2: φ. 2!

26/10/2023

Συνδυαστικοί: Επιπλέον Ιδιότητες

Ασκήσεις: Διατάξεις - Διαμερίσεις

1. Άσκηση (Άνετο θέμα εξετάσεων)

\# μεταθέσεων των $1, 2, \ldots, 10$ με:

i) το 3 πριν το 5 $\longrightarrow \frac{10!}{2}$

ii) το 3 πριν το 5 και το 5 πριν το 7 $\longrightarrow \frac{10!}{6}$

iii) τα 3,5 πριν το 7. $\longrightarrow \frac{10!}{3}$

(iv) στις πρώτες 5 θέσεις οι περιττοί. $\to 5!\,5!$

Λύση:

(ii) Κάθε τέτοια μετάθεση γίνεται σε 2 βήματα.

1ο) Επιλογή θέσεων για τα 3, 5, 7 $\to \binom{10}{3}$ τρόπους.

2ο) Τοποθέτηση των υπολοίπων σε σειρά $\to 7!$

Άρα, από πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε:

$$\binom{10}{3}\cdot 7! = \frac{10!}{3!\,\cancel{7!}}\cancel{7!} = \frac{10!}{6}$$

(iii) Εδώ έχουμε 3 στάδια.

1ο) Επιλογή θέσεων για 3, 5, 7 $\to \binom{10}{3}$ τρόποι

2ο) Απόφαση για τη θέση των 3, 5 $\to$ 2 τρόποι.

3ο) Τοποθέτηση των υπολοίπων σε σειρά $\to 7!$

Άρα, από πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε:

$$\binom{10}{3}\, 2\, 7! = \frac{10!}{3}$$

② Ιδιότητες Συνδυασμών (πέραν του τριγώνου του Pascal).

1) Συμμετρική Ιδιότητα: $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$

Αιτιολόγηση: Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ και $A \subseteq \Omega$ με $N(A) = \kappa$, τότε $N(A^c) = \nu - \kappa$ στοιχεία. Η αντιστοιχία $A \longleftrightarrow A^c$ είναι 1-1. Άρα, $\#\,\substack{\text{υποσ.}\\ \text{με } \kappa\text{-στοιχεία}} = \#\,\substack{\text{υποσ.}\\ \text{με } \nu-\kappa \text{ στοιχεία}}$

$$\binom{\nu}{\kappa} \qquad \binom{\nu}{\nu-\kappa}$$

υποσύνολα με ν στοιχεία. κόκκινο (κ στοιχεία) και πράσινο (ν-κ στοιχεία)

2) Τύπος Cauchy

$$\binom{z+s}{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\boxed{z}}{\kappa} \binom{\boxed{s}}{\nu-\kappa}$$

<u>πχ:</u>

$$\binom{9}{3} = \binom{4+5}{3} =$$

$$= \binom{4}{0}\binom{5}{3} + \binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{5}{0}$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_z, \omega_{z+1}, \ldots \omega_{z+s}\}$.

Έχω:

διατρέχω όλες τις δυνατές τιμές του κ.

$\binom{z+s}{\nu}$ # υποσ. Ω με ν στοιχεία $= \sum_{\kappa=0}^{\nu}$ # υποσ. Ω με ν στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς κ από το $\{\omega_1, \ldots, \omega_z\}$

προσθετική Αρχή

$\to \binom{z}{\kappa}\binom{s}{\nu-\kappa}$

Ένα υποσύνολο του Ω με ν στοιχεία εκ των οποίων ακριβώς κ είναι από τα $\omega_1, \ldots, \omega_z$ γίνεται σε 2 στάδια.

1ο) Επιλογή στοιχείων από τα $\omega_1, \ldots, \omega_z \to \binom{z}{\kappa}$ τρόποι

2ο) Επιλογή στοιχείων από τα $\omega_{z+1}, \ldots, \omega_{z+s} \to \binom{s}{\nu-\kappa}$ τρόποι

Από πολλαπλασιαστική αρχή,

τέλος - αρχή

$\exists \binom{z}{\kappa}\binom{s}{\nu-\kappa}$ τέτοια σύνολα.

3] Τύπος Cauchy για επαναληπτικούς συνδυασμούς.

$$\begin{bmatrix} z+s \\ \nu \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\nu} \begin{bmatrix} z \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \nu-k \end{bmatrix}$$

ή $$\binom{z+s+\nu-1}{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{z+k-1}{k} \binom{s+\nu-k-1}{\nu-k}$$

Σχόλια για τη Συμμετρική Ιδιότητα:

πχ: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ $\nu=5$

Τα 2-σύνολα (k) είναι όσα και τα 3-σύνολα ($\nu-k$).

διότι

$$\binom{\nu}{k} \left\{ \begin{array}{ccc} \{\omega_1,\omega_2\} & \xleftrightarrow{A \leftrightarrow A^c} & \{\omega_3,\omega_4,\omega_5\} \\ \{\omega_1,\omega_3\} & \longleftrightarrow & \{\omega_2,\omega_4,\omega_5\} \\ \{\omega_1,\omega\ \} & \longleftrightarrow & \{\omega_2,\omega_3,\omega_5\} \\ \vdots & & \vdots \\ \{\omega_4,\omega_5\} & \longleftrightarrow & \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} \end{array} \right\} \binom{\nu}{\nu-k}$$

③ Διαιρέσεις - Διαμερίσεις

Ορισμός: Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$. Μια διαίρεση του Ω είναι μια διατεταγμένη συλλογή υποσυνόλων του Ω με $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ με: (i) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \Omega$

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$

η παρένθεση συμβολίζει διάταξη.

Επιτρέπονται και κενά στις διαιρέσεις.

πχ. Μια διαίρεση του $\Omega=\{1,2,3,\dots,10\}$ είναι η $(\{1,5,7\},\{2,3\},\phi,\phi,\{4\},\{6,8,9,10\})$

Αν έγραφα πρώτο στοιχείο το $\{1,7,5\}$ αντί για $\{1,5,7\}$ μένει ίδια η διαίρεση.

Αν έγραφα όμως:

$(\{2,3\},\{1,5,7\},\phi,\phi,\{4\},\{6,8,9,10\})$

είναι διαφορετική διαίρεση από αυτή πάνω.

Μια διαμέριση του Ω είναι μια μη-διατεταγμένη οικογένεια υποσυνόλων του Ω: $\{A_1,A_2,\dots,A_r\}$ με:

(i) $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_r=\Omega$

(ii) $A_i\cap A_j=\phi$, για $i\neq j$

(iii) $A_i\neq\phi$, για $i=1,2,\dots,r$

πχ. μια διαμέριση του $\Omega=\{1,2,\dots,10\}$ είναι η

$\{\{1,2,3,4,6\},\{5,7\},\{8,9,10\}\}$

συμβολίζει μη-διάταξη

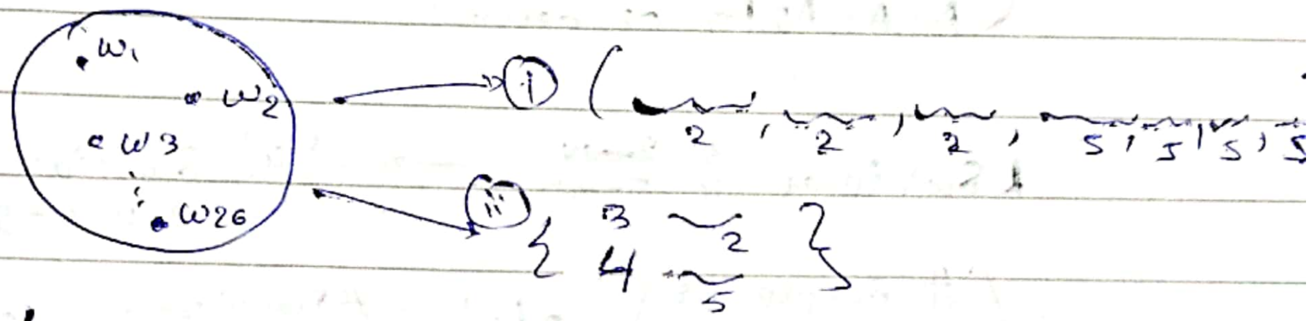
Δεν μας νοιάζει η σειρά γραφής.

④ Άσκηση

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{26}\}$ σύνολο 26 ατόμων.

(i) # διαιρέσεων του Ω σε 7 σύνολα με πληθαρίθμους
2, 2, 2, 5, 5, 5, 5. $(A_1, A_2, \dots, A_7)$

(ii) το πλήθος των διαμερίσεων του Ω, $\{A_1, A_2, \dots, A_7\}$ σε 7 σύνολα, 3 2-σύνολα και 4 5-σύνολα.



Λύση:

(i) Μια διαίρεση τύπου 2-2-2-5-5-5-5 γίνεται σε στάδια

1ο) Επιλογή στοιχείων $A_1 \to \binom{26}{2}$ τρόποι

2ο) $A_2 \to \binom{24}{2}$ τρόποι

3ο) $A_3 \to \binom{22}{2}$ τρόποι

4ο) $A_4 \to \binom{20}{5}$ τρόποι

5ο) $A_5 \to \binom{15}{5}$ τρόποι

6ο) $A_6 \to \binom{10}{5}$ τρόποι

7ο) $A_7 \to \binom{5}{5}$ τρόποι

όσα έχει μείνει μπαίνει στο τελευταίο σύνολο

διαιρεσ. 2-2-2-5-5-5-5 $= \binom{26}{2}\binom{24}{2}\binom{22}{2}\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$

$$= \frac{26!}{2!\,\cancel{24!}} \cdot \frac{\cancel{24!}}{2!\,\cancel{22!}} \cdot \frac{\cancel{22!}}{2!\,\cancel{20!}} \cdot \frac{\cancel{20!}}{5!\,\cancel{15!}} \cdot \frac{\cancel{15!}}{5!\,\cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{5!\,5!} =$$

$$= \frac{26!}{2!\,2!\,2!\,5!\,5!\,5!\,5!}$$

(iii) Από 1 διαμέριση $\{\underbrace{A_1, A_2, A_3}_{2\text{-σύνολα}}, \underbrace{A_4, A_5, A_6, A_7}_{5\text{-σύνολα}}\}$.

προκύπτουν $3!4!$ διαιρέσεις τύπου 2-2-2-5-5-5-5

$(\underbrace{A_1, A_2, A_3}_{2\text{-σύνολα}}, \underbrace{A_4, A_5, A_6, A_7}_{5\text{-σύνολα}}\}$

(βάζω τα A_1, A_2, A_3 σε σειρά και μετά τα A_4, A_5, A_6, A_7 σε σειρά)

1 διαμέριση $\begin{matrix} 3 & 2\text{-συν} \\ 4 & 5\text{-συν} \end{matrix}$ $\longrightarrow$ $3!4!$ διαιρέσεις τύπου 2-2-2-5-5-5-5.

$$\left(\begin{matrix} \#\text{ διαμερ με} \\ 3 \quad 2\text{-συν} \\ 4 \quad 5\text{-συν} \end{matrix}\right) \cdot 3!4! = \begin{matrix}\#\text{ διαιρέσεων} \\ \text{τύπου} \\ 2\text{-}2\text{-}2\text{-}5\text{-}5\text{-}5\text{-}5\end{matrix} = \frac{26!}{(2!)^3(5!)^4}.$$

Άρα

$$\#\begin{matrix}\text{διαμερίσεων} \\ \text{με } 3 \ 2\text{-συν.} \\ \text{και } 4 \ 5\text{-συν}\end{matrix} = \frac{26!}{3!(2!)^3 4!(5!)^4}.$$

(5) Τύποι διαιρέσεων - διαμερίσεων

διαιρέσεων ν στοιχείων σε r υποσύνολα με $k_1, k_2, \ldots, k_r$ $=$ $\dfrac{\nu!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$

πρέπει $\nu = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$

ν στοιχείων σε z υποσύνολα εκ των οποίων z_1 1-σύνολα
z_2 2-σύνολα
⋮
z_ν ν-σύνολα

$$= \frac{\nu!}{z_1!\, z_2! \cdots z_\nu!\, (1!)^{z_1} (2!)^{z_2} \cdots (\nu!)^{z_\nu}}$$

Πρέπει: $\nu = 1z_1 + 2z_2 + \ldots + \nu z_\nu$

$z = z_1 + z_2 + \ldots z_\nu$

με 3 2-συν
4 5-συν

$$= \frac{26!}{3!\,(2!)^3\, 4!\,(5!)^4}.$$

⑥ Αντιστοιχία μεταθέσεων z ειδών στοιχείων και διαμερίσεων.

- Παράδειγμα

- Έστω

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ($\nu = 10$)

Διαμερίσεις τύπου 3-4-3 — Μεταθέσεις 3 ειδών στοιχ. $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 3$

$(\overset{A_1}{\{1,3,5\}}, \overset{A_2}{\{2,4,6,7\}}, \overset{A_3}{\{8,9,10\}}) \longleftrightarrow (1\,2\,1\,2\,1\,2\,2\,3\,3\,3)$

$(\{4,7,5\}, \{1,6,10,8\}, \{2,3,9\}) \longleftrightarrow (2\,3\,3\,1\,1\,2\,1\,2\,3\,2)$

$(\{1,2,5\}, \{3,4,6,10\}, \{7,8,9\}) \longleftrightarrow (1\,1\,2\,2\,1\,2\,3\,3\,3\,2)$

⑦ Άσκηση

100 διακεκριμένες επιστολές σε 1 ταχυδρομείο

μοιράσματος σε 3 κουτιά των 20
2 κουτιά των 10
4 κουτιά των 5

όμοια κουτιά $\longrightarrow \dfrac{100!}{3!\,2!\,4!\,(20!)^3 (10!)^2 (5!)^4}$

↓ Διακεκρ. κουτιά = Διαμερίσεις

$$\frac{100!}{(20!)^3 (10!)^2 (5!)^4}$$