Το μόνο που χρειάζεται να θυμάμαι είναι τα βασικά προβλήματα 1 και 2.

2/11/2023

# Πλήθος ακέραιων λύσεων γραμμικής εξίσωσης

(1) **Ερώτημα**

(χωρίς τετράγωνα)
γραμμική χωρίς συντελεστές.

#λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=k$ (*), $x_i\in\mathbb{Z}$

και άλλους περιορισμούς (πχ το $x_2$ άρτιο)

(2) **Βασικό Πρόβλημα 1**

#ακέραιων λύσεων της (*) με $x_i\in\{0,1\}$ με $i=1,2,\dots,\nu$ $=\binom{\nu}{k}$

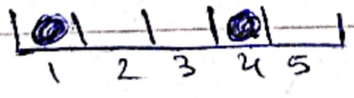
άρα έχω 2 μονάδες

πχ. $\nu=5$, $k=2$ $\quad x_1+x_2+\dots+x_5=2$ με $x_i\in\{0,1\}$.

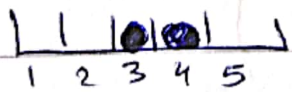
Πρέπει να διαλέξω ποιοι άγνωστοι θα είναι 0 και ποιοι 1. Οι λύσεις θα είναι $\boxed{\binom{5}{2}}$ → διαλέγω 2 θέσεις να μπουν οι μονάδες

Αντιστοιχία,

Λύση $\{1,0,0,1,0\}$ ⟷ Κατανομή 2 όμοιων σφαιριδίων σε 5 διακεκρ. κελιά χωρητ. 1 ⟷ Συνδ. 5 ανά 2 $\{1,4\}$



Διαλέγω 2 θέσεις από τις 5 για να βάλω τα σφαιρίδια

$(0,0,1,1,0)$ ⟷  ⟷ $\{3,4\}$

Κάθε λύση της (*) με $x_i\in\{0,1\}$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε:

όχι μη αρνητικό

(α) Κατανομή $k$ όμοιων σφαιρών σε $\nu$ διακεκρ. κελιά χωρητ. 1

Αν, γενικώς, έχουμε $x_i \geq 3$ είναι $\begin{bmatrix} \nu \\ k-3\nu \end{bmatrix}$

(β) Συνδυασμός ν ανά k (ποια $x_i$ θα είναι ίσα με 1)

③ **Βασικό Πρόβλημα 2**

όταν είναι έτσι έχουμε επαναληπτικούς συνδυασμούς.

# ακέραιων λύσεων της ⊛ με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$ =

$$= \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \binom{\nu+k-1}{k}$$

επαναληπτικοί συνδυασμοί ν ανά κ.

Πχ. $\nu=5$, $k=2$ $\quad x_1+x_2+\dots+x_5=2$, $x_i \in \{0,1\}$

Αντιστοιχία,

2 σφαιρίδια στο κελί 4. Άρα, 2 μονάδες στη μεταβλητή 4.

$(0,0,0,2,0) \longleftrightarrow$ | | | |●●| | (1 2 3 4 5) $\longleftrightarrow \{4,4\}$

$(1,0,0,1,0) \longleftrightarrow$ |●| | |●| | (1 2 3 4 5) $\longleftrightarrow \{1,4\}$

Κάθε λύση της ⊛ με $x_i \geq 0$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε:

τα $x_i$ μη αρνητικά

(α) κατανομή k $\boxed{\text{όμοιων}}$ σφαιρών σε ν διακεκρ. κελιά χωρ. ∞

(β) συνδυασμός ν ανά k με επαναλ. (ποια $x_i$ θα είναι ίσα με 1)

$$x_1+x_2+\dots+x_\nu=k, \quad x_i \in \mathbb{Z} \quad ⊛$$

④ **Εφαρμογή 1: $x_i \geq s_i$**

# ακέραιων λύσεων της ⊛ με $x_i \geq s_i$ με $i=1,2,\dots,\nu$

δοσμένα

$$= \begin{bmatrix} \nu \\ k-\sum_{i=1}^{\nu} s_i \end{bmatrix}$$

σαν να έχω να μοιράσω τα πόσα σφαιρίδια σε ν κελιά.

Διατύπωση του ίδιου προβλήματος μέσω σφαιριδίων και κελιών.

||

\# κατανομών $k$ όμοιων σφαιριδίων σε $v$ διακεκρ. κελιά άπειρης χωρητ. ώστε να έχουν τουλάχιστον $s_i$ σφαιρ. στο κελί $i$, με $i=1,2,\ldots,v$

αφού $x_i \geq s_i$, $\exists$ $x_i$ τέτοια

||  (αφού $x_i \geq s_i$)

\# συνδυασμών του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_v\}$ $v$ ανά $k$ με επανάληψη ώστε το στοιχείο $\omega_i$ να εμφανίζεται τουλάχιστον $s_i$ φορές με $i=1,2,\ldots,v$.

αφού $x_i \geq s_i$

**Λύση:**

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+\ldots+x_v=k \\ x_i \geq s_i, \quad i=1,2,\ldots,v \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$ $y_i = x_i - s_i$, $i=1,2,\ldots,v$ Θέτω (αλλαγή μεταβλητών)

$$\left\{\begin{array}{l} y_1+s_1+y_2+s_2+\ldots+y_v+s_v=k \\ y_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,v \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1+y_2+\ldots+y_v=k-\sum_{i=1}^{v} s_i \\ y_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,v \end{array}\right.$$

σαν να έχω να μοιράσω αυτά τα σφαιρίδια σε $v$ κελιά.

πχ. \# ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+x_3=20$

με
$x_1 \geq 3$
$x_2 \geq 1$
$x_3 \geq 7$

$$= \left[\begin{matrix}3\\9\end{matrix}\right] = \binom{3+9-1}{9} =$$

$(20-11)$

$$= \binom{11}{3} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$$

⑤ Εφαρμογή 2 : $x_i \le m_i$:

# ακέραιων λύσεων της ⊛ με $x_i \le m_i$, $i=1,2,\dots,\nu$

Δοσμένα

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Δεν έχει αντιστοιχία με κατανομές σφαιριδίων σε κελιά χωρητικότητας $m_i$, ούτε με συνδυασμούς, γτ δεν ξέρουμε αν $x_i \ge 0$.

Λύση:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_\nu=k \\ x_i \le m_i, \quad i=1,2,\dots,\nu \end{array}\right\}$$

$\Updownarrow$ $\left.\begin{array}{l} y_i=m_i-x_i \\ i=1,2,\dots,\nu \end{array}\right]$ Θέτω (αλλαγή μεταβλητών)

$$\left\{\begin{array}{l} m_1-y_1+m_2-y_2+\dots+m_\nu-y_\nu=k \\ y_i \ge 0, \quad i=1,2,\dots,\nu \end{array}\right\}$$

$\Updownarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1+y_2+\dots+y_\nu=\sum_{i=1}^{\nu} m_i-k \\ y_i \ge 0 \end{array}\right\}$$

# ακέραιων λύσεων της ⊛ με $x_i \le m_i$, $i=1,2,\dots,\nu$ =

$$= \left[\begin{array}{c} \nu \\ \sum_{i=1}^{\nu} m_i-k \end{array}\right]$$

= #συνδυασμών του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ν ανά k ώστε το στοιχείο $\omega_i$ να εμφανίζεται τουλ. $m_i$ φορές και το πολύ $s_i$.

όταν έχω αμφίπλευρους περιορισμούς

⑥ Εκκρεμότητα: $s_i \le x_i \le m_i$

# ακέραιων λύσεων της ⊕ με $m_i \le x_i \le s_i$ με $i = 1, 2, \ldots, \nu$

Μήπως εννοούσατε $m_i \le x_i \le s_i$;

|| ΜΟΝΟ ΑΝ $x_i \ge 0$.

# κατανομών κ όμοιων σφαιρ σε ν διακεκρ. κελιά ώστε στο κελί i να μπουν τουλάχιστον $m_i$ και το πολύ $s_i$ σφαιρίδια.

πχ. # λύσεων $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ με $1 \le x_1 \le 10$

$3 \le x_2 \le 7$

$2 \le x_3 \le 6$

Το πρόβλημα λύνεται με αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού.

⑦ # ακερ. λύσεων ανίσωσης

# ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = k$ με $x_i \ge 0$ με $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

πχ. $\nu = 5$, $k = 3$

Τα παίρνω όλα γτ θέλω λύση για $\boxed{\le} 3$.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 3$

τυχαίες λύσεις (πχ)

(3,0,0,0,0) } λύσεις = 3

(0,2,1,0,0)

(1,1,0,0,0) } λύσεις = 2

(0,2,0,0,0)

(1,0,0,0,0) } λύσεις = 1

⋮

(0,0,0,0,0) } λύσεις = 0

## Ανισότητα ⇒ $\boxed{H'}$ ⇒ Προσθετική Αρχή

**Λύση:**

**1ος τρόπος**

είναι

$$\begin{pmatrix}\#\text{ακερ. λύσεων της} \\ x_1+x_2+\dots+x_\nu \le k \\ \text{με } x_i \ge 0 \text{ με } i=1,2,\dots,\nu\end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \begin{matrix}\#\text{ακερ. λύσεων της} \\ x_1+x_2+\dots+x_\nu = j \text{ με} \\ x_i \ge 0 \text{ με } i=1,2,\dots,\nu\end{matrix} =$$

?

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[{\nu \atop j}\right] = \sum_{j=0}^{k} \binom{\nu+j-1}{j} = \binom{\nu+k}{k} =$$

από το Βασικό Πρόβλημα 2

Διαγώνια Αναγωγική Σχέση τριγώνου Pascal.

$$= \binom{(\nu+1)+k-1}{k} = \left[{\nu+1 \atop k}\right]$$

**2ος τρόπος**

Αντιστοιχία,

Λύση ανίσωσης

έχει με κατανομές σφαιριδίων σε κελιά θα έλεγα ⇒ θέλω να μοιράσω k διακεκρ. όμοια σφαιρ. σε ν διακεκρ. κελιά αλλά μπορούν να περισσέψουν σφαιρίδια

Λύση Εξίσωσης

$$\begin{matrix} x_1+\dots+x_\nu \le k \\ x_i \ge 0,\ i=1,2,\dots,\nu \end{matrix} \xleftrightarrow{1-1} \begin{matrix} x_1+x_2+\dots+x_\nu+x_{\nu+1}=k \\ x_i \ge 0,\ i=1,2,\dots,\nu \end{matrix}$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_\nu) \xleftrightarrow{x_{\nu+1}=k-\sum_{i=1}^{\nu} x_i} (x_1,x_2,\dots,x_{\nu+1})$$

Άρα,

$$\begin{matrix}\#\text{ακερ. λύσεων της} \\ x_1+x_2+\dots+x_\nu \le k \\ x_i \ge 0\end{matrix} = \begin{matrix}\#\text{ακερ. λύσεων της} \\ x_1+x_2+\dots+x_{\nu+1} = k \\ x_i \ge 0\end{matrix} = \left[{\nu+1 \atop k}\right]$$

**Πχ.** Ακέραια Λύση της $x_1+x_2+x_3 \le 6$ ⟷ Ακέραια Λύση της $x_1+x_2+x_3+x_4=6$

$(3,0,2) \longleftrightarrow (3,0,2,1)$

$(1,1,2) \longleftrightarrow (1,1,2,2)$

$(3,1,1) \longleftrightarrow (3,1,1,1)$

→ συμπληρώνω το περίσσευμα

## (8) Απόδειξη της βασικής αναδρομικής σχέσης του τριγώνου Pascal

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}$$

Από Βασικό Πρόβλημα 1.

**Απόδειξη:**

$\binom{\nu}{\kappa}$ = # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=\kappa$ με $x_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu$. =

= # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=\kappa$ με $x_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu-1$ και $x_\nu=0$ + # ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=\kappa$ με $x_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu-1$ και $x_\nu=1$.

αφού $x_\nu=0$, έχουμε $x_1+x_2+\dots+x_{\nu-1}=\kappa$ και Βασικό πρόβλημα 1

$$= \boxed{\binom{\nu-1}{\kappa}} + \boxed{\binom{\nu-1}{\kappa-1}}$$

$x_1+x_2+\dots+x_{\nu-1}+1=\kappa \Rightarrow x_1+x_2+\dots+x_{\nu-1}=\kappa-1$ (και Βασικό πρόβλημα 1)

## (9) Άσκηση: Θέμα 3 Μαρτίου 2012

(α) Ζητούμενο Πλήθος $= \sum_{\kappa=0}^{\nu}$ # ακερ. λύσεων της εξίσ. $x_1+\dots+x_{2\nu}=8+3\nu$ με $x_i\geq 3$, $i=1,2,\dots,\nu$, $x_i\in\{0,1\}$, $i=\nu+1,\dots,2\nu$ και $x_{\nu+1}+x_{\nu+2}+\dots+x_{2\nu}=\kappa$.

Βασικό Προβλ. 1.

Μια λύση τέτοιου τύπου περιορίζεται σε 2 στάδια.

1ο) Λύση της $\underbrace{x_{\nu+1}+x_{\nu+2}+\dots+x_{2\nu}}_{\nu \text{ μεταβλητές}}=\kappa$ με $x_i\in\{0,1\}$ — $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόποι

2ο) Λύση της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=8+3\nu-\kappa$ με $x_i\geq 3$ → $\left[{\nu \atop 8+\cancel{3\nu}-\kappa-\cancel{3\nu}}\right]$ τρόποι

(από πολλαπλασιαστική αρχή)

Άρα, έχω $\binom{\nu}{\kappa}\left[{\nu \atop 8-\kappa}\right]$ λύσεις,

Άρα, ζητούμενο πλήθος $= \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}\left[{\nu \atop 8-\kappa}\right]$