17/10/2023

Διατάξεις - Συνδυασμοί
Ιδιότητες - Ασκήσεις

① Υπενθυμίσεις

\# $\boxed{\text{Διατ.}}$ ν ανά κ $= (\nu)_\kappa = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$

\# $\boxed{\text{Διατ.}}$ ν ανά κ με επανάληψη $= \nu^\kappa$

\# $\boxed{\text{Συνδ.}}$ ν ανά κ $= \dbinom{\nu}{\kappa} = \dfrac{(\nu)_\kappa}{\kappa!} = \dfrac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

\# $\boxed{\text{Συνδ.}}$ ν ανά κ με επανάληψη $= \left[\begin{matrix}\nu\\ \kappa\end{matrix}\right] = \dbinom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$

② Βασική Αναδρομική σχέση για $\binom{\nu}{\kappa}$ (συνδυασμούς)

Τρίγωνο Pascal

πόσα υποσύνολα με 0 στοιχεία δημιουργούνται από ν στοιχείο; Μόνο το κενό

$$\binom{\nu}{\boxed{0}} = \binom{\nu}{\boxed{\nu}} = 1$$

Αντίστοιχα, μόνο το ($\boxed{A} \subseteq A$) ίδιο το σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του με ν-στοιχεία.

$$\binom{\nu+1}{\kappa} = \binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa-1}$$

πρέπει $0<\kappa<\nu+1$ για να ισχύει.

$$\binom{\nu}{\kappa} = 0, \text{ για } \kappa>\nu$$

→ * Η 1η στήλη είναι 1 όλη γιατί είναι $\binom{\nu}{0}=1$ ΠΑΝΤΑ!

→ * Η διαγώνιος είναι 1 όλη γιατί είναι $\binom{\nu}{\nu}=1$ ΠΑΝΤΑ!

→ δευτερεύουσες διαγώνιοι

	ν\κ	0	1	2	3	4	5	6
$(2^0=1)$	0	1	0	0	0	0	0	0
$(2^1=2)$	1	1	1	0	0	0	0	0
$(2^2=4)$	2	1	2	1	0	0	0	0
$(2^3=8)$	3	1	3	3	1	0	0	0
$(2^4=16)$	4	1	4	6	4	1	0	0
	5	1	5	10	10	5	1	0
	6	1	6	15	20	15	6	1

→ Είναι όλα 0 γιατί $\binom{\nu}{\kappa}=0$ για $\kappa>\nu$

→ Διαγώνια Αναδρομική Σχέση

→ $\binom{\nu+1}{\kappa}$

→ για να βρω π.χ. το $\binom{6}{5}$ πάω στην προηγούμενη γραμμή (5η) και πάω στην ίδια στήλη (5η) και στην προηγούμενη (4η) ⊕ αθροίζω

Τρίγωνο Pascal

$$\binom{\nu}{0}=\binom{\nu}{\nu}=1 \quad , \quad \binom{\nu}{\kappa}=0, \text{ για } \kappa>\nu.$$

!

$$\binom{\nu+1}{\kappa}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa-1}.$$

!

Δεν έχει υποσύνολο με πάνω από ν στοιχεία.

Άρα, $\binom{\nu}{\kappa}=0$, $\kappa>\nu$

<u>Απόδειξη:</u> Ένα σύνολο A με ν στοιχεία έχει μοναδικό υποσύνολο με 0 στοιχεία το κενό. Άρα $\binom{\nu}{0}=1$. Επίσης, έχει μοναδικό υποσύνολο με ν στοιχεία το ίδιο το A. Άρα, $\binom{\nu}{\nu}=1$. Δεν έχει υποσύνολα με πάνω από ν στοιχεία. Άρα, $\binom{\nu}{\kappa}=0$, για $\kappa>\nu$.

Απόδειξη:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ · σύνολο με $(\nu+1)$ στοιχεία.

A = Σύνολο Υποσυνόλων του Ω με κ στοιχεία

||

$A = B \cup \Gamma$

B: Σύνολο υποσυνόλων του Ω που δεν περιέχουν το $\omega_{\nu+1}$ με κ στοιχεία

Γ: Σύνολο υποσυνόλων του Ω που περιέχουν το $\omega_{\nu+1}$ με κ στοιχεία

$N(A) = N(B) + N(\Gamma)$ αφού $B \cap \Gamma = \emptyset$.

πλήθος στοιχείων

$N(A) = \binom{\nu+1}{\kappa}$ → πόσα υποσύνολα (συνδυασμοί) με κ στοιχεία έχει σύνολο με $(\nu+1)$ στοιχεία

$N(B) = \binom{\nu}{\kappa}$ → πόσα υποσύνολα με κ στοιχεία έχει σύνολο με ν στοιχεία

Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ υποσυνόλων του $\{\omega_1, \dots, \omega_\nu\}$ με $\kappa-1$ στοιχεία και υποσυνόλων του $\{\omega_1, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ με κ στοιχεία που περιέχουν το $\omega_{\nu+1}$.

Άρα, $N(\Gamma) = \binom{\nu}{\kappa-1}$ → διαλέγω $(\kappa-1)$ στοιχεία από τα ν του συνόλου και μετά θα προσθέσω το $\omega_{\nu+1}$ για να πάρω υποσύνολο του Ω με κ στοιχεία που περιέχει το $\omega_{\nu+1}$.

πχ. $\binom{100}{45} = \binom{99}{45} + \binom{99}{44}$

Β' τρόπος (αλγεβρικός)

$$\binom{\nu+1}{\kappa} = \binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\nu+1)!}{\kappa!\,(\nu+1-\kappa)!} = \frac{\cancel{\nu!}\,1}{\kappa!\,\cancel{(\nu-\kappa)!}} + \frac{\cancel{\nu!}\,1}{\cancel{(\kappa-1)!}\,(\nu-\kappa+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu+1}{\kappa(\nu+1-\kappa)} = \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\nu-\kappa+1}$$ που ισχύει.

αλγοριθμικά, τρέχει πιο γρήγορα το πρόγραμμα

③ Ιδιότητες Τριγώνων Pascal.

1) Δίνει τους συντελεστές του $(a+b)^\nu$.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Δες τις αντίστοιχες σειρές από τον πίνακα στην πίσω σελίδα

$$(a+b)^\nu = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

→ (πόρισμα του 1) για $\alpha=10$, $\beta=1$).

2) Δίνει ταυτότητα του 11^ν

μετά τις αντίστοιχες σειρές στον πίνακα Pascal

$11^0=1$

$11^1=11$

$11^2=121$

$11^3=1331$

$11^4=14641$

$11^5=161051$ (με μεταφορά κρατουμένων)

↳ ισχύει το ίδιο με κρατούμενα

$$11^\nu=(10+1)^\nu=\underbrace{\sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}10^\kappa\cdot 1^{\nu-\kappa}}_{\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}10+\binom{\nu}{2}10^2+\dots+\binom{\nu}{\nu}10^\nu}$$

π.χ.

$$11^5=(10+1)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}10+\binom{5}{2}100+\binom{5}{3}1000+\binom{5}{4}10.000+\binom{5}{5}100.000=161051$$

3) Το άθροισμα της γραμμής ν είναι 2^ν

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\dots+\binom{\nu}{\nu}=\boxed{2^\nu}$$

↳ (πόρισμα του 1) για $\alpha=\beta=1$).

4) Κατακόρυφη αναγωγική σχέση.

αθροίζω τα στοιχεία της στήλης κ μέχρι το στοιχείο ν

$$\sum_{j=0}^{\nu}\binom{j}{\kappa}=\binom{0}{\kappa}+\binom{1}{\kappa}+\binom{2}{\kappa}+\dots+\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\nu}\binom{j}{\kappa}=\binom{\nu+1}{\kappa+1}}$$

εκεί που σταματάω στη στήλη πάω μια στήλη δεξιά και μια σειρά κάτω.

Απόδειξη

$$\binom{\nu+1}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa+1}=$$

$$= \binom{\nu}{k} + \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-2}{k} + \binom{\nu-2}{k+1} =$$

$$= \dots \binom{\nu}{k} + \binom{\nu-1}{k} + \dots + \binom{0}{k}.$$

$$\sum_{j=0} \binom{j}{k} = \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \dots + \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu}{k} = \binom{\nu+1}{k+1}$$

5] Διαγώνια αναγωγική σχέση:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{\nu+j}{j} = \binom{\nu}{0} + \binom{\nu+1}{1} + \binom{\nu+2}{2} + \dots + \binom{\nu+k}{k}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{\nu+j}{j} = \binom{\nu+k+1}{k}.$$ → πάω στην ίδια γραμμή και σε επόμενη στήλη.

→ Απόδειξη:

Ομοίως, με την κατακόρυφη αναγωγική σχέση:

6] Η άθροιση στις δευτερεύουσες διαγωνίους είναι οι αριθμοί Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (Απόδειξη: Επαγωγική

→ Το άθροισμα των στοιχείων της 6ης (π.χ.) δευτερεύουσας διαγωνίου είναι το 6ο στοιχείο της ακολουθίας Fibonacci.

(4) Αναδρομική σχέση για διαδιατάξεις

$(\nu)_0 = 1$ (βάζω το "τίποτα" σε σειρά).

$(\nu)_\nu = \nu!$

$(\nu)_k = 0$, για $k > \nu$

$(\nu+1)_k = (\nu)_k + k \cdot (\nu)_{k-1}$

Ίδια ιδέα με πριν (με τους συνδυασμούς)

Διότι το $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ με k στοιχεία

Όλους αυτούς τους τύπους **ΔΕΝ** τους μαθαίνω.
Μόνο το τρίγωνο του Pascal και ο πίνακας
Είναι σημαντικά να θυμάμαι // μπορώ να φτιάξω.

Μια διάταξη του $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ με k-στοιχεία

πχ: η $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$

δίνει k διατάξεις του $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+1}\}$ με k στοιχεία που εμφανίζεται υποχρεωτικά το $\omega_{\nu+1}$:

$$\begin{gathered}(\omega_{\nu+1}, a_1, \dots, a_{k-1}) \\ (a_1, \omega_{\nu+1}, a_2, \dots, a_{k-1}) \\ \vdots \\ (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \omega_{\nu+1})\end{gathered}$$

Παίρνω διάταξη με $k-1$ στοιχεία. Τα κενά της είναι $k-2$. Η' εκεί ή στην αρχή ή στο τέλος θα μπει το $\omega_{\nu+1}$. Άρα, έχει k θέσεις να μπει $\Rightarrow$ Δημιουργούνται k διατάξεις