3) Χωρισμό σε άρτιους και περιττούς δείκτες

28/11/2023

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

① Αρχή Ε-Α

$A_1, A_2, \ldots, A_\nu \subseteq \Omega, \quad S_{\nu,0} = N(\Omega).$

$$S_{\nu,r} = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subseteq \{1,2,\ldots,\nu\}} N(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \cdots A_{i_r})$$

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}.$$

$$N\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i'\right) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} S_{\nu,r}$$

② Γενίκευση

▶ $T_{\nu,k}$ = # στοιχείων του Ω που ανήκουν σε τουλάχιστον k από τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$

• Ειδική Περίπτωση:

$$T_{\nu,1} = N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu)$$

ή $$T_{\nu,2} = N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup \ldots \cup A_{\nu-1}A_\nu)$$

▶ $N_{\nu,k}$ = # στοιχείων του Ω που ανήκουν σε ακριβώς k από τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$

• Ειδική Περίπτωση:

$$N_{\nu,0} = N(A_1'A_2' \cdots A_\nu')$$

$$N_{\nu,1} = N(A_1A_2'A_3' \ldots A_\nu' \cup A_1'A_2A_3'A_4' \ldots A_\nu' \cup \ldots \cup A_1'A_2' \ldots A_{\nu-1}'A_\nu)$$

→ Ισχύει:

$$T_{\nu,k} = \sum_{r=k}^{\nu} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} S_{\nu,r}$$

$$N_{\nu,k} = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} S_{\nu,r}$$

3) Ανταλλάξιμα Σύνολα

Ορισμός: $A_1, A_2, \ldots, A_\nu \subseteq \Omega$

$A_1, \ldots, A_\nu$ ανταλλάξιμα $\Leftrightarrow$ $N(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) = \eta_r$

$\forall \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, \nu\}$

▶ Αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ανταλλάξιμα, τότε

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} \binom{\nu}{r} \eta_r$$

Ομοίως,

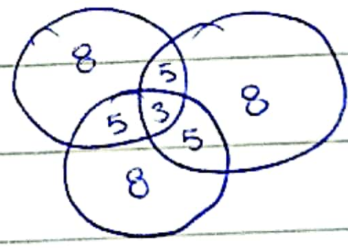
$$N\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i'\right) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} \binom{\nu}{r} \eta_r$$

▶ πχ: A_1, A_2, A_3 ανταλλάξιμα

$\Leftrightarrow$

$N(A_1) = N(A_2) = N(A_3)$

$N(A_1 A_2) = N(A_1 A_3) = N(A_2 A_3)$



(+) →

④ Άσκηση

Να βρεθεί πόσοι αριθμοί από το 1 ως το 1000 δεν διαιρούνται με κανέναν απ' τους 6, 8, 10.

Λύση:

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 1000\}$.

$A_1 = \{6, 12, 18, 24, \ldots, \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor 6\} = \{x \in \Omega : 6 | x\}$

$A_2 = \{8, 16, 24, 32, \ldots, \lfloor \frac{1000}{8} \rfloor 8\}$

$A_3 = \{10, 20, \ldots, 1000\}$.

Ζητούμενο:

$N(A_1' A_2' A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) +$

$+ N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3) - N(A_1 A_2 A_3)$

$N(\Omega) = 1000$, $N(A_1) = \underbrace{\lfloor \frac{1000}{6} \rfloor}_{166}$, $N(A_2) = \underbrace{\lfloor \frac{1000}{8} \rfloor}_{125}$,

$N(A_3) = \underbrace{\lfloor \frac{1000}{10} \rfloor}_{100}$

$N(A_1 A_2) = N(\underbrace{\{x \in \Omega : 6 | x \text{ και } 8 | x\}}_{\iff \text{ΕΚΠ}(6,8) | x \iff 24 | x}) = \underbrace{\lfloor \frac{1000}{24} \rfloor}_{41}$

$N(A_1 A_3) = \underbrace{\lfloor \frac{1000}{30} \rfloor}_{33}$ $N(A_2 A_3) = \underbrace{\lfloor \frac{1000}{40} \rfloor}_{25}$

$N(A_1 A_2 A_3) = \lfloor \frac{1000}{120} \rfloor$. Αντικαθιστούμε, κλπ.

"πολύ όμορφη" άσκηση

(5) Μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία.

Πρόβλημα: Έστω ν άνθρωποι με τα καπέλα τους. Ο καθένας παίρνει ένα στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να μην πάρει κανείς το δικό του; (πιθανότητα P_ν)

Λύση:

$$\lim_{\nu \to \infty} P_\nu = ;$$

πειραματικά

$\nu = 1$, $P_1 = 0$

$\nu = 2$, $\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ (1 & 2) \\ (2 & 1) \end{array}$ $P_2 = \frac{1}{2}$

$\nu = 3$ $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ (1 & 2 & 3) \\ (1 & 3 & 2) \\ (2 & 1 & 3) \\ (2 & 3 & 1) ✓ \\ (3 & 1 & 2) ✓ \\ (3 & 2 & 1) \end{array}$ $P_3 = \frac{1}{3} \left(= \frac{2}{6}\right)$

είναι (με κλασική πιθανότητα, όπου όλα ισοπίθανα).

$$P_\nu = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

με: δυνατές $= n! = \nu!$

ευνοϊκές $=$; $\xrightarrow{(+)}$

μεταθέσεις το $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ που $\forall i = 1, 2, \ldots, \nu$ το i δεν είναι στην i θέση

Για την εύρεση των ευνοϊκών ορίζω:

Ω: Σύνολο των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,\nu\}$.

A_i: Μεταθέσεις του $\{1,2,\dots,\nu\}$ που το i είναι στην i θέση.

$$\text{Ευνοϊκές} = N(A_1' A_2' \cdots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$$

$N(\Omega) = \nu!$

$N(A_{i_1}) = (\nu-1)! = \eta_1$

$N(A_{i_1} A_{i_2}) = (\nu-2)! = \eta_2$

$\vdots$

$N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) = (\nu-r)! = \eta_r$.

Άρα, $A_1, \dots, A_\nu$ ανταλλάξιμα.

$$\text{Ευνοϊκές} = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} (\nu-r)!$$

Άρα,

$$p_\nu = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} (\nu-r)!}{\nu!} =$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \frac{\cancel{\nu!}}{r! \cancel{(\nu-r)!}} \cancel{(\nu-r)!}}{\cancel{\nu!}} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \frac{(-1)^r}{r!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{e} \simeq 40\%.$$

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r} =$$

$$N\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i'\right) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} S_{\nu,r}$$

⑥ Άσκηση

Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 15 όμοια σφαιρίδια σε 3 διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 9, 11, 13 αντίστοιχα;

Λύση:

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με:

\# ακερ. λύσεων της $x_1+x_2+x_3=15$ (*)
με $0\le x_1\le 9$ και $0\le x_2\le 11$ και $0\le x_3\le 13$

Έχουμε:

Ω = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_i\ge 0$, $i=1,2,3$.

A_1 = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_1\ge 10$, $x_2\ge 0$, $x_3\ge 0$

A_2 = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_1\ge 0$, $x_2\ge 12$, $x_3\ge 0$

A_3 = Σύνολο λύσεων της (*) με $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, $x_3\ge 14$.

Ζητούμενο πλήθος $= N(A_1'A_2'A_3')$

$= N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$

όπου:

$$N(\Omega) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$N(A_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow 15-10$$

$$N(A_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow 15-12$$

$$N(A_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow 15-14$$

$N(A_1A_2) = N(A_1A_3) = N(A_2A_3) = N(A_1A_2A_3) = 0.$

Αντικαθιστώ, κλπ.

⑦ Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά ίδιας χωρητικότητας

κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας m $= ;$

Λύση:

Ισοδύναμο πρόβλημα με # ακέραιων λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=k$

με $0 \le x_i \le m$, $i=1,2,\dots,\nu$.

Θέτω:

$\Omega = \{(x_1,x_2,\dots,x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu : x_1+\dots+x_\nu = k, x_i \ge 0 \text{ για } i=1,\dots\}$

$A_i = \{(x_1,\dots,x_\nu) \in \Omega : x_i \ge m+1\}$

Ζητούμενο πλήθος $= N\left(\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i'\right) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

$S_{\nu,0} = N(\Omega) = \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}$

$1 \le r \le \nu \qquad S_{\nu,r} = \sum_{\{i_1,\dots,i_r\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}} N(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r})$

$N(A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_r}) =$ # λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu=k$ με $x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_r} \ge m+1$ και τα υπόλοιπα $x_i \ge 0$ $=$

$= \begin{bmatrix} \nu \\ k-r(m+1) \end{bmatrix}$

Άρα, ζητούμενο πλήθος =

$$= \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} + \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} \begin{bmatrix} \nu \\ k-r(m+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} \begin{bmatrix} \nu \\ k-r(m+1) \end{bmatrix}$$

③ Πρόβλημα Γαλιλαίου

Ρίψη ζαριού ν φορές

Πιθανότητα να εμφανιστεί άθροισμα ρίψεων $= k$.

Λύση:

Ζητούμενη Πιθανότητα $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} =$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} \begin{bmatrix} \nu \\ k-\nu-6r \end{bmatrix}}{6^\nu}$$

$y_i = x_i - 1$

$0 \le y_i \le 5$

$y_1 + \dots + y_\nu = k - \nu$

Δυνατή: $(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ με $x_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$

Ευνοϊκή: $(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ με $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = k$

$x_i \in \mathbb{Z},\ 1 \le x_i \le 6$