[illegible] είναι το αντίστοιχο των συνδυασμών - διατάξεων. → με στοιχεία απλούς αριθμούς

31/10/2023

Ασκήσεις σε Προβλήματα Διατάξεων και Συνδυασμών

① **Θέμα 1 / Ιαν. 23**

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ $\quad A \cap B = \emptyset$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{20}\}$ $\quad A \cup B = \Omega$

(α) # υποσυν. του Ω με 9 στοιχεία, 5 από τα οποία ανήκουν στο A $=$;

(β) # υποσυν. του Ω με 5 στοιχεία από το A και οσαδήποτε από το B $=$;

(γ) # υποσύν. του Ω με άρτιο αριθμό στοιχείων από το A και 4 στοιχεία από το B $=$;

(δ) # υποσυν. του Ω που περιέχουν το πολύ 9 από το A και 4 ακριβώς από το B $=$;

εκτός ύλης
(ε) # υποσυν. του Ω με ακριβώς 9 στοιχεία που περιέχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και τουλάχιστον ένα στοιχείο από το B

→ Δεν θεωρείται και εύκολη. Επίσης, μιλάμε για υποσύνολα ⇒ δεν χρειαζόμαστε διατάξεις. Δεν έχει σημασία η σειρά.

Λσ (α) Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια:

1ο) Επιλογή 5 στοιχείων από το A → $\binom{10}{5}$ τρόποι.

2ο) Επιλογή 4 στοιχείων από το B → $\binom{20}{4}$ τρόποι

Από πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν

$\boxed{\binom{10}{5}\binom{20}{4} \text{ τέτοια υποσύνολα}}$.

Ένα σύνολο n στοιχείων έχει 2^n υποσύνολα.

(β) Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια:

1ο) Επιλογή 5 στοιχείων από το A → $\binom{10}{5}$ τρόποι

2ο) Επιλογή ενός υποσυνόλου του B → 2^{20} τρόποι.

Από πολλαπλασιαστική αρχή, ∃ $\boxed{\binom{10}{5} 2^{20} \text{ τέτοια υποσύνολα}}$

ΔΔΣ $\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}=2^{20}$

Λσ β' τρόπος

1ο) 5 στοιχεία από το A → $\binom{10}{5}$

2ο) Θα μπει ή όχι το b_1 στο υποσύνολο → 2 τρόποι

20 φορές

b_2 → 2

Άρα, 2^{20}

. . . . b_{20} → 2

21ο)

Από πολ/στική, $\boxed{2^{20}\binom{10}{5}}$.

(γ) Ζητούμενο πλήθος $\boxed{=}$ $\sum_{i=0}^{5}$ #υποσυν. του Ω με 2i στοιχεία από το A και 4 από το B

προσθετική αρχή

$$= \sum_{i=0}^{5}\binom{10}{2i}\binom{20}{4} = \binom{20}{4}\left[\binom{10}{0}+\binom{10}{2}+\binom{10}{4}+\binom{10}{6}+\binom{10}{8}+\binom{10}{10}\right]$$

βρίσκω ΣΔΣ για 0 στοιχεία από A, και για 2 και για 4 και για 6 και για 8.

στοιχείο $\binom{20}{4}2^{10}$ και βγάζω το ίδια το A

(δ) $\sum_{i=0}^{9}\binom{20}{4}\binom{10}{i} = \binom{20}{4}\underbrace{\sum_{i=0}^{9}\binom{10}{i}}_{\underbrace{\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}}_{2^{10}}-\underbrace{\binom{10}{10}}_{1}} = \boxed{\binom{20}{4}(2^{10}-1)}$

γιατί το $\sum_{i=0}^{10}$ είναι όλα τα υποσύνολα με 10 στοιχεία

(ε) Μια ιδέα θα ήταν να δημιουργήσει ένα τέτοιο υποσύνολο σε 3 στάδια:

1ο) Επιλογή 1 στοιχείου από το A → $\binom{10}{1}$ τρόποι

2ο) 1 B → $\binom{20}{1}$ τρόποι

3ο) 7 από τα υπόλοιπα → $\binom{28}{7}$ τρόποι.

Τότε, από πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε:

$\binom{10}{1}\binom{20}{1}\binom{28}{7}$ υποσύνολα. Αυτό είναι

ΛΑΘΟΣ γιατί ΔΙΠΛΟΜΕΤΡΩ υποσύνολα.

ΛΑΘΟΣ

[Διαφορετικές αποφάσεις στα στάδια μπορεί να οδηγούν στο ίδιο αντικείμενο = υποσύνολο]

↳ Αυτό δεν γίνεται όταν όντως μπορώ να χρησιμοποιήσω πολλαπλασιαστική

1ος τρόπος

Τα υποσύνολα του Ω με 9 στοιχεία = Τα υποσύνολα του Ω με 9 στοιχεία, επιλογή 1 από το A, επιλογή 1 από το B

! ∪ Τα υποσύνολα του Ω με 9 στοιχεία από το A ∪ Τα υποσύνολα του Ω με 9 στοιχεία από το B.

!

$a_1 | b_2 | a_2\, a_3\, b_1\, b_9$

μπορεί να οδηγούν στο ίδιο αντικείμενο

$a_2 | b_2 | a_1\, a_3\, b_1\, b_9$ ⇒ ΔΕΝ λειτουργεί η πολλαπλασιαστική αρχή

→ 9 στοιχεία όλα από το A.

→ 9 στοιχεία όλα από το B

! $\Rightarrow \binom{30}{9} = x + \boxed{\binom{10}{9}} + \boxed{\binom{20}{9}} \Rightarrow$

$$x = \binom{30}{9} - \binom{20}{9} - \binom{10}{9}$$

2ος τρόπος

Υποσύνολα του Ω με 9 στοιχεία με 1 τουλάχιστον από το A και 1 τουλάχιστον από το B $= \bigcup_{i=1}^{8}$ Υποσύνολα του Ω με 9 στοιχεία ακριβώς i από το A και 9 - i από το B.

$$\Rightarrow x = \boxed{\sum_{i=1}^{8} \binom{10}{i}\binom{20}{9-i}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=0}^{9} \binom{10}{i}\binom{20}{9-i} - \cancel{\binom{10}{0}}^{1}\binom{20}{9} - \binom{10}{9}\cancel{\binom{20}{0}}^{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \binom{30}{9} - \binom{20}{9} - \binom{10}{9}$$

Υπενθύμιση Cauchy

$$\boxed{\binom{r+s}{\nu} = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{r}{i}\binom{s}{\nu-i}}$$

② Θέμα 2 | Φεβρ. 2002

$\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu\}$. οι συνθήκες που έχει δίπλα το θέμα δεν επηρεάζουν είναι αλλά για να βγάζει επιστημονικά νόημα.

υποσυν. του Ω που ικανοποιούν τις:

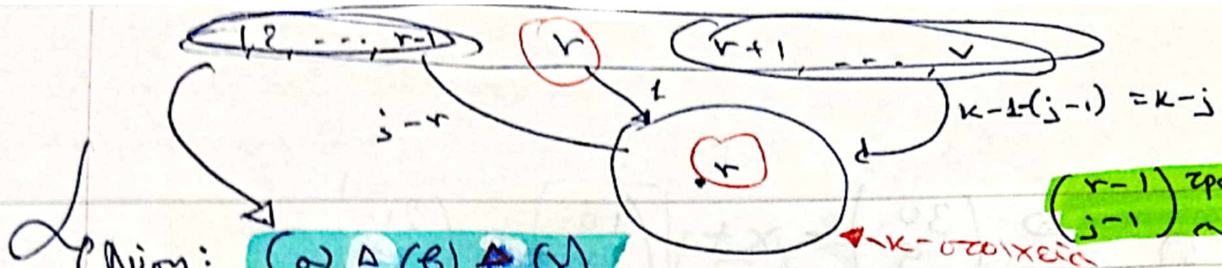
Στο θέμα έλεγε και τα 3 ταυτόχρονα

(α) Περιέχουν ακριβώς k στοιχεία.

(β) Περιέχουν τον ακέραιο r.

(γ) Περιέχουν ακριβώς j-1 ακέραιους μικρότερους του r.

↳ και οσαδήποτε από τα $\{r, r+1, \ldots, \nu\}$ (+ πίσω)



Λύση: (α) Δ (β) Δ (γ).

$\binom{r-1}{j-1}$ τρόποι

- Ένα τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια.

1ο) Επιλογή $j-1$ στοιχείων από το $\{1,2,\dots,r-1\}$

2ο) Επιλογή $k-j$ στοιχείων από το $\{r+1,\dots,v\}$

(!) Δεν αναφερόμαστε στο r γιατί έτσι κι αλλιώς θα είναι εντός κάθε υποσυνόλου.

τρόποι $\binom{v-r}{k-j}$

Από πολλαπλασιαστική αρχή,

$$\boxed{\binom{r-1}{j-1}\binom{v-r}{k-j} \text{ υποσύνολα.}}$$

(α) # πλήθος υποσυνόλων που πληρούν μόνο το (α) $= \binom{v}{k}$

(β) # υποσυνόλων (β) $= \sum_{i=0}^{r-1}\binom{r-1}{i} = 2^{r-1}$

(γ) # υποσυνόλων (γ) $= \binom{r-1}{j-1}\cdot 2^{v-r+1}$

(α) Δ (β) | # υποσ. που πληρούν μόνο (α) Δ (β) $= \binom{v-1}{k-1}$ — εξαιρούμε το r από την επιλογή γιατί θα είναι έτσι κι αλλιώς μέσα

(α) Δ (γ) | # υποσ. (α) Δ (γ) $= \binom{r-1}{j-1}\binom{v-r+1}{k-j+1}$

(β) Δ (γ) | # υποσ. (β) Δ (γ) $= \binom{r-1}{j-1}2^{v-r} \rightarrow (v-r-\cancel{1}+1)$

③ Θέμα 1 | Σεπτ 2005

$\Omega = \{1,2,3,\dots,2\nu\}$

α) # υποσυν. μεγέθους k που περιέχουν ακριβώς 3 περιττούς.

β) # υποσυνόλων μεγέθους k που περιέχουν το πολύ 1 από τους $2i-1$ και $2i$ για κάθε $i=1,2,\dots,\nu$.

Λύση α) Κάθε τέτοιο υποσύνολο γίνεται σε 2 στάδια.

1ο) Επιλογή 3 περιττών → $\binom{\nu}{3}$ τρόποι γτ έχω ν περιττούς

2ο) Επιλογή $k-3$ αρτίων → $\binom{\nu}{k-3}$ τρόποι.

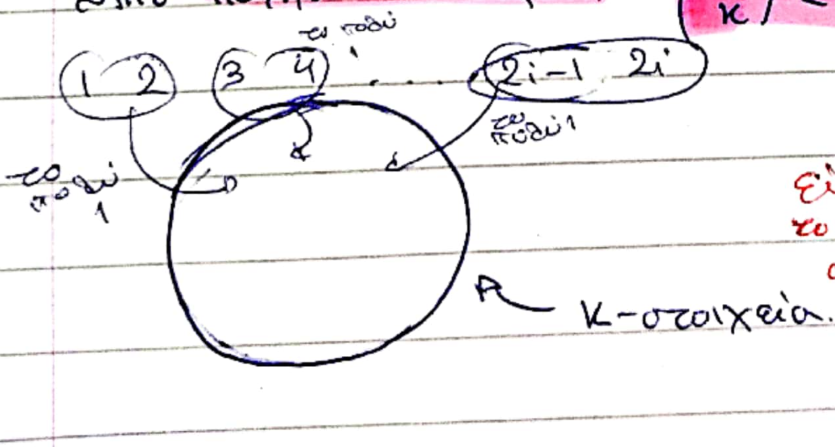
Από πολλαπλασιαστική αρχή, $\binom{\nu}{3}\binom{\nu}{k-3}$ υποσύνολα

β) Ένα τέτοιο σύνολο γίνεται σε 2 στάδια. γτ έχω ν ζεύγη.

1ο) Επιλογή k ζευγών $\{2i-1, 2i\}$ → $\binom{\nu}{k}$ τρόποι.

2ο) Επιλογή περιττούς ή άρτιους → 2^k τρόποι.

Από πολ/στική αρχή, $\binom{\nu}{k}2^k$ τέτοια υποσύνολα



Είναι σαν αυτό με το συμβούλιο και τα ανδρόγυνα. Κοιτάω ποια θα εκπροσωπηθούν (k από ν) και αν θα είναι ο άντρας ή η γυναίκα στο συμβούλιο.