$$a_\nu = \frac{2^{2\nu} + \binom{2\nu}{\nu}}{2}$$

7/12/2023

Γεννήτριες Διατάξεων

① Παράδειγμα (βλ. προηγ. μαθ.)

a_κ = # συνδ. 4 ανά κ του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ με τους περιορισμούς:

ίδιους περιορισμούς →

ω_1 εμφ. 1, 2 ή 3 φορές.
ω_2 εμφ. 0 ή 2 φορές.
ω_3 εμφ. 0 ή 1 φορά.
ω_4 εμφ. 2 φορές.

b_κ = # διατάξεων 4 ανά κ με τους ίδιους περιορισμούς.

Για το a_k: $\omega_j \longleftrightarrow tx_j$

$\omega_j \longleftrightarrow A_j(t, x_j)$

Απαριθμήτριες

τόσες φορές μπορούν να εμφανίζονται (ίσως).

$A_1(t, x_1) = (tx_1)^1 + (tx_1)^2 + (tx_1)^3$

$A_2(t, x_2) = (tx_2)^0 + (tx_2)^2$

$A_3(t, x_3) = (tx_3)^0 + (tx_3)^1$

$A_4(t, x_4) = (tx_4)^2$

$A_1(t, x_1)A_2(t, x_2)A_3(t, x_3)A_4(t, x_4) =$

B2

στοιχείων

$= \underbrace{t^3 x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2}_{\{\omega_1, \omega_4, \omega_4\}} + \dots + \underbrace{t^7 x_1^3 x_2^2 x_3^0 x_4^2}_{\{\omega_1, \omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2, \omega_4, \omega_4\}} + \dots +$

$+ \underbrace{\boxed{t^8 x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2}}_{\{\omega_1, \omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_4\}}$ αυτό είναι συνδυασμός

Αν βάλω $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, ο συντελεστής του t^k δίνει το a_k → π.χ. θα μείνουν π.χ. $3t^7$, άρα 3 σύνολα με 7 στοιχεία.

Πώς να τροποποιήσω την ίδια για να δίνει διατάξεις;

Θα θέλαμε αντί $\underbrace{x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2}_{\text{συνδυασμός}} \longrightarrow \dfrac{3!}{1!\,0!\,0!\,2!} x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ
Ένας συνδυασμός δίνει πολλές γεννήτριες.

$x_1^3 x_2^2 x_3^0 x_4^2 \longrightarrow \dfrac{7!}{3!\,2!\,0!\,2!} x_1^3 x_2^2 x_3^0 x_4^2$

Αριθμητής το πλήθος των αριθμών και παρονομαστής η κάθε δύναμη σε παραγοντικό.

Μεταθέσεις ειδών στοιχείων → Χρησιμοποιώ αυτήν την ιδέα.

Ιδέα 💡!

Για να εμφανίζονται τα παραγοντικά στον παρονομαστή διαιρώ κάθε $(tx_j)^r$ με $r!$, δηλαδή:

σαν τις κανονικές απαριθμήτριες

δηλ. που δίνουν τους συνδυασμούς, απλά, επειδή εδώ πάμε για διατάξεις, διαιρώ κάθε όρο με το αντίστοιχο παραγοντικό (αυτό της δύναμης)

Θεωρώ:

$$E_1(t, x_1) = \frac{(tx_1)^1}{1!} + \frac{(tx_1)^2}{2!} + \frac{(tx_1)^3}{3!}$$

$$E_2(t, x_2) = \frac{(tx_2)^0}{0!} + \frac{(tx_2)^2}{2!}$$

$$E_3(t, x_3) = \frac{(tx_3)^0}{0!} + \frac{(tx_3)^1}{1!}$$

$$E_4(t, x_4) = \frac{(tx_4)^2}{2!}$$

Εκθετικές Απαριθμήτριες E

Τότε,

$$E_1(t, x_1)\, E_2(t, x_2)\, E_3(t, x_3)\, E_4(t, x_4) =$$

$$= \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{3!}{1!0!0!2!} x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2 + \dots + \frac{t^7}{7!} \frac{7!}{3!2!0!2!} x_1^3 x_2^2 x_3^0 x_4^2$$

$$+ \frac{t^8}{8!} \cdot \frac{8!}{3!2!1!2!} x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2$$

Η διαδικασία από μόνη της εμφανίζει τα πράσινα και τα πορτοκαλί. Τα μπλε τα συμπληρώνουμε εμείς.

Για να βρω το b_k (# διατάξεων), θέτω $x_j = 1$ για όλα τα j και διαβάζω τον συντελεστή του $\frac{b^k}{k!}$!

* Ουσιαστικά, μαρκάρω πόσες διατάξεις φτιάχνει ένας συνδυασμός.

2) Γενική διαδικασία

b_k = #διατάξεων ν ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$ με περιορισμό ω_j επιτρέπεται να εμφανίζεται r_j φορές με $r_j \in A_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$.

αντλώ

$\boxed{B_1}$ $\omega_j \longleftrightarrow E_j(t, x_j) = \sum_{r_j \in A_j} \frac{(t x_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j = 1, 2, \dots, \nu$

$\boxed{B_2}$ $E_j(t) = E_j(t, 1)$, $j = 1, 2, \dots, \nu$.

$\boxed{B_3}$ $E(t) = E_1(t) E_2(t) \cdots E_\nu(t)$ Εκθετική Γεννήτρια Διατάξεων

$\boxed{B_4}$ $E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!}$

πλήθος διατάξεων.

Βασικές Γεννήτριες

1) $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$, $|t|<1$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[{\nu \atop k} \right] t^k = \frac{1}{(1-t)^\nu}$, $|t|<1$

3) $\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^\nu$

$e^t = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nt} = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$

4] $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$

④ Παραδείγματα (που ήδη ξέρουμε)

1] $a_k = \#$ συνδ. ν ανά k χωρίς επανάληψη;

χωρίς επανάληψη, είτε $\exists$ είτε $\nexists$.

B1] $A_j(t, x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1, \; j = 1, 2, \dots, \nu$

B2] $A_j(t) = t^0 + t^1 = 1 + t, \; j = 1, 2, \dots, \nu$

B3] $A(t) = A_1(t) A_2(t) \cdot \ldots \cdot A_\nu(t) = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdot \ldots \cdot (1+t)}_{\nu - \text{φορές}} = (1+t)^\nu$

B4] $A(t) = (1+t)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k$

Άρα,

$$a_k = \begin{cases} \binom{\nu}{k}, & 0 \le k \le \nu \\ 0, & k \ge \nu + 1 \end{cases}$$

!

2) b_k = #συνδ. ν ανά κ με επανάληψη;

B1) $A_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty} (t x_j)^{r_j}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

B2) $A_j(t) = \sum_{r_j=0}^{\infty} t^{r_j} = \frac{1}{1-t}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

το καθένα τους είναι $\frac{1}{1-t}$.

B3) $A(t) = A_1(t) A_2(t) \cdot \ldots \cdot A_\nu(t) = \frac{1}{(1-t)^\nu}$

B4) $A(t) = \frac{1}{(1-t)^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right] t^k$.

Άρα, $b_k = \left[\begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right]$!

3) b_k = #διατ. ν ανά κ χωρίς επανάληψη;

B1) $E_j(t, x_j) = \frac{(t x_j)^0}{0!} + \frac{(t x_j)^1}{1!}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

B2) $E_j(t) = 1 + t$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

το καθένα είναι $(1+t)$

B3) $E(t) = E_1(t) E_2(t) \cdot \ldots \cdot E_\nu(t) = (1+t)^\nu$

B4) $E(t) = (1+t)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\nu} k! \binom{\nu}{k} \frac{t^k}{k!}$

! Άρα, $b_k = \begin{cases} k! \binom{\nu}{k}, & 0 \le k \le \nu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\nu!}{(\nu-k)!}, & 0 \le k \le \nu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

4) b_k = # διατάξεων ν ανά κ με επανάληψη;

B1) $E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

B2) $E_j(t) = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = e^t$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

B3) $E(t) = E_1(t) E_2(t) \cdot \ldots \cdot E_\nu(t) = (e^t)^\nu = e^{\nu t}$.

B4) $E(t) = e^{\nu t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!}$

Άρα, $b_k = \nu^k$.

!

5) Θέμα 4 | Μάρτιος 2012

a_k = # επαν. διατάξ. των ν+1 στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά κ, όπου το ω_0 επιτρέπεται άρτιο αριθμό φορών και τα υπόλοιπα χωρίς περιορισμό.

(ii) $a_k = ?$

(Ανάποδα)

(i) $E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = ?$

$\boxed{B_1}$ $E_0(t, x_0) = \dfrac{(tx_0)^0}{0!} + \dfrac{(tx_0)^2}{2!} + \dfrac{(tx_0)^4}{4!} + \dots$

τα διαχωρίζω εξαιτίας των περιορισμών που μου δίνονται

$E_j(t, x_j) = \sum\limits_{r_j=0}^{\infty} \dfrac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}$, $j = 1, 2, \dots, \nu$

$\boxed{B_2}$ $E_0(t) = \sum\limits_{\substack{r_j=0 \\ r_j \text{ άρτιος}}}^{\infty} \dfrac{t^{r_j}}{r_j!} = S_a$

όταν βλέπω αυτό, πάντα κάνω το κόλπο με τα $S_a - S_\pi$.

$$\sum_{\substack{r_j=0 \\ r_j \text{ περιττός}}}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = S_\pi$$

$$S_a + S_\pi = \sum_{r_j=0}^{\infty} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = e^t$$

μπορώ να τα ενσωματώσω

$$S_a - S_\pi = \sum_{r_j=0}^{\infty} (-1)^{r_j} \frac{t^{r_j}}{r_j!} = e^{-t}$$

Άρα, $S_a = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

Ξαναγυρνόντας πίσω στο βήμα 2, έχουμε:

$\boxed{B_2}$ $E_0(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$E_j(t) = e^{t}$, $j = 1, 2, \dots, \nu$.

$\boxed{B_3}$ $E(t) = E_0(t)\, E_1(t) \cdot \ldots \cdot E_\nu(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\, e^{\nu t}$

$\boxed{B_4}$ $E(t) = \frac{1}{2} e^{(\nu+1)t} + \frac{1}{2} e^{(\nu-1)t}$.

έσπασα απλά το από πάνω κλάσμα.

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(\nu+1)t]^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(\nu-1)t]^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\nu+1)^k + (\nu-1)^k\right]}_{a_k} \frac{t^k}{k!}$$

6 Θέμα 4α | Φεβρ 2011

a_k = # επαν. διατάξ. των $\nu+2$ στοιχείων του

$\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+2}\}$ ανά k, όπου

- $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu \longrightarrow$ εμφ. χωρίς περιορισμό.
- $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2} \longrightarrow$ τουλάχιστον 1 φορά = ;

$\boxed{B_1}$ τα διαχωρίζω

$$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=0}^{\infty}\frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu.$$

$$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j=1}^{\infty}\frac{(tx_j)^{r_j}}{r_j!}, \quad j = \nu+1, \nu+2.$$

το 0 δεν είναι επιτρεπτό, αυτά τα στοιχεία τα θέλουμε τουλ. 1 φορά.

$\boxed{B_2}$ $E_j(t) = e^t, \quad j = 1, 2, \dots, \nu$

! $E_j(t) = e^t - 1, \quad j = \nu+1, \nu+2$

$\boxed{B_3}$ $E(t) = E_1(t)E_2(t)\cdot\ldots\cdot E_{\nu+2}(t) = e^{\nu t}(e^t-1)^2$

$\boxed{B_4}$ $E(t) = e^{\nu t}(e^{2t} - 2e^t + 1) = e^{(\nu+2)t} - 2e^{(\nu+1)t} + e^{\nu t} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(\nu+2)t]^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(\nu+1)t]^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((\nu+2)^k - 2(\nu+1)^k + \nu^k\right)\frac{t^k}{k!}$$

Εναλλακτικά

A_1 = Διατ. $\nu+2$ ανά κ του Ω που το $\omega_{\nu+1}$ δεν έχω.

A_2 = Διατ. $\nu+2$ ανά κ του Ω που το $\omega_{\nu+2}$ δεν έχω.

$$N(A_1'A_2') = N(\Omega) - N(A_1 \cup A_2)$$

$$a_\kappa = N(A_1'A_2') = N(\Omega) - (N(A_1) + N(A_2)) + N(A_1A_2) =$$

$$= (\nu+2)^\kappa - 2(\nu+1)^\kappa + \nu^\kappa$$

Αρχή Ε-Α.

⊛ Οπότε ψάχνω πληθάριθμο τομής συμπληρωμάτων για αρχή Ε-Α.