σύνοψη

	Απλοί	Επαναληπτικοί
Διατεταγμένα	$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$	ν^k
Συνδυασμός	$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{(\nu-k)!\,k!}$	$\binom{\nu+k-1}{k}$

⑦ Άσκηση:

- Έχουμε σωματείο 100 ατόμων.

? = # διοικ. συμβουλίων με 1 πρόεδρο, 1 αντιπρόεδρου, 1 γραμματέα και 6 απλά μέλη

↳ Ένα διοικητικό συμβούλιο γίνεται σε στάδια,

Εδώ το θέλουμε διατεταγμένο
1ο: Επιλογή Προέδρου → 100 επιλογές
2ο: Επιλογή Αντιπροέδρου → 99 επιλογές
3ο: Επιλογή Γραμματέα → 98 επιλογές

εδώ δεν έχουμε θέμα διάταξης
4ο: Επιλογή υπόλοιπων μελών → $\binom{97}{6}$

Από πολλαπλασιαστική αρχή,

$$\#\Delta\Sigma = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \frac{97!}{6!\,91!} = \frac{100!}{6!\,91!} \Rightarrow$$

$$\#\Delta\Sigma = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 92}{6!}$$

Εναλλακτικά:

1ο: Επιλέγω τα 9 άτομα του ΔΣ → $\binom{100}{9}$ τρόποι

2ο: Επιλέγω τον πρόεδρο → 9 τρόποι

3ο: Επιλέγω αντιπρόεδρο → 8 τρόποι

4ο: Επιλέγω γραμματέα → 7 τρόποι.

Από πολλαπλασιαστική αρχή,

$$\#\Delta\Sigma = \binom{100}{9} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{100!}{9!\cdot 91!} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =$$

$$= \frac{100!}{6!\,91!}$$

Εναλλακτικά:

1ο βήμα: Επιλέγω μέλη ΔΣ → $\binom{100}{9}$.

2ο βήμα: Επιλέγω απλά μέλη → $\binom{9}{6}$.

3ο βήμα: Επιλέγω Π-Α-Γ → 3!

Από πολλαπλασιαστική Αρχή,

$$\#\Delta\Sigma = \binom{100}{9}\binom{9}{6}3! = \frac{100!}{9!\,91!}\cdot\frac{9!}{6!(9-6)!}\cdot 3!$$