7/11/2023

Γενικευμένα Παραγοντικά
Διωνυμικοί Συντελεστές
Γεννήτριες Ακολουθιών

① Γενικευμένα παραγοντικά

\# διατ. ν ανά k με επανάληψη $= \nu^k$

\# διατ. ν ανά k $= (\nu)_k = \underbrace{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot\ldots\cdot(\nu-k+1)}_{k}$

↳ με $\nu \geq k \geq 1$

Θέλουμε να ορίσουμε μια επέκταση του $(\nu)_k$
Θα ορίσουμε το $(x)_k$ για $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Θα το λέμε καθοδικό παραγοντικό τάξης k του x.

Βασική Ιδιότητα του $(\nu)_k$:

$$(\nu)_{k+1} = \underbrace{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot\ldots\cdot(\nu-k+1)}_{(\nu)_k}\underbrace{(\nu-k)(\nu-k\ldots)\cdot\ldots\cdot(\nu-k-\lambda+1)}_{(\nu-k)_\lambda}$$

Πώς πρέπει να οριστεί το $(\nu)_0$ και $(\nu)_{-k}$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $k \geq 0$ ώστε να συνεχίσει να ισχύει η ιδιότητα:

$$(\nu)_k = (\nu)_{0+k} = (\nu)_0(\nu-0)_k = (\nu)_0(\nu)_k$$

Άρα, πρέπει να ορίσω $(\nu)_0 = 1$.

Επίσης, $1 = (\nu)_0 = (\nu)_{-k+k} = (\nu)_{-k}(\nu-(-k))_k = (\nu)_{-k}(\nu+k)_k$

Άρα, πρέπει να ορίσω $(\nu)_{-\kappa} = \dfrac{1}{(\nu+\kappa)_\kappa}$.

▶ Ορίζω, τελικά, για $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (x)_\kappa = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-\kappa+1), & \kappa\in\mathbb{Z} \text{ και } \kappa>0 \\ (x)_0 = 1, & \kappa=0 \\ (x)_{-\kappa} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+\kappa)}, & \kappa\in\mathbb{Z} \text{ και } \kappa>0. \end{array}}$$

το καθοδικό Παραγοντικό κ-τάξης του x.

Π.χ.:

$$\left.\begin{array}{l} (x)_2 = x(x-1) \\ (x)_1 = x \\ (x)_{-1} = \dfrac{1}{x+1} \\ (x)_{-2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} \end{array}\right\} \text{κ.ο.κ.}$$

Ομοίως, για $x\in\mathbb{R}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, ορίζεται το ανοδικό παραγοντικό κ-τάξης του x.

$$[x]_\kappa = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+\kappa-1), \quad \kappa\in\mathbb{Z}, \kappa>0.$$

$$[x]_0 = 1$$

$$[x]_{-\kappa} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-\kappa)}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}, \kappa>0$$

Βασική Ιδιότητα:

$$[x]_{\kappa+\lambda} = [x]_\kappa [x+\kappa]_\lambda.$$

*Δεν χρειάζονται απ' έξω αυτά. Απλά να έχω τη γενική ιδέα.

Γράφω έτσι αντί για $\frac{x!}{(x-k)!\,k!}$ γιατί $x\in\mathbb{R}$. Δεν μπορώ να γράψω $x!$ αν x δεν είναι ακέραιος. Για αυτό τα γράφω έτσι, πιθανώς

② Διωνυμικοί Συντελεστές

Ορισμός:

Για το $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 0$:

$$\binom{x}{k}=\frac{(x)_k}{k!}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!}$$

$$\left[\begin{matrix}x\\k\end{matrix}\right]=\frac{[x]_k}{k!}=\frac{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+k-1)}{k!}$$

③ Ιδιότητες

$k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$

το κοιτάω ανάποδα

$$(x)_k=x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)=[x-k+1]_k.$$

ή

βγάζω κοινό παράγοντα το (-1).

$$(x)_k=(-1)^k(-x)(-x+1)\cdot\ldots\cdot(-x+k-1)=(-1)^k[-x]_k.$$

Διαιρώντας με k!:

$$\binom{x}{k}=\left[\begin{matrix}x-k+1\\k\end{matrix}\right]=(-1)^k\left[\begin{matrix}-x\\k\end{matrix}\right]$$

Ομοίως,

$$[x]_k=(x+k-1)_k=(-1)^k(-x)_k.$$

και διαιρώντας με $k!$ έχουμε:

$$\left[\begin{matrix}x\\k\end{matrix}\right]=\binom{x+k-1}{k}=(-1)^k\binom{-x}{k}$$

④ Γεννήτριες:

-Έστω $(a_\nu)=(a_0,a_1,a_2,\dots)$ ακολουθία. Ορίζουμε

$$a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k$$

τη γεννήτρια της (a_ν).

↳ είναι δλδ κάτι σαν πολυώνυμο με συντελεστές τους όρους της ακολουθίας.

-Έστω γεννήτριες

$$A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots$$

$$B(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k=b_0+b_1t+b_2t^2+\dots$$

$$\Gamma(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_kt^k=\gamma_0+\gamma_1t+\gamma_2t^2+\dots$$

1) $A(t)=B(t) \iff a_k=b_k,\ k\geq 0.$

2) $A(t)=B(t)+\Gamma(t) \iff a_k=b_k+\gamma_k,\ k\geq 0$

3) $A(t)=B(t)\Gamma(t) \iff a_k=b_0\gamma_k+b_1\gamma_{k-1}+b_2\gamma_{k-2}+\dots+b_k\gamma_0$ $\quad k\geq 0$

με $a_0+a_1t+a_2t^2+\dots=(b_0+b_1t+b_2t^2+\dots)\cdot(\gamma_0+\gamma_1t+\gamma_2t^2+\dots)$

$$=b_0\gamma_0+(b_0\gamma_1+b_1\gamma_0)t+(b_0\gamma_2+b_1\gamma_1+b_2\gamma_0)t^2+\dots$$

5) Βασικές Γεννήτριες:

$$(a_\nu) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

1] $a_k = 1 \quad , k \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \underbrace{1 + t + t^2 + \cdots}_{\text{Άθροισμα Απείρων όρων γεωμετρικής προόδου}}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} t^k = 1 + t + t^2 + \ldots + t^\nu = x,$$

με
$$\begin{aligned} x &= 1 + \cancel{t} + \cancel{t^2} + \ldots + \cancel{t^\nu} \\ -\ tx &= -\cancel{t} - \cancel{t^2} - \ldots - \cancel{t^\nu} - t^{\nu+1} \\ \hline (1-t)x &= 1 - t^{\nu+1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 - t^{\nu+1}}{1-t}$$

Άρα,
$$\sum_{k=0}^{\nu} t^k = \frac{1 - t^{\nu+1}}{1-t} \xrightarrow{\nu \to +\infty} \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1}, \text{ για } |t|<1.$$

Άρα,
$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{(1-t)} = (1-t)^{-1}, \text{ για } |t|<1.$$

2] Για ν σταθερό: $\quad a_k = \binom{\nu}{k}, \ k \geq 0.$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \binom{\nu}{\kappa} t^{\kappa} = \underbrace{\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} t^{\kappa} = (1+t)^{\nu}}_{\text{Διωνυμικό Θεώρημα Newton.}}$$

<u>Κλασική Απόδειξη</u>: Επαγωγή στο ν [χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}$].

<u>Συνδυαστική Απόδειξη</u>:

$$(1+t)^{\nu} = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdot\ldots\cdot(1+t)}_{\nu \text{ όροι}} = \sum_{\kappa=0}^{\nu} a_{\kappa} t^{\kappa} =$$

$$= 1\cdot1\cdot\ldots\cdot1 + t\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1 + 1\cdot t\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1 + \ldots + 1\cdot1\cdot t\cdot t\cdot1\cdot t\cdot\ldots\cdot1 + \ldots + t\,t\cdot\ldots\cdot t$$

a_κ = # όρων $t^{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}$ με $x_1+x_2+\ldots+x_\nu = \kappa$ με $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\ldots,\nu$

3] Για ν σταθερό.

$$a_{\kappa} = \begin{bmatrix}\nu\\ \kappa\end{bmatrix}, \quad \kappa \geq 0.$$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \begin{bmatrix}\nu\\ \kappa\end{bmatrix} t^{\kappa} = \underbrace{\frac{1}{(1-t)^{\nu}} = (1-t)^{-\nu}}_{\text{Αρνητικό Διωνυμικό Θεώρημα}}.$$

1η <u>Απόδειξη</u>:

$$(1-t)^{-\nu} = \underbrace{(1-t)^{-1}(1-t)^{-1}\cdot\ldots\cdot(1-t)^{-1}}_{\nu \text{ όροι}} =$$

$$= (t^0+t^1+t^2+\ldots)(t^0+t^1+t^2+\ldots)\cdot\ldots\cdot(t^0+t^1+t^2+\ldots) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underline{a_k} t^k \longrightarrow \#\text{όρων } t^k = t^{x_1+x_2+\ldots+x_\nu} \text{ με } x_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,\nu =$$

$$= \#\text{ακέραιων λύσεων της } x_1+x_2+\ldots+x_\nu = k,\ x_i \geq 0 =$$

$$= \left[{\nu \atop k} \right]$$

Θα θυμόμαστε, λοιπόν,:

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^\nu$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[{\nu \atop k} \right] t^k = \frac{1}{(1-t)^\nu}, \quad |t|<1$$

6) Το πολυωνυμικό Θεώρημα

Διωνυμικό Θεώρημα

$$(x_1+x_2)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} x_1^k x_2^{\nu-k} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0 \\ k_1+k_2=\nu}} \frac{\nu!}{k_1!\cdots k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}.$$

Πολυωνυμικό Θεώρημα

$$(x_1+x_2+\dots+x_r)^{\nu} = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r \geq 0 \\ k_1+k_2+\dots+k_r=\nu}} \frac{\nu!}{k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot\ldots\cdot x_r^{k_r}$$

π.χ. $(x+y+z)^4 =$

$$= \frac{4!}{4!\,0!\,0!} x^4 y^0 z^0 + \frac{4!}{3!\,1!\,0!} x^3 y^1 z^0 + \frac{4!}{3!\,0!\,1!} x^3 y^0 z^1 +$$

$$+ \frac{4!}{2!\,2!\,0!} x^2 y^1 z^1$$

ίσως είναι 2

ίσως είναι 0